1. Übungsblatt

Lineare Algebra II

im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 4.5.17
vor der Vorlesung
in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 \\ -3 & 2 & 3 \\ 9 & 0 & -7 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ gegeben.

(a) Überprüfen Sie, ob $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$ Eigenwerte von A sind. Falls ja, bestimmen Sie jeweils den Eigenraum.

(b) Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2

Zeigen oder widerlegen Sie für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$:

(a) A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

(b) Die Eigenwerte von A^2 sind nicht-negativ.

(c) Wenn $A^2 = E_n$ gilt, dann sind alle Eigenwerte von A in $\{1, -1\}$.

(d) Wenn $A^2 = -E_n$ gilt, dann ist A diagonalisierbar.

Aufgabe 3

Es sei $\Bbbk$ ein Körper, V, W zwei n-dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume und $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$, $G \in \mathrm{End}_{\Bbbk}(W)$ Endomorphismen. Der Endomorphismus F habe die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Bbbk$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Isomorphismus $\Phi : V \to W$ mit $\Phi \circ F = G \circ \Phi$ gibt, wenn G auch die Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat.

Aufgabe 4

Es sei $\Bbbk$ ein Schiefkörper, V ein Rechts-$\Bbbk$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Es sei $v \in V \setminus \{0\}$, $\lambda \in \Bbbk$ mit $F(v) = v.\lambda$, und es sei $a \in \Bbbk^\times = \Bbbk \setminus \{0\}$. Dann existiert $\mu \in \Bbbk$ mit $F(v.a) = (v.a).\mu$.

(b) Es sei $U \subset V$ ein eindimensionaler Unterraum. Dann gilt $F(U) \subset U$ genau dann, wenn $v \in U \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \Bbbk$ existieren, so dass $F(v) = v.\lambda$.

Bitte wenden für Präsenzaufgaben für die Tutorate am 2./3. Mai

Präsenzaufgaben

Lineare Algebra

im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

keine Abgabe, Besprechung 2./3. Mai

Aufgabe 1

Sei $\Bbbk$ ein Körper und $x_0, x_1, \dots, x_n \in \Bbbk$. Zeigen Sie, dass $\det A = \Pi_{0 \le i < j \le n}(x_j - x_i)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Abbildung $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ durch $F(w) = i\bar{w}$
Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum und F als $\mathbb{R}$-lineare Abbildung. Bestimmen Sie die Matrix von F bezüglich der $\mathbb{R}$-Basis $B = (1, i)$ von $\mathbb{C}$. Beschreiben Sie die Abbildung geometrisch.

Aufgabe 3

Sei $\Bbbk$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $F\colon V \to V$ eine $\Bbbk$-lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\ker(F) \subset \ker(F \circ F)$ und $\operatorname{im}(F \circ F) \subset \operatorname{im}(F)$.

(b) Es gilt $\ker(F) = \ker(F \circ F)$ genau dann, wenn $\operatorname{im}(F \circ F) = \operatorname{im}(F)$.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Für eine quadratische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(R)$ definieren wir die Spur als $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für alle $A \in M_{m,n}(R)$ und $B \in M_{n,m}(R)$.

(b) Für $B \in M_{n,m}(R)$ und $C \in M_{m,n}(R)$ gilt: wenn $BC = E_n$ ist, dann gilt für alle $A \in M_n(R)$ die Gleichung $\operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(A)$.

(c) Sei nun $R = \Bbbk$ ein Körper, V ein endlichdimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum mit Basis B und $F\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit darstellender Matrix A bezüglich der Basis B. Dann ist $\operatorname{tr}(F) := \operatorname{tr}(A)$ unabhängig von der Wahl der Basis B.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.