SEMINAR
HOMOTOPIETHEORIE — WS 2015/16

SEBASTIAN GOETTE

MO., 14–16, SR 127, ECKERSTR. 1

In diesem Seminar wollen wir zum einen Erweiterungen, zum anderen Anwendungen der algebraischen Topologie kennenlernen. Das Seminar besteht aus mehreren Blöcken, die zum Teil voneinander unabhängig sind. Manche Vorträge können (bei Interesse des Sprechers und des Publikums) auch auf zwei Sitzungen ausgedehnt werden.

1. Ergänzungen zur Vorlesung

In diesem Abschnitt können wir ein paar weitere Anwendungen von Spanier-Whitehead-Dualität und Thom-Isomorphismus herleiten. Die Vorträge sind optional und unabhängig voneinander.

Euler-Klasse und Gysin-Sequenz. Definition der Eulerklasse über den Thom-Isomorphismus. Eulerklasse und Eulerzahl für Mannigfaltigkeiten. Die Gysin-Sequenz für Sphärenbündel [H2, Section 3.2 bis S. 91].

Der Lefschetz-Fixpunktsatz. Monoidale Funktoren und Spuren auf stark dualisierbaren Objekten. Satz von Poincar'e-Hopf Lefschetz-Fixpunktsatz nach [DP, Section 4].

Inverse Limiten und der Thom-Isomorphismus. Für den allgemeinen Beweis des Thom-Isomorphismussatzes benötigt man die Ableitung $\lim^1$ des inversen Limes. Wenn Zeit bleibt, kann man hier auch die Existenz von (gewöhnlichen) Orientierungen zeigen [Ad, III.8], [H1, App. 4D], [Sw, Thm 14.6, Prop 4.18].

Elementare Sätze über CW-Spektren. Für CW-Spektren gilt eine stabile Fassung des Satzes von Whitehead. Diese kann hier bewiesen werden [H3, Section 2.1].

2. Topologische K-Theorie

In der Vorlesung haben wir topologische K-Theorie nur kurz eingeführt. In diesem Abschnitt wollen wir Bott-Periodizität beweisen. Als Anwendung untersuchen wir parallelisierbare Sphären und zeigen, dass $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathcal{O}$ die einzigen Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind.

Komplexe Bott-Periodizität (1 oder 2 Vorträge). Bott-Periodizität ist das wichtigste Hilfmittel bei der Konstruktion komplexer K-Theorie. Hier soll sie bewiesen werden. [H2, Sections 2.1, 2.2]

Reelle K-Theorie (optional). Auch für reelle K-Theorie gibt es eine Periodizität. Sie könnte hier erläutert werden.

Spaltungsprinzip und der Leray-Hirsch-Satz. Das Spaltungsprinzip erlaubt es, manche kohomologische Aussagen über Vektorbündel auf Aussagen über Geradenbündel zurückzuführen. Es gibt eine topologische und eine algebraische Variante; beide sind interessant, eine sollte vorgestellt werden [H2, Section 2.3 ab S. 65].

Adams-Operationen und parallelisierbare Sphären (1 oder 2 Vorträge). Auf topologischer K-Theorie gibt es viele interessante algebraische Operationen. Diese sollen hier eingeführt werden, und benutzt werden, um parallelisierbare Sphären, Divisionsalgebren über $\mathbb{R}$, und Abbildungen $S^{4k-1} \to S^{2n}$ mit Hopf-Invariante 1 zu klassifizieren [H2, Section 2.3].

3. Spektralsequenzen I

Eine Spektralsequenz ist eine Folge von (Ko-) Kettenkomplexen $(E^i_\bullet, d^i_\bullet)_{i\in\mathbb{N}}$, so dass $E^{i+1}_\bullet = H_\bullet(E^i_\bullet, d^i_\bullet)$ für alle i. In einfachen Fällen lassen sich aus Spektralsequenzen exakte Sequenzen herausdestillieren; einfache Beispiele hierfür sind das Schlangenlemma und zelluläre (Ko-) Homologie. In diesem Abschnitt betrachten wir die Atiyah-Hirzebruch-Leray-Serre-Spektralsequenz.

Die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz (optional). Sei $\tilde{h}$ ein allgemeiner (Ko-) Homologiefunktor und X ein CW-Komplex. Ziel ist die Berechnung von $\tilde{h}(X)$ wie bei zellulärer (Ko-) Homologie. Man erhält einen filtrierten Komplex, der eine Spektralsequenz liefert. Diese Spektralsequenz „konvergiert" gegen $\tilde{h}(X)$. Zu erklären ist, wie man die Spektralsequenz konstruiert, wie man in Spezialfällen ihre Differentiale bestimmt, und wie man anschließend $\tilde{h}(X)$ rekonstruiert [Sw, Kap 15 bis Thm 15.7], [Ad, III.7].

Die Leray-Serre-Spektralsequenz (1-2 Vorträge). Sei $F \to E \to B$ ein Faserbündel und B ein CW-Komplex. Das liefert einen filtrierten Komplex zur Berechnung der gewöhnlichen (Ko-) Homologie $H(E; A)$. Wieder ist zu erklären, wie man in Spezialfällen $H(E; A)$ bestimmt [H3, Section 1.1 bis S. 13].

Verallgemeinerungen und Spezialfälle (optional). Die beiden obigen Spektralsequenzen lassen sich zur Atiyah-Hirzebruch-Leray-Serre-Spektralsequenz kombinieren. Als Spezialfall für Produkte erhält man eine Verallgemeinerung der Künneth-Formel für allgemeine Homologiefunktoren. Als Spezialfall für Sphärenbündel erhält man die Gysin-Sequenz. Außerdem kann man den Thom-Isomorphismussatz neu beweisen [Sw, Kap 15 ab 15.8, insbes. Thm. 15.27].

Rationale Homotopiegruppen der Sphären. Die Leray-Serre-Spektralsequenz für Kohomologie ist verträglich mit Cup-Produkten. Mit Hilfe der multiplikativen Struktur lässt sich unter anderem zeigen, dass $\pi^s_n(S^0)$ endlich ist für alle $n > 0$ [H3, Section 1.2, S. 26-34].

4. Die Steenrod-Algebra

Das Cup-Produkt auf der Kohomologie ist „instabil". Als „Stabilisierung" erhält man für jede Primzahl p eine Algebra von Kohomologieoperationen auf $\tilde{H}^\bullet(\,\cdot\,; \mathbb{Z}/p)$. Außerdem wollen wir einige Anwendungen besprechen.

Die Steenrod-Operationen. Steenrod-Operationen und elementare Eigenschaften. Anwendungen, zum Beispiel: maximale Anzahl punktweise linear unabhängiger Vektorfelder auf S^n; Abbildungen zwischen Moore-Räumen; Selbstabbildungen von $\mathbb{H}P^\infty$ [H1, App. 4L bis S. 496]

Die Steenrod-Algebra. Weitere Eigenschaften und Konstruktion der Steenrod-Operationen und der Steenrod-Algebra, mit Schwerpunkt auf $p = 2$. Anwendungen zum Beispiel: projektive Räume über den Oktaven, [H1, App. 4L ab S. 496].

5. Spektralsequenzen II

Viele homotopietheoretische Konstruktionen laufen auf die Bestimmung stabiler Abbildungsklassengruppen $[X, Y]$ hinaus. Die Adams-Spektralsequenz führt die Berechung von $[X, Y]$ auf ein kohomologisches Problem zurück. Sie verallgemeinert unter anderem das universelle Koeffiziententheorem und kann zur Bestimmung der stabilen Homotopiegruppen von Sphären benutzt werden.

Die Adams-Spektralsequenz. Hier soll die Adams-Spektralsequenz zunächst erklärt und dann bewiesen werden [H3, Section 2.2 bis S. 21].

Stabile Homotopiegruppen. Mit Hilfe der Adams-Spektralsequenz versuchen wir, einige stabile Homotopiegruppen der S^0 zu bestimmen [H3, Section 2.2 ab S. 21].

Mehr zur Adams-Spektralsequenz (optional). Multiplikative Struktur, e-Invariante … [Sw, Kapitel 19 ab Thm 9.9].

Ein allgemeines universelles Koeffiziententheorem (optional). Es sei $\mathbb{F}$ ein $\mathbb{E}$-Modulspektrum. Unter bestimmten Voraussetzungen existiert eine Spektralsequenz $\mathrm{Ext}_{E^\bullet}(E_\bullet(X), F^\bullet) \Longrightarrow F^\bullet(X)$ [Ad, III.13].

6. Der J-Homomorphismus

Die Gruppe $O(n)$ wirkt auf S^n. Hiermit konstruiert man den J-Homomorphismus $J\colon \pi_k O(n) \to \pi_{k+n}(S^n)$ und seine stabile Variante $\pi_k O \to \pi_k^s(S^0)$. Man konstruiert damit den „einfachen“ Anteil von $\pi_k^s(S^0)$. Außerdem lassen sich exotische Sphären und exotische Sphärenbündel konstruieren.

Konstruktion und erste Eigenschaften. [H2, Section 4.1].

Das Bild des J-Homomorphismus. Dieses ist in [H2] angegeben, allerdings (noch) ohne vollständigen Beweis.

Hatchers nichtlineare Sphärenbündel. Aus dem Kokern des J-Homomorphismus lassen sich Sphärenbündel basteln, die nicht von Vektorbündeln herkommen.

Literatur

[Ad] J. F. Adams, Stable homotopy and generalised homology, The University of Chicago Press, Chicago, 1974.

[DP] A. Dold, D. Puppe, Duality, trace and transfer, Proceedings of the International Conference on Geometric Topology (Warsaw, 1978), pp. 81–102, Warsaw, 1980.

[H1] A. Hatcher, Algebraic Topology, Cambridge Univeristy Press, Cambridge, 2002, xii+544S., `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/ATpage.html`

[H2] ———, Vector Bundles and K-Theory, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`

[H3] ———, Spectral Sequences in Algebraic Topology, `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSATpage.html`

[Sw] R. W. Switzer, Algebraic Topology—Homotopy and Homology, Springer, Berlin, 1975.