3. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 7.5.18
12 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Gaußklammer, d.h., $f(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist also Funktion von $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_l)$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{O}_{std})$.
Dabei ist $\mathcal{O}_{std}$ die Standardtopologie und $\mathcal{O}_l$ die Topologie der Sorgefrey-Geraden (vgl. Aufgabe 3 von Blatt 2, eine Basis dieser Topologie sind die Intervalle $[a, b)$ für $a < b$ und $a, b \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 2

Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume.

(a) Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f\colon X \to Y$ stetig ist, wenn $\mathcal{O}_X$ die diskrete Topologie ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Abbildung $f\colon X \to Y$ stetig ist, wenn $\mathcal{O}_Y$ die triviale Topologie ist.

(c) Sei nun $X = Y$ mit zwei Topologien $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{id}\colon (X, \mathcal{O}_1) \to (X, \mathcal{O}_2)$ genau dann stetig ist, wenn $\mathcal{O}_1$ feiner ist also $\mathcal{O}_2$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass für eine Abbildung $f\colon X \to Y$ die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) f ist stetig.

(b) Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

(c) Für eine Basis $\mathcal{B}$ der Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf Y ist $f^{-1}(B)$ offen in X für alle $B \in \mathcal{B}$.

(d) Für eine Subbasis $\mathcal{S}$ der Topologie $\mathcal{O}_Y$ auf Y ist $f^{-1}(B)$ offen in X für alle $B \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 4

Sei X eine Menge und (x_n) eine Folge in X. Unter welchen Bedingungen konvergiert (x_n) in der angegebenen Topologie? Ist der Grenzwert eindeutig? Wenn nicht, wie viele Grenzwerte gibt es? Beantworten Sie diese Fragen für die folgenden Topologien:

(a) Für die diskrete Topologie.

(b) Für die triviale Topologie.