10. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 20.7.17 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es seien L, M und N beliebige R-Moduln.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung

$$\Phi\colon\ \mathrm{Hom}_R\big(L, \mathrm{Hom}_R(M,N)\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L \otimes_R M, N)\ ,$$

so dass $\Phi(F)(\ell \otimes m) = F(\ell)(m)$ für alle $F \in \mathrm{Hom}_R\big(L, \mathrm{Hom}_R(M,N)\big)$, $\ell \in L$, $m \in M$.

(b) Beweisen Sie, dass Φ invertierbar ist, und geben Sie die Umkehrabbildung Ψ an.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_{\Bbbk} V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis $(e_1, \dots, e_n)$ von V und Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt, so dass

$$F = \Psi\left(\sum_{i=1}^n (e_i \otimes e^i)\,.\,\lambda_i\right)$$

wie in Proposition 7.8 (2), dabei sei $(e^1, \dots, e^n)$ die zu $(e_1, \dots, e_n)$ duale Basis von V^*.

Aufgabe 3

Stellen Sie die Sesquilinearform S aus Aufgabe 1 von Blatt 9 auf $V = \Bbbk^4$ ($\Bbbk = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) gemäß Proposition 7.11 (3) als Element von $\overline{V}^* \otimes V^*$ dar. Versuchen Sie, eine Darstellung der Form

$$S = \sum_{i=1}^k \bar\alpha^i \otimes \alpha^i - \sum_{j=1}^\ell \bar\beta^j \otimes \beta^j$$

mit möglichst wenigen Summanden zu finden. Dabei ist $\bar\alpha$ definiert durch $\bar\alpha(v) = \overline{\alpha(v)}$.

Aufgabe 4

Es sei $\Bbbk$ ein beliebiger Körper und V ein $\Bbbk$-Vektorraum mit Basis $(e_1, \dots, e_n)$. Es bezeichne $(V \otimes V)^*$ den Raum der Bilinearformen auf V. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen Unterräume von $(V \otimes V)^*$ sind, bestimmen Sie jeweils die Dimension, und geben Sie eine Basis an.

$$\mathrm{Sym}^2 V^* = \big\{\, B \in (V \otimes V)^* \;\big|\; B(v,w) = B(w,v) \text{ für alle } v, w \in V \,\big\}\ , \tag{a}$$

$$\Lambda^2 V^* = \big\{\, B \in (V \otimes V)^* \;\big|\; B(v,v) = 0 \text{ für alle } v \in V \,\big\}\ . \tag{b}$$

Zur Erinnerung: Der Raum $\Lambda^2 V^*$ wurde bereits in Abschnitt 4.1 betrachtet.