9. Übungsblatt
Lineare Algebra II
im SS 2017 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 13.7.17
vor der Vorlesung in den Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Wenn Sie in der Evaluierung explizit Ihren Tutor erwähnen, geben Sie bitte den Namen oder die Nummer der Übungsgruppe an.

Aufgabe 1

Sei S die Sesquiliearform auf $\mathbb{k}^4$, die durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie eine Basis wie im Satz 6.67 von Sylvester und bestimmen Sie die Signatur (n_+, n_-, n_0) von S.

Aufgabe 2

Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ mit dem Lorentzprodukt, d.h., mit der Sesquilinearform S, die bezüglich der Standardbasis durch die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist.

(a) Skizzieren Sie die Mengen $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid S(x,x) = 1\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid S(x,x) = -1\}$.

(b) Sei $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass $w = \lambda v$ die Eigenschaft $S(w,w) = 1$ hat.

(c) Ergänzen Sie den Vektor w aus b) zu einer Basis wie im Satz von Sylvester.

Aufgabe 3

Sei V ein $\mathbb{k}$-Vektorraum, V^* der Dualraum und $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(V^*, \mathbb{k})$ der Bidualraum.

(a) Konstruieren Sie eine natürlich injektive lineare Abbildung $F_V \colon V \to V^{**}$.

(b) Sei W ein weiterer $\mathbb{k}$-Vektorraum und $G\colon V \to W$ linear. Wir betrachten die duale Abbildung $G^*\colon W^* \to V^*$ und deren duale Abbildung $G^{**}\colon V^{**} \to W^{**}$.

Zeigen Sie, dass $G^{**} \circ F_V = F_W \circ G$ gilt.

Hinweis zu a): Überlegen Sie sich für $v \in V$ und $\beta \in V^*$, welchen Wert $F_V(v)(\beta) \in \mathbb{k}$ natürlicherweise haben könnte.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\operatorname{ggT}(m,n)\mathbb{Z}$.