8. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 6.7.17 vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F(v) = Av$ für

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von F.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ und die dadurch definierten Bilinearformen $S(x,y) = x^tAy$ und $T(x,y) = x^tBy$ auf $\mathbb{R}^2$.
Bestimmen Sie eine gemeinsame Orthogonalbasis von S und T, falls eine solche existiert.
Hinweis: Finden Sie zuerst eine ONB von S und stellen Sie T bezüglich dieser Basis dar.

Aufgabe 3

Sei (V, g) ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $F \in \operatorname{End}(V)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $F = G \circ G$ für eine selbstadjungierte Abbildung $G\colon V \to V$.

(b) Es gilt $F = G^* \circ G$ für ein $G \in \operatorname{End}(V)$.

(c) F ist selbstadjungiert und $g(F(v), v) \geq 0$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 4

Es sei $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, (V, g) ein n-dimensionaler $\mathbb{k}$-Vektorraum und $\omega \in \Lambda^n V^*$ eine Determinantenfunktion. Zeigen Sie:

(a) Für alle $(n-1)$-Tupel $(v_2, \ldots, v_n) \in V^{n-1}$ existiert genau ein Vektor $w \in V$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$g(w, v) = \omega(v, v_2, \ldots, v_n).$$

(b) Es sei $V = \mathbb{R}^3$, g das Standardskalarprodukt und ω sei das Spatprodukt. Dann gilt $w = v_2 \times v_3$.

(c) Sei eine Basis eines orientierten Vektorraums V gegeben, dann bestimme $(n-1)$ Vektoren mit dem Gram-Schmidt-Verfahren. Bestimme den letzten Vektor mit (a) und normiere ihn. Dann ist die neue Basis eine orientierte Orthonormalbasis von V.