5. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Dienstag, den 13.6.17
vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Auf diesem Blatt finden Sie einige Bonusaufgaben, d.h. um die 50% der Punkte zu erreichen, benötigen Sie nur 8 Punkte. Sie können aber bis zu 32 Punkte bekommen, wenn Sie alle Aufgaben lösen.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die invarianten Unterräume K und W aus Lemma 5.54 für die Abbildung $F\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, die bezüglich der Standardbasis die folgende Matrix hat:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Jordanschen Normalformen der reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und geben Sie jeweils eine Basiswechselmatrix an.

Aufgabe 3

Sei $A \in M_n(\Bbbk)$ eine Matrix der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Formeln für die Einträge in A^k für $k \in \mathbb{N}$.

(b) Folgern Sie aus a), dass für ein Polynom $P \in \Bbbk[X]$ auf der k-ten Nebendiagonalen der Matrix $P(A)$ in jedem Eintrag $\frac{1}{k!}P^{(k)}(\lambda)$ steht, wobei $P^{(k)}$ die k-te Ableitung von P bezeichnet.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es sei V ein endlichdimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum und $F, G \in \mathrm{End}_{\Bbbk} V$, und F sei diagonalisierbar. Zeigen Sie, dass $F \circ G = G \circ F$ genau dann gilt, wenn alle Eigenräume $V_\lambda = \{v \in V \mid F(v) = v.\lambda\}$ von F invariant unter G sind, das heißt, $\operatorname{Im} G|_{V_\lambda} \subset V_\lambda$.

Aufgabe 5

Die Abbildung $F\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ sei bezüglich der Standardbasis gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1+i & 1-i & -3+2i \\ 2+i & -2-i & 6+2i \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass F nilpotent und zyklisch ist und bestimmen Sie einen Erzeuger $v \in \mathbb{C}^3$.

Aufgabe 6

Sei $V = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg P \leq 3\}$. Sei $F = (X+1) \cdot \frac{d}{dX} \in \mathrm{End} V$, das heißt

$$F(aX^3 + bx^2 + cX + d) = (X+1) \cdot (3aX^2 + 2bX + c).$$

(a) Stellen Sie F bezüglich der Basis $B = (1, X, X^2, X^3)$ als Matrix dar.

(b) Berechnen Sie χ_F und bestimmen Sie die Nullstellen.

(c) Bestimmen Sie eine Basis, die F in Jordanform bringt und geben Sie die Jordanform an.

Aufgabe 7

Es sei $\Bbbk$ ein Körper und $x_0, \ldots, x_n$ gegeben mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$. Es sei

$$P_j(X) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{X - x_i}{x_j - x_i} \in \Bbbk[X].$$

(a) Berechnen Sie $P_j(x_i)$ für alle Paare $(i, j) \in \{0, \ldots, n\}^2$.

(b) Zeigen Sie: die Polynome $P \in \Bbbk[X]$ mit $\deg P \leq n$ bilden einen $\Bbbk$-Vektorraum W.

(c) Die Polynome $P_0, \ldots, P_n$ bilden eine Basis von W.

(d) Sei $y_0, \ldots, y_n \in \Bbbk$. Dann existiert genau ein $P \in W$ mit $P(x_i) = y_i$ für alle $i \in \{0, \ldots, n\}$.

Aufgabe 8

Es sei R ein Hauptidealring und $0 \neq a \in R \setminus R^\times$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) a ist ein Primelement;

(b) $R/(a)$ ist ein Körper;

(c) $R/(a)$ ist ein Integritätsbereich.