2. ÜBUNGSBLATT

LINEARE ALGEBRA II

IM SS 2017 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Donnerstag, den 11.5.17
vor der Vorlesung
in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und $a, b, c, d, e, f \in R$, so dass a, b, c in R invertierbar sind. Bestimmen Sie Ausdrücke für die Einträge in A^{-1} für

$$A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \in M_3(R).$$

(*) Geht das auch, wenn R nicht kommutativ ist? (1 Bonuspunkt, also 50% der Punkte dieses Blattes sind 8 Punkte)

Aufgabe 2

Formulieren und beweisen Sie das Analogon zum Satz 2.18 (Euklidischer Algorithmus) für den Polynomring $\Bbbk[X]$ über einem Körper $\Bbbk$. Ersetzen Sie dabei die Bedingung $a_i > a_{i+1}$ durch $\deg(a_i) > \deg(a_{i+1})$, und benutzen Sie Satz 5.13.

Aufgabe 3

Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler $S \in \mathbb{Q}[X]$ von

$$P(X) = X^5 - 6X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 3X + 10 \quad \text{und} \quad Q(X) = X^4 + X^3 - 7X^2 - X + 6$$

und finden Sie $C, D \in \mathbb{Q}[X]$, so dass

$$C(X)P(X) + D(X)Q(X) = S(X).$$

Zur Probe bestimmen Sie anschließend T, $U \in \mathbb{Q}[X]$, so dass

$$P(X) = S(X) \cdot T(X) \quad \text{und} \quad Q(X) = S(X) \cdot U(X).$$

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{k}$-Vektorraum, $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(V)$ und $v \in V$. Für $i \in \mathbb{N}$ schreibe

$$F^i(v) = (\underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{i\text{-mal}})(v),$$

inbesondere $F^0(v) = v$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $k \in \mathbb{N}$, so dass die Vektoren $v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v)$ linear unabhähngig sind, $v, F(v), \ldots, F^k(v)$ jedoch nicht.

(b) Folgern Sie, dass der Unterraum

$$U = \big\langle v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v) \big\rangle$$

die Basis $\big(v, F(v), \ldots, F^{k-1}(v)\big)$ besitzt.

(c) Zeigen Sie, dass $F(U) \subset U$ gilt, und stellen Sie $F|_U \in \mathrm{End}_{\mathbb{k}}(U)$ bezüglich der Basis aus (b) als Matrix dar.