3. Übungsblatt

Lineare Algebra II

im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 18.5.17
vor der Vorlesung
in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & -6 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_A.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von χ_A die Eigenwerte von A und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Bestimmen Sie (zum Beispiel mit dem Gauß-Verfahren) die Eigenräume und geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Matrizen $A, B, C \in M_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ als

$$A = \begin{pmatrix} [1] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [1] \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} [0] & [0] & [1] \\ [0] & [1] & [0] \\ [0] & [0] & [0] \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome.

(b) Rechnen Sie nach, dass $\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \chi_C(\lambda) = 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

(c) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerten [0] und [1].

(d) Welche Minimalpolynome haben die Matrizen?

Bitte wenden

Aufgabe 3

Sei S ein Ring mit Eins und R eine Teilmenge von S. Wir definieren den Zentralisator von R in S durch

$$Z_S(R) = \{s \in S \mid rs = sr \text{ für alle } r \in R\}.$$

Zeigen Sie, dass $Z_S(R)$ ein Unterring von S ist.

Bemerkung: Wenn in Proposition 5.27 die Abbildung h injektiv ist und wir R mit $h(R) \subset S$ identifizieren, können wir damit sogar alle Elemente aus $Z_S(h(R))$ in Polynome aus $R[X]$ einsetzen und dadurch wieder Elemente in $Z_S(h(R))$ erhalten.

Aufgabe 4

Sei K ein Körper mit Charakteristik $\chi(K) \neq 2$ und $F\colon K^2 \to K^2$ eine lineare Abbildung mit $F \circ F = \mathrm{id}$.

(a) Beschreiben Sie F geometrisch. Überlegen Sie sich dazu, welche Eigenwerte F haben kann.

(b) Geben Sie in allen Fällen eine Basis an, bezüglich der die Matrix von F eine möglichst einfache Gestalt hat. Geben Sie außerdem die Matrizen an.

(c) Skizzieren Sie die verschiedenen Typen der Abbildungen im Fall $K = \mathbb{R}$.

Hinweis: Es sind 3 Fälle zu unterscheiden.