7. Übungsblatt
Topologie
im SS 2018 bei Dr. D. Hein

Abgabe Montag, den 11.6.18
12 Uhr in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

(a) Sei X ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Zeigen Sie, dass $X/_\sim$ genau dann ein (T1)-Raum ist wenn für jedes $x \in X$ die Äquivalenzklasse $[x] \subseteq X$ abgeschlossen ist.

(b) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum X genau dann Hausdorff ist, wenn die Diagonale $\Delta := \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ bezüglich der Produkttopologie abgeschlossen ist.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie, dass ein topologischer Raum genau dann (T4) ist, wenn es für jede abgeschlossene Menge A und jede offene Menge U mit $A \subseteq U$ eine offene Menge V gibt, so dass

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U.$$

(b) Folgern Sie aus a), dass es in einem normalen Raum zu jedem Paar disjunkter abgeschlossener Mengen A, B Umgebungen von A und B gibt, deren Abschlüsse disjunkt sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass ein zusammenhängender, normaler Raum überabzählbar ist, wenn er mehr als einen Punkt hat.

Aufgabe 4

Eine Teilmenge $A \subseteq X$ eines topologischen Raumes heißt G_δ-Menge, wenn man sie als Schnitt von abzählbar vielen offenen Mengen schreiben kann. Zeigen Sie, dass in einem normalen Raum die folgenden Aussagen für eine Teilmenge A äquivalent sind:

(a) Es gibt eine stetige Abbildung $f\colon X \to [0, 1]$, so dass $A = f^{-1}(0)$ gilt.

(b) A ist eine abgeschlossene G_δ-Menge.