7. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 29.6.17 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es sei g das Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ mit der Gramschen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine g-Orthonormalbasis, indem Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Standardbasis der $\mathbb{R}^3$ anwenden.

Aufgabe 2

Es sei (V, g) ein $\mathbb{k}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Es sei $U \subset V$ ein linearer Unterraum mit Basis $(e_1, \dots, e_m)$ und $p : V \to U$ die orthogonale Projektion, die für $v \in V$ definiert ist durch

$$p(v) = \sum_{p=1}^{m} e_p \,.\, g(e_p, v).$$

Zeigen Sie, dass für beliebige $v \in V$ der Vektor $p(v) \in U$ der eindeutig bestimmte Vektor $u \in U$ ist, so dass $\|v - u\|_g$ den kleinsten möglichen Wert annimmt.

Hinweis: Für den Beweis können Sie ähnlich wie bei der Cauchy-Schwarz-Ungleichung vorgehen.

Aufgabe 3

Es sei (V, g) ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $r \in \mathbb{N}$. Wir definieren eine Abbildung $F : V^r \to \mathbb{R}$ durch

$$F(v_1, \dots, v_n) = \sqrt{\det(g(v_p, v_q))_{1 \le p,q \le r}}.$$

Zeigen Sie, dass F für $v_1, \dots, v_r \in V$ und $s \in \mathbb{R}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $F(v_1, \dots, v_{p-1}, v_p \,.\, s, v_{p+1}, \dots, v_r) = F(v_1, \dots, v_r) \cdot |s|$ für alle $p \in \{1, \dots, r\}$,

(b) $F(v_1, \dots, v_{p-1}, v_p + v_q \,.\, s, v_{p+1}, \dots, v_r) = F(v_1, \dots, v_r)$ für alle $1 \le p, q \le r$ mit $p \ne q$,

(c) $F(v_1, \dots, v_r) = 1$ falls $g(v_p, v_q) = \delta_{p,q}$ für alle $1 \le p, q \le r$.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es sei (V, g) ein endlich-dimensionaler $\Bbbk$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subset V$ ein Unterraum.

(a) Zeigen Sie: Die Menge $U^\perp = \{v \in V \mid g(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$ ist ein Untervektorraum, der ein Komplement von U ist. Er heißt das g-orthogonale Komplement von U.

(b) Sei nun (W, h) ebenfalls ein $\Bbbk$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $F \colon V \to W$ eine lineare Abbildung mit adjungierter Abbildung $F^* \colon W \to V$.

Zeigen Sie: Es gilt $\ker F^* = (\operatorname{im} F)^\perp$ und $\operatorname{im} F^* = (\ker F)^\perp$.