6. Übungsblatt

Lineare Algebra II

im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 22.6.17
vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Zeigen Sie, dass durch $S(v,w) = v^t A w$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt S und $F\colon V \to V$ so dass für $\|v\|^2 = S(v,v)$ gilt, dass

$$\|F(v) - F(w)\| = \|v - w\| \quad \text{für alle } v, w \in V.$$

Zusätzlich gelte $F(0) = 0$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $v \in V$ gilt $\|F(v)\| = \|v\|$, d.h. F ist längentreu.

(b) Für alle $v, w \in V$ gilt $S(F(v), F(w)) = S(v, w)$.

(c) Es gilt $\|F(v+w) - F(v) - F(w)\|^2 = 0$ für alle $v, w \in V$.

(d) Die Abbildung F ist $\mathbb{R}$-linear.

Aufgabe 3

Es sei (V, g) ein $\mathbb{k}$-Vektorraum mit Skalarprodukt g und $\|v\|_g^2 = g(v,v)$. Beweisen Sie für $v, w \in V$:

(a) die Parallelogrammidentität

$$\|v+w\|_g^2 + \|v-w\|_g^2 = 2\|v\|_g^2 + 2\|w\|_g^2$$

(b) die Polarisationsformeln

$$g(v,w) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|_g^2 - \|v-w\|_g^2\right) \qquad \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{R}, \text{ und}$$
$$g(v,w) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|_g^2 - \|v-w\|_g^2\right) - \frac{i}{4}\left(\|v+w\,i\|_g^2 - \|v-w\,i\|_g^2\right) \qquad \text{falls } \mathbb{k} = \mathbb{C}.$$

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm, siehe Bemerkung 6.9. Wir nehmen an, dass $\|\cdot\|$ die Parallelogramidentität aus Bemerkung 6.11 (1) (vgl. Aufgabe 3a)) erfüllt, und definieren

$$B : V \times V \to \mathbb{R}, \quad B(v,w) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|_g^2 - \|v-w\|_g^2\right).$$

(a) Zeigen Sie, dass B symmetrisch ist und $\|v\|^2 = B(v,v)$ gilt.

(b) Folgern Sie aus der Parallelogrammidentität, dass $B(u, v+w) = B(u,v) + B(u,w)$ für alle $u, v, w \in V$.

(c) Folgern Sie aus (b), dass $B(u, v \cdot r) = B(u,v) \cdot r$ zunächst für alle $r \in \mathbb{Z}$, und deshalb auch für alle $r \in \mathbb{Q}$ gilt.

d)* (Bonusaufgabe) Folgern Sie aus der Dreiecksungleichung (N3), dass B stetig ist, und daher $B(u, v \cdot r) = B(u,v) \cdot r$ für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt.