Wiederholungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

KEINE ABGABE - Dieses Blatt wird nicht mehr abgegeben oder besprochen. Es soll Ihnen die Möglichkeit geben, vor der Klausur noch einmal Aufgaben zu verschiedenen Themen der Vorlesung zu bearbeiten.
Beachten Sie: Die Aufgaben der Klausur können ganz anders sein als die auf diesem Blatt.

Aufgabe 1

Es sei $F\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ ein Endomorphismus mit Minimalpolynom $\mu_F(X) = X(X-3)^2$. Bestimmen Sie alle möglichen Jordanformen, die F haben kann. Geben Sie jeweils auch die Dimensionen der Eigenräume an.

Aufgabe 2

Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gibt es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von F? Wenn ja, bestimmen Sie diese.

Aufgabe 3

Sei (V, g) ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $F, G\colon V \to V$ zwei selbstadjungierte Endomorphismen. Zeigen Sie: die Komposition $F \circ G$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn $F \circ G = G \circ F$ gilt.

Aufgabe 4

Gegeben

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(a) A beschreibt eine Isometrie $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(b) F ist orientierungserhaltend

(c) 1 ist ein Eigenwert von F.

Bitte wenden

Aufgabe 5

Sei $\Bbbk$ ein Körper und V, W, X, Y seien endlichdimensionale $\Bbbk$-Vektorräume. Seien $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon X \to Y$ linear. Wählen Sie Basen von V, W, X, Y wie im Rangsatz.

(a) Geben Sie eine Darstellung von $\varphi \otimes \psi$ mit Hilfe dieser Basen an.

(b) Zeigen Sie: es gilt $\operatorname{im}\varphi \otimes \operatorname{im}\psi \subset \operatorname{im}(\varphi \otimes \psi)$, insbesondere gilt $\operatorname{rg}(\varphi \otimes \psi) = \operatorname{rg}(\varphi)\operatorname{rg}(\psi)$.

(c) Zeigen Sie: es gilt $\ker\varphi \otimes X + V \otimes \ker\psi = \ker(\varphi \otimes \psi)$.