4. Übungsblatt

Lineare Algebra II

im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe ***Dienstag, den 30.5.17***
vor der Vorlesung
in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -4 & -8 & 7 \\ -4 & -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von B.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Beschreiben Sie alle Ideale des Rings $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und zeigen Sie, dass dies ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4

Sei R ein kommutativer Ring.

(a) Sei $\{I_j\}_{j\in J}$ für eine Indexmenge $J \neq \emptyset$ ein System von Idealen in R, so dass für je zwei Indizes $j, k \in J$ gilt $I_j \subset I_k$ oder $I_k \subset I_j$. Zeigen Sie, dass dann auch $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ ein Ideal von R ist.

(b) Seien I_1 und I_2 Ideale in R. Ihre Summe ist $I := I_1 + I_2 := \{a + b \mid a \in I_1, b \in I_2\}$. Zeigen Sie, dass I ein Ideal ist.

Bitte wenden für die Präsenzaufgaben am 30./31. Mai

Präsenzaufgaben

Lineare Algebra

im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

keine Abgabe, Besprechung 30./31. Mai

Aufgabe 1

Betrachten Sie das Ideal $I = (2, X) \subset \mathbb{Z}[X]$ und zeigen Sie, dass I kein Hauptideal ist.

Aufgabe 2

(a) Sei R ein Integritätsbereich. Wir identifizieren R mit den konstanten Polynomen in $R[X]$. Zeigen Sie, dass $R[X]^\times = R^\times$ gilt. Die Einheiten im Polynomring über R sind also genau die Einheiten von R.

(b) Finden Sie eine Einheit vom Grad 1 in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass der Schnitt zweier Ideale in einem Ring R wieder ein Ideal ist.

(b) Sei R ein Hauptidealring und $a, b \in R$. Es seien $c, d \in R$, so dass $(a, b) = (c)$ und $(a) \cap (b) = (d)$ gilt. Zeigen Sie: Dann ist $a \cdot b$ assoziiert zu $c \cdot d$.

Bemerkung: Wir haben gesehen, dass $c = \operatorname{ggT}(a, b)$ Erzeuger des Ideals (a, b) ist. Analog dazu definieren wir auch das *kleinste gemeinsame Vielfache* $d = \operatorname{kgV}(a, b)$ als Erzeuger des Ideals $(a) \cap (b)$.

Außerdem haben Sie in diesen Tutoraten Gelegenheit, offen gebliebene Fragen zur Vorlesung zu diskutieren.

Bitte wenden für die Hausaufgaben.