

SYMPLEKTISCHE GEOMETRIE

DORIS HEIN

Version vom 14. Juli 2016

Dieses Skript enthält keine Beweise und auch geometrische Beispiele und Bilder fehlen. Es kann also keine Vorlesungsmitschrift ersetzen, sondern nur eine grobe Orientierung und eine Übersicht über die Resultate geben.

Wenn Sie Fehler finden, freue ich mich über eine Information.

INHALTSVERZEICHNIS

1. Motivation	3
2. Symplektische lineare Algebra	5
2.1. Symplektische Vektorräume	5
2.2. Symplektische lineare Abbildungen	7
2.3. Die Gruppe $Sp(2n)$	8
2.4. Kompatible Strukturen	9
3. Schnellkurs Differentialformen	10
3.1. Grundlagen	10
3.2. Äußere Ableitung	12
3.3. Differentialformen und Integration	13
3.4. Differentialformen und Vektorfelder	14
4. Symplektische Mannigfaltigkeiten und Abbildungen	16
4.1. Definition und Eigenschaften	16
4.2. Fast komplexe Strukturen	18
4.3. Satz von Darboux	19
4.4. Untermannigfaltigkeiten	21
5. Symplektische Vektorfelder	23
5.1. Symplektische Vektorfelder	23
5.2. Integrale	25
5.3. Hamiltonsche Dynamik	27
5.4. Erzeugendenfunktionen	32
Literatur	34

1. MOTIVATION

Eine mögliche Formulierung von klassischer Mechanik sind die Newtonschen Gesetze ($F = ma$, actio=reactio, Superposition der Kräfte), die allerdings sehr unhandlich werden können.

Grund dafür sind meistens Zwangskräfte, z.B. die, die wirken, um ein Pendel im richtigen Abstand zur Aufhängung zu halten oder den Wagen auf den Schienen einer Achterbahn. Diese Kräfte haben mit der Bewegungsbeschreibung nichts zu tun, wenn die Länge des Pendels oder der Schienenverlauf bekannt sind und man sich nur dafür interessiert, wann der Körper (das Gewicht, der Wagen) an welchem Ort ist.

Wenn man die Gesamtenergie benutzt, kann man die Bewegungsgleichungen auch handlicher beschreiben und als Koordinaten nur den Winkel zur Senkrechten (beim Pendel) oder die zurückgelegte Strecke der Achterbahn benutzen. Dies führt dann zur Hamiltonschen Mechanik und darüber zur symplektischen Geometrie.

Wir bezeichnen die Koordinaten mit $x \in \mathbb{R}^n$ für den Ort und $y \in \mathbb{R}^n$ den Impuls, also $y = m\dot{x}$. In der Regel setzen wir $m = 1$, dann ist $y = \dot{x}$ die Geschwindigkeit. Die Funktion

$$H(x, y) = \frac{1}{2} \|y\|^2 + V(x)$$

beschreibt die Gesamtenergie des Systems. Hierbei ist der erste Term die Bewegungsenergie oder kinetische Energie und $V(x)$ ist das Potential (auch Lageenergie). Allgemeiner kann die Energie auch zeitabhängig sein, wenn externe Kräfte wirken, in diesem Fall ist das Potential $V(t, x)$ zeitabhängig.

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\dot{x}_i(t) = \frac{\partial H}{\partial y_i}(x(t), y(t)) \quad \dot{y}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_i}(x(t), y(t)),$$

wobei $\dot{x}_i = \frac{\partial x}{\partial t}$ die Zeitableitung ist. Allgemeiner fassen wir auch die Koordinaten zusammen und schreiben

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t)) \quad \dot{y}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t)).$$

Hierbei sind die Ableitungen $\frac{\partial H}{\partial x}$ und $\frac{\partial H}{\partial y}$ die Gradienten von H bezüglich der x - bzw. y -Koordinaten.

Wenn wir die Koordinaten zusammenfassen als $z(t) = (x(t), y(t))$, dann erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\dot{z} = J\nabla H(z), \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei 1 die $n \times n$ -Einheitsmatrix beschreibt. Der Vektor $J\nabla H$ heißt auch **symplektischer Gradient von H** .

Natürlich sollte diese Formulierung der klassischen Mechanik auch in verschiedenen Koordinatensystemen funktionieren. Die geeigneten Koordinatentransformationen sind dabei diejenigen, die die Matrix J invariant lassen.

Ziel dieser Vorlesung ist es, die Geometrie, die von J induziert wird, zu verstehen und insbesondere die Abbildungen, die mit dieser geometrischen Struktur kompatibel sind. Dafür betrachten wir statt eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in der Euklidischen Geometrie hier schiefsymmetrische Bilinearformen wie zum Beispiel $\omega(v, w) = \langle v, Jw \rangle = v^T Jw$.

2. SYMPLEKTISCHE LINEARE ALGEBRA

Bevor wir richtig in die symplektische Geometrie auf Mannigfaltigkeiten einsteigen, betrachten wir erstmal die lineare Theorie und legen dann weitere Grundlagen.

2.1. Symplektische Vektorräume.

Definition 2.1. Ein **symplektischer Vektorraum** (V, ω) ist ein Vektorraum V über \mathbb{R} mit einer nicht entarteten, schiefssymmetrischen Bilinearform ω .

Es gilt also $\omega(v, w) = -\omega(w, v)$ und für jedes $v \neq 0$ gibt es ein w mit $\omega(v, w) \neq 0$.

Beispiel 2.2. (a) $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit $\omega_0(v, w) = \langle v, Jw \rangle$ mit J wie oben.

(b) \mathbb{C}^n als \mathbb{R} -Vektorraum mit $\omega(v, w) = \operatorname{Re} \langle v, iw \rangle$ liefert die Bilinearform ω_0 , wenn man $z = x + iy$ zerlegt und mit $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$ identifiziert. Dies legt schon nahe, dass symplektische Geometrie viel mit komplexer Geometrie gemeinsam hat, die Bedingungen sind aber im Allgemeinen auf Mannigfaltigkeiten etwas schwächer als komplexe Strukturen.

(c) Für einen beliebigen \mathbb{R} -Vektorraum W setze $V = W \oplus W^*$ und definiere die symplektische Form als $\omega((u, u^*), (v, v^*)) = v^*(u) - u^*(v)$. Diese Struktur werden wir später auf Kotangentialbündeln von Mannigfaltigkeiten wiedersehen, die auf analoge Weise eine kanonische symplektische Struktur tragen.

Auf \mathbb{R}^2 gibt es bis auf Skalierung nur eine schiefssymmetrische Bilinearform. Diese ist gegeben durch die Determinante, also durch

$$\omega(v, w) = \det(v \ w).$$

(Übung) Da die Determinante die Fläche des aufgespannten Parallelogramms beschreibt, nennt man diese Bilinearform auch eine Volumenform auf \mathbb{R}^2 .

Definition 2.3. Sei W ein Unterraum von (V, ω) . Dann ist

$$W^\perp := \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \forall w \in W\}$$

das ω -**orthogonale Komplement** von W .

Beachte: Da ω schiefssymmetrisch ist, gilt $\omega(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Damit sieht man, dass nicht unbedingt wie bei einem Skalarprodukt gelten muss, dass $V = W \oplus W^\perp$. Der Unterraum W^\perp ist also nicht zwingend ein Komplement von W .

Lemma 2.4. *Wie bei einem Skalarprodukt gilt*

- (a) $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$
- (b) $(W^\perp)^\perp = W$
- (c) $W \subseteq U \Rightarrow U^\perp \subseteq W^\perp$

Wir untersuchen insbesondere Unterräume, bei denen W und W^\perp in einer Beziehung stehen.

Definition 2.5. Ein Unterraum W von (V, ω) heißt

- (a) **isotrop**, wenn $W \subseteq W^\perp$,

- (b) **koisotrop**, wenn $W^\perp \subseteq W$,
- (c) **Lagrangesch**, wenn $W = W^\perp$,
- (d) **symplektisch**, wenn $W \cap W^\perp = \emptyset$.

Insbesondere gilt für $2n = \dim V$, dass die Dimension isotroper Unterräume höchstens n , die Dimension koisotroper Unterräume mindestens n und die Dimension Lagrangescher Unterräume genau n ist. Die Dimension symplektischer Unterräume ist gerade, denn in diesem Fall ist $(W, \omega|_W)$ wieder ein symplektischer Vektorraum.

Beispiel 2.6. Betrachte den Vektorraum $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit der Basis $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ wie oben.

- (a) Jeder eindimensionale Unterraum ist isotrop, jeder $2n - 1$ -dimensionale Unterraum ist koisotrop. (Beweis: Übung)
- (b) Jeder Unterraum der Form $W = \text{span}(x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_i)$ für $i = 1, \dots, n$ ist symplektisch.
- (c) Jeder Unterraum der Form $W = \text{span}(x_1, \dots, x_i)$ für $i = 1, \dots, n$ ist isotrop.
- (d) Jeder Unterraum der Form $W = \text{span}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_i)$ für $i = 1, \dots, n$ ist koisotrop.
- (e) Ein Lagrangescher Unterraum ist sowohl isotrop als auch koisotrop. Zum Beispiel ist $W = \text{span}(x_1, \dots, x_n)$ Lagrangesch.

Satz 2.7. *Sei W ein Unterraum eines symplektischen Vektorraumes (V, ω) . Dann hat der Vektorraum $(V', \omega') := (W/(W \cap W^\perp))$ eine von ω induzierte symplektische Struktur ω' .*

Genauer induziert W eine Zerlegung von V in symplektische Vektorräume der Form

$$V \cong V_1 \oplus V_2 \oplus (N \oplus N^*)$$

mit $N = W \cap W^\perp$, $V_1 \cong W/N$ und $V_2 \cong W^\perp/N$. Genauer gilt $V = V_1 \oplus V_2 \oplus N \oplus V_3$ für einen Unterraum V_3 und der Isomorphismus ist gegeben durch

$$(v_1, v_2, n, v_3) \mapsto (v_1, v_2, (n, -\omega(v_3, \cdot))).$$

Damit identifizieren wir V_3 mit N^* durch $v_3 \mapsto -\omega(v_3, \cdot)$ (Übung).

Satz 2.8 (Lineares Darboux Theorem). *Sei (V, ω) ein beliebiger symplektischer Vektorraum. Dann gibt es eine Basis $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ von V , bezüglich der ω die Standardform von ω_0 besitzt. Es gilt also für alle i, j :*

$$\omega(e_i, e_j) = 0, \quad \omega(f_i, f_j) = 0, \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}.$$

Für einen Unterraum $W \subseteq V$ kann die Basis so gewählt werden, dass

$$W = \text{span}(e_1, \dots, e_{k+l}, f_1, \dots, f_k)$$

gilt. Damit ist dann $W^\perp = \text{span}(e_{k+1}, \dots, e_n, f_{k+l+1}, \dots, f_n)$ und $N = W \cap W^\perp = \text{span}(e_{k+1}, \dots, e_{k+l})$.

Insbesondere ist also bis auf Isomorphie jeder symplektische Vektorraum von der Form $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Mit diesem Resultat kann man leicht nachrechnen, dass nach Satz 2.7 gilt: $N \oplus V_3 \cong N \oplus N^*$ und sogar allgemeiner: Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und L ein Lagrangescher Unterraum. Dann gibt es einen Isomorphismus $f: L \oplus L^* \rightarrow V$, so dass $\omega_0(v, w) = \omega(f(v), f(w))$, wobei ω_0 die symplektische Form auf $L \oplus L^*$ aus Beispiel 2.2 c) ist.

Satz 2.9. *Sei $W \subseteq (V, \omega)$ ein koisotroper $L \subseteq (V, \omega)$ ein Lagrangescher Unterraum. Dann ist auch $L' = (L \cap W + W^\perp)/W^\perp$ ein Lagrangescher Unterraum in $(V', \omega') = (W/W^\perp, \omega')$, wobei ω' wie in Satz 2.7.*

Der Vektorraum (V', ω') heißt auch **lineare symplektische Reduktion entlang W** . Die lineare symplektische Reduktion erhält also symplektische Eigenschaften von Unterräumen, insbesondere erhält sie Lagrangesche Unterräume.

2.2. Symplektische lineare Abbildungen.

Definition 2.10. Eine lineare Abbildung $f: V \rightarrow U$ zwischen symplektischen Vektorräumen (V, ω_V) und (U, ω_U) heißt **symplektisch**, wenn gilt $f^*\omega_U = \omega_V$. Dabei ist $f^*\omega_U$ die Bilinearform auf V , die durch

$$(f^*\omega_U)(v, w) = \omega_U(f(v), f(w))$$

gegeben ist. $f^*\omega_U$ heißt dann der **Pullback von ω_U** .

Eine bijektive symplektische lineare Abbildung heißt auch **linearer Symplektomorphismus**.

Die Menge solcher Abbildungen bildet eine Gruppe, die wir uns später genauer ansehen werden. Als erste Eigenschaft erwähnen wir hier, dass direkt aus der Definition folgt, dass symplektische Abbildungen injektiv sind.

Beispiel 2.11. Betrachte den Standardraum $(V, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \langle \cdot, J \cdot \rangle)$. Dann ist eine lineare Abbildung mit Matrix A genau dann symplektisch, wenn $A^T J A = J$ gilt. (Übung) In diesem Fall nennen wir A eine **symplektische Matrix**. Wegen $J^T = -J$ ist dann auch A^T symplektisch.

Wir betrachten nun, wie sich symplektische Abbildungen und Lagrangesche Unterräume zueinander verhalten:

- Bemerkung 2.12.* (a) Sei $f: (V_0, \omega_0) \rightarrow (V_1, \omega_1)$ ein symplektischer Isomorphismus und $L_0 \subset V_0$ Lagrangesch. Dann ist auch $L_1 = f(L_0) \subset V_1$ Lagrangesch.
 (b) Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und die Abbildung $f: V \rightarrow V$ symplektisch. Der Graph $gr(f) = \{(v, f(v)) | v \in V\}$ ist dann Lagrangesch im Produktraum $(V \times V, \omega \oplus -\omega)$. (Übung)

Für das nächste größere Resultat brauchen wir noch einige Aussagen über die Eigenwerte von linearen symplektischen Abbildungen.

Satz 2.13. Sei $f(z) = Az$ eine lineare symplektische Abbildung $f: V \rightarrow V$ und sei λ ein (komplexer) Eigenwert von A . Dann sind auch $\bar{\lambda}$, $1/\lambda$ und $1/\bar{\lambda}$ Eigenwerte von A . Außerdem gilt: die Eigenräume zu zwei verschiedenen Eigenwerten λ und μ von A sind ω -orthogonal, wenn nicht $\lambda\mu = 1$ gilt (Übung).

Insbesondere sieht man daran, dass symplektische Abbildungen Determinante 1 haben und damit volumenerhaltend sind. In Dimension 2 haben wir schon gesehen, dass es nur die (skalierte) Volumenform als symplektische Struktur gibt. Hier ist also symplektisch das gleiche wie Volumenerhaltung. In höheren Dimensionen gilt dies nicht, wie der folgende Satz zeigt.

Zunächst führen wir aber die Notation dazu ein. Dazu sortieren wir die symplektische Standardbasis im \mathbb{R}^{2n} um und spalten \mathbb{R}^{2n} in 2-dimensionale symplektische Unterräume. Wir betrachten also die Basis $x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$. Insbesondere ist damit der von den ersten beiden Basisvektoren erzeugte Unterraum symplektisch, da $\omega(x_1, y_1) = 1$.

Mit $B^n(r)$ bezeichnen wir den offenen Ball mit Radius r um den Ursprung in \mathbb{R}^n . Außerdem sei $Z^n(R) = B^2(R) \times \mathbb{R}^{n-2}$ der Zylinder mit Radius R in \mathbb{R}^n . Wenn der umgebende Vektorraum klar ist, schreiben wir auch einfach $B(r)$ und $Z(R)$.

Satz 2.14 (Affines non-squeezing Theorem). Sei $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ eine **affine symplektische Abbildung**, das heißt $f(v) = Av + w$ und $A^T J A = J$ mit $f(B(r)) \subset Z(R)$. Dann ist $R \geq r$.

Volumenerhaltende Abbildungen unterliegen keinen solchen Einschränkungen, denn der Zylinder hat unendliches Volumen, der Ball dagegen endliches Volumen. Durch Streckung in einer Richtung und Stauchung in einer anderen Richtung kann man das Volumen erhalten und trotzdem einen Balles in einen beliebig schmalen Zylinder abbilden.

Bemerkung 2.15. Das non-squeezing Theorem gilt sogar ohne die Einschränkung auf affine Abbildungen. Für die allgemeine Formulierung fehlen uns aber noch einige Definitionen.

2.3. Die Gruppe $Sp(2n)$. In diesem Abschnitt arbeiten wir nur mit dem Vektorraum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, wobei wie oben $\omega_0(\cdot, \cdot) = \langle \cdot, J_0 \cdot \rangle$ mit $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Definition 2.16. Wir bezeichnen die Menge der linearen symplektischen Abbildungen $f: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ mit $Sp(2n)$. Ebenso bezeichnen wir die Menge der symplektischen Matrizen mit $Sp(2n)$.

Satz 2.17. $Sp(2n)$ ist eine Gruppe, die unter Transposition abgeschlossen ist. Insbesondere ist $Sp(2n)$ eine Untergruppe von $SL(2n, \mathbb{R})$.

Lemma 2.18. Wenn wir wie üblich \mathbb{R}^{2n} mit \mathbb{C}^n identifizieren und J mit der Multiplikation mit i , dann gilt:

$$Sp(2n) \cap O(2n) = Sp(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = O(2n) \cap GL(n, \mathbb{C}) = U(n)$$

Lemma 2.19. Sei P eine symmetrische, positiv definite, symplektische Matrix. Dann ist $P^\alpha \in Sp(2n)$ für alle reellen Zahlen $\alpha > 0$.

Satz 2.20. *Die unitäre Gruppe $U(n)$ ist ein Deformationsretrakt der symplektischen Gruppe $Sp(2n)$.*

Insbesondere ist damit der Quotient $Sp(2n)/U(n)$ zusammenziehbar. Man kann auch zeigen, dass $U(n)$ eine maximale kompakte Untergruppe von $Sp(2n)$ ist, also dass jede andere kompakte Untergruppe von $Sp(2n)$ konjugiert zu einer Untergruppe von $U(n)$ ist.

2.4. Kompatible Strukturen. Wir haben oben gesehen, dass es einen Zusammenhang zwischen komplexer Geometrie und symplektischer Geometrie gibt. Insbesondere ist jeder komplexe Vektorraum auch symplektisch, denn $z = x + iy$ induziert eine Identifikation von \mathbb{C}^n mit \mathbb{R}^{2n} und das Standardskalarprodukt liefert mit $\omega(v, w) = \langle v, iw \rangle$ eine symplektische Form.

Diese Identifikation kann man auch in die andere Richtung vornehmen.

Definition 2.21. Sei V ein Vektorraum.

- (a) Eine lineare Abbildung $J: V \rightarrow V$ heißt **komplexe Struktur**, wenn $J^2 = -I$ gilt.
- (b) Wenn V symplektisch ist mit symplektischer Form ω und einer komplexen Struktur J , dann heißen **verträglich**, wenn $\langle v, w \rangle := \omega(v, Jw)$ ein Skalarprodukt auf V definiert.
- (c) Die Menge der mit ω verträglichen komplexen Strukturen bezeichnen wir mit $\mathcal{J}(\omega)$.

Bemerkung 2.22. Mit einer symplektischen Basis und J_0 können wir zu jeder symplektischen Form eine verträgliche komplexe Struktur finden.

Satz 2.23. *Die Menge der kompatiblen Strukturen entspricht gerade dem Quotienten $Sp(2n)/U(n)$ und ist damit zusammenziehbar.*

Insgesamt haben wir also gesehen, dass jeder symplektische Vektorraum auch ein komplexer Vektorraum ist und die komplexe Struktur so gewählt werden kann, dass ω und J ein Skalarprodukt induzieren. Bis auf Homotopie ist diese Wahl sogar eindeutig.

3. SCHNELLKURS DIFFERENTIALFORMEN

In diesem Kapitel legen wir die Grundlagen dafür, symplektische Strukturen auch auf Mannigfaltigkeiten definieren zu können. Dazu wiederholen wir zunächst Begriffe aus der Linearen Algebra und der Differentialgeometrie. Wir werden hier nicht viel beweisen, eine Quellen für die Beweise ist zum Beispiel [Lee].

In diesem Kapitel und im Rest der Vorlesung sei eine Mannigfaltigkeit immer glatt, d.h., es gibt einen Atlas aus Diffeomorphismen mit glatten Kartenwechseln.

3.1. Grundlagen. Die einfachsten Differentialformen sind bereits bekannt, es sind die Elemente des Dualraums eines Vektorraums, die auch Linearformen oder 1-Formen genannt werden.

Analoge Konstruktionen kennen wir auch auf Mannigfaltigkeiten aus der Differentialgeometrie: Ist M eine Mannigfaltigkeit, so bezeichnen wir mit TM das Tangentialbündel und mit T^*M das Kotangentialbündel. Genauer ist T_x^*M der Kotangentialraum an M am Punkt $x \in M$, also der Dualraum des entsprechenden Tangentialraumes T_xM .

Beispiele für 1-Formen auf Mannigfaltigkeiten sind dann Schnitte im Kotangentialbündel, z.B. das Differential df einer Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.

Genauso kennen wir Multilinearformen aus der Differentialgeometrie in Form einer Riemannschen Metrik. Analog zur linearen Algebra interessieren wir uns hier aber für schiefsymmetrische Formen.

Definition 3.1. (a) Eine k -**Form** auf einem Vektorraum V ist eine alternierende k -Multilinearform. Der Vektorraum der k -Formen wird dann mit $\Lambda^k(V)$ bezeichnet.
 (b) Wir definieren auch den Raum der alternierenden Multilinearformen $\Lambda(V) = \bigoplus \Lambda^k(V)$.

Als Beispiele kennen wir bisher den Dualraum der 1-Formen, die Determinante und die symplektischen Formen.

Für eine Basis x_1, \dots, x_m von V sei dx_1, \dots, dx_m die duale Basis von V^* . Damit erhalten wir eine Basis von $\Lambda^k(V)$ durch

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(v_1) & dx_{i_1}(v_2) & \dots & dx_{i_1}(v_k) \\ dx_{i_2}(v_1) & dx_{i_2}(v_2) & \dots & dx_{i_2}(v_k) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ dx_{i_k}(v_1) & dx_{i_k}(v_2) & \dots & dx_{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$$

für alle $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$. Eine andere Reihenfolge der dx_{i_k} bewirkt höchstens ein Vorzeichen, ergibt also kein neues Basiselement.

Der Raum $\Lambda(V)$ ist sogar eine Algebra mit dem **äußeren Produkt** einer k -Form α und einer l -Form β , das gegeben ist durch

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \text{sign}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

Dieses Produkt heißt auch **Wedgeprodukt** und ist assoziativ und graduiert kommutativ. Es gilt also

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{\deg \alpha \deg \beta} \beta \wedge \alpha.$$

Jetzt können wir auch Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten definieren.

Definition 3.2. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine k -**Differentialform auf M** oder auch k -**Form** ist eine glatte Familie $\alpha_x \in \lambda^k(T_x M)$. Mit anderen Worten, α ist ein Schnitt in $\lambda^k(TM)$. Der Raum dieser Schnitte wird mit $\Omega^k(M)$ bezeichnet.

Analog zum Vektorraum ist dann $\Omega(M) = \bigoplus \Omega^k(M)$ die Algebra der Differentialformen auf M .

Wir kennen bereits einfache Beispiele.

- Beispiel 3.3.*
- (a) 0-Formen auf einer Mannigfaltigkeit M sind gerade die reellwertigen Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (b) 1-Formen auf M sind Schnitte im Kotangentenbündel, zum Beispiel das Differential einer reellwertigen Funktion.
 - (c) In lokalen Koordinaten kann man eine Differentialform mit Hilfe der oben angegebenen Basis hinschreiben. Eine k -Form α hat dann die Darstellung

$$\alpha = \sum_I f_I dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

wobei $I = (i_1, \dots, i_k)$ ein Multiindex ist und $f_I: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Als nächstens beschäftigen wir uns damit, wie Abbildungen und Differentialformen zusammenpassen. Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, dass für eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ zwischen Mannigfaltigkeiten das Differential eine lineare Abbildung $df_x: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ definiert.

Für Differentialformen geht das in die andere Richtung.

Definition 3.4. Sei $f: M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten M und N und sei $\alpha \in \Omega(N)$ eine k -Form. Dann ist der **Pullback von α** eine k -Form $f^* \alpha \in \Omega(M)$ und es gilt

$$(f^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_k) = \alpha_{f(x)}(df(v_1), \dots, df(v_k)).$$

Der Pullback als Abbildung $f^*: \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ ist linear und verträglich mit dem äußeren Produkt. Wenn die Form α von maximalem Grad ist, dann ist f^* die Multiplikation mit der Determinante von df (Übung).

Mit Hilfe des Pullbacks können wir ein Beispiel einer 1-Form angeben, die nicht das Differential einer Funktion ist.

Beispiel 3.5. Sei $M = T^*B$ das Kotangentenbündel einer Mannigfaltigkeit B mit Projektion $\pi: M \rightarrow B$. Wir bezeichnen die Koordinaten mit $(q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, wobei q Koordinaten auf B sind und p die zugehörigen Koordinaten in der Faser. Dann betrachten wir die **kanonische 1-Form** λ auf M , die gegeben ist durch

$$\lambda_{(q,p)} := \pi^* p$$

Diese Form heißt auch **tautologische 1-Form**. Dass diese Form kein Differential ist, sehen wir zum Beispiel mit Hilfe der äußeren Ableitung im nächsten Abschnitt.

In lokalen Koordinaten gilt: $\lambda = p dq$. Hier benutzen wir eine übliche Kurzschreibweise: $p dq = \sum_i p_i dq_i$ ist die Summe über die einander entsprechenden Komponenten von p und q .

3.2. Äußere Ableitung. Genau wie Funktionen kann man auch Differentialformen positiven Grades ableiten.

Definition 3.6. Die **äußere Ableitung** d ist eine Folge von \mathbb{R} -linearen Abbildungen $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$. In lokalen Koordinaten ist die Ableitung gegeben durch

$$d(f dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

und den üblichen Regeln wie Additivität.

Wir benutzen hier d sowohl für die äußere Ableitung von Formen als auch für das Differential von Abbildungen.

Beispiel 3.7. Für eine 0-Form f und ein Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M gilt

$$X(f) = df(X).$$

In diesem Fall ist das äußere Differential also gerade das bekannte Differential von reellwertigen Funktionen.

Satz 3.8. (a) *Es gilt $d^2 = 0$, wobei $d^2 = d \circ d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+2}(M)$.*

(b) *d ist nicht C^∞ -linear. Genauer gilt für Produkte von Differentialformen $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$:*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

(c) *Die äußere Ableitung ist mit dem Pullback verträglich, es gilt $f^*d\alpha = d(f^*\alpha)$.*

Auf Mannigfaltigkeiten ist die äußere Ableitung wie jede Ableitung ein lokaler Operator, um $d\alpha_x$ zu berechnen genügt es, α in einer kleinen Umgebung von x zu kennen. Die obige Definition in lokalen Koordinaten definiert also die Ableitung auch auf Mannigfaltigkeiten.

Definition 3.9. Eine Differentialform $\alpha \in \Omega^k(M)$ heißt **geschlossen**, wenn $d\alpha = 0$. Sie heißt **exakt**, wenn $\alpha = d\beta$ für eine $k-1$ -Form β .

Insbesondere ist nach obigem Satz jede exakte Differentialform geschlossen.

Satz 3.10 (Poincarélemma). *Auf \mathbb{R}^n ist jede geschlossene Differentialform auch exakt, insbesondere ist also lokal jede geschlossene Differentialform exakt.*

Zum Beweis siehe [Zehnder, Theorem V.15] (konstruktiv mit Lie-Ableitung) oder [Lee, Theorem 15.14] (homologisch).

Beispiel 3.11. Allgemein gilt das Poincarélemma nicht, denn auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist die 1-Form

$$\alpha = \frac{1}{x^2 + y^2} (x dy - y dx)$$

geschlossen, aber nicht exakt (Übung).

Ob eine geschlossene Differentialform exakt ist, hängt also auch davon ab, auf welchem Teil der maximalen Definitionsmenge man sie betrachtet. Dies legt nahe, dass man aus dem Quotienten

$$H_{dR}^k(M) = (\text{geschlossene } k\text{-Formen}) / (\text{exakte } k\text{-Formen})$$

globale Eigenschaften von M herauslesen kann.

Definition 3.12. Die Räume $H_{dR}^k(M)$ sind isomorph zu den Kohomologiegruppen von M mit reellen Koeffizienten.

Diese Kohomologiegruppen sind Objekte der algebraischen Topologie und beschreiben topologische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit, vgl. [BottTu, Lee].

3.3. Differentialformen und Integration. Als letztes müssen wir noch diskutieren, wie man Differentialformen integriert.

Hierbei legt schon die Notation im \mathbb{R}^n oben nahe, dass das eigentlich das bekannte Lebesgue-Integral von n -Formen über Teilmengen des \mathbb{R}^n ist. Hierbei ist für $U \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und $\alpha = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ das Integral beschrieben durch:

$$\int_U \alpha = \int_U f dx_1 \dots dx_n$$

Vorsicht: Da das wedge-Produkt nicht kommutativ ist, kommt es hier auf die Reihenfolge der Integration an. Genauer legen wir eine Orientierung von \mathbb{R}^n fest durch die Wahl der Reihenfolge in $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.

Das Integral hat alle bekannten Eigenschaften, die Transformationsformel erhält für einen Diffeomorphismus $\varphi: U \rightarrow V$ die Form

$$\int_V \alpha = \int_U \varphi^* \alpha.$$

Auf Mannigfaltigkeiten definieren wir die Integration mit Hilfe von Karten. Wieder können wir n -Formen über n -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten integrieren. Wenn der Träger von α in einer offenen Menge U mit Karte $\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ enthalten ist, dann gilt

$$\int_U \alpha = \int_V (\varphi^{-1})^* \alpha.$$

Im allgemeinen Fall wählen wir für einen Atlas von M eine zugehörige Partition der 1, also reellwertige Funktionen $f_i: U_i \rightarrow [0, 1]$, so dass $\sum_i f_i = 1$ gilt. Damit können wir dann die Integration über M definieren als

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_{U_i} f_i \alpha.$$

Allgemeiner können wir so natürlich auch k -Formen auf n -dimensionalen Mannigfaltigkeiten über k -dimensionale Untermannigfaltigkeiten integrieren. Wenn wir die Homologieklassen von M mit Untermannigfaltigkeiten identifizieren, dann liefert das Integral $\alpha \mapsto \int_N \alpha$ ein Element des Dualraums der Homologie. Der Satz von deRham sagt dann, dass die deRham Kohomologie isomorph zur singulären Kohomologie von M ist.

In dieser Sprache erhalten die bekannten Integralsätze (z.B. der Satz von Gauß) eine neue und sehr einfache Formulierung:

Satz 3.13 (Satz von Stokes). *Sei M eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand ($\partial M = \emptyset$ ist erlaubt) und α eine $n - 1$ -Form auf M . Dann gilt:*

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha,$$

wobei auf der rechten Seite die Einschränkung von α auf den Rand gemeint ist.

Beispiel 3.14. Für Teilmengen von \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3 sind dies die bekannten Integralsätze. Wir sehen in den Übungen, wie die äußere Ableitung hier mit den Differentialoperatoren *div* und *rot* in den klassischen Integralsätzen zusammenhängen.

Definition 3.15. Eine n -Form α auf einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit heißt **Volumenform** oder auch **Orientierungsform**, wenn für alle $x \in M$ gilt $\alpha_x \neq 0$.

In lokalen Koordinaten kann man eine Form des höchsten Grades in der obigen Basis schreiben als $\alpha = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$. Dann ist α genau dann eine Volumenform, wenn f keine Nullstellen hat. Eine Volumenform legt also durch das Vorzeichen des Integrals eine Orientierung fest.

Bemerkung 3.16. Insbesondere folgt direkt aus dem Satz von Stokes, dass Volumenformen auf geschlossenen, orientierbaren Mannigfaltigkeiten niemals exakt sein können. (Übung)

3.4. Differentialformen und Vektorfelder. Als letztes schauen wir uns noch den Zusammenhang zwischen Differentialformen und Vektorfeldern an.

Zunächst haben wir gesehen, dass eine Differentialform auf M an jedem Punkt $x \in M$ eine Multilinearform auf $T_x M$ ist. Wir können also Vektorfelder in Differentialformen einsetzen.

Definition 3.17. Das **innere Produkt** einer k -Form α und eines Vektorfeldes X ist die $k - 1$ -Form

$$i_X \alpha(V_1, \dots, V_{k-1}) := \alpha(X, V_1, \dots, V_{k-1}),$$

wir setzen also X in die erste Komponente ein.

Für das Weitere brauchen wir noch etwas Notation: Sei X_t ein (zeitabhängiges) Vektorfeld auf M , dann bezeichne $\varphi_X^t: M \rightarrow M$ die Zeit- t -Abbildung oder den Zeit- t -Fluss von X . Es gilt dann also

$$\frac{d}{dt} \varphi_X^t(x)|_{t=s} = X_s(\varphi_X^s(x)).$$

Damit können wir nun die Definition der Lie-Ableitung auch auf Differentialformen übertragen. Zur Erinnerung: Die Lie-Ableitung ist so etwas wie eine Richtungsableitung auf Mannigfaltigkeiten in Richtung eines Vektorfeldes. Zum Beispiel ist für Funktionen

$$L_X f = Xf = df(X)$$

und für Vektorfelder

$$L_X Y = [X, Y] = XY - YX,$$

die Lie-Klammer der beiden Vektorfelder aus der Differentialgeometrie.

Definition 3.18. Die **Lie-Ableitung** einer Differentialform α in Richtung eines Vektorfeldes X ist definiert als

$$L_X\alpha := \frac{d}{dt}(\varphi_X^t)^*\alpha|_{t=0}$$

Es gibt allerdings eine Formel für die Lie-Ableitung, mit der man etwas handlicher rechnen kann als mit der Definition.

Satz 3.19 (Formel von Cartan). *Sei M eine Mannigfaltigkeit, α eine Differentialform auf und X ein Vektorfeld auf M . Dann gilt*

$$L_X\alpha = i_X d\alpha + di_X\alpha.$$

4. SYMPLEKTISCHE MANNIGFALTIGKEITEN UND ABBILDUNGEN

In diesem Kapitel kommen wir zu allgemeiner symplektischer Geometrie, nachdem wir den linearen Fall bereits untersucht haben.

4.1. Definition und Eigenschaften. Jetzt können wir definieren, was eine symplektische Form auf einer Mannigfaltigkeit sein soll.

Definition 4.1. Eine **symplektische Form** auf einer Mannigfaltigkeit ist eine geschlossene, nicht-entartete 2-Form, also eine 2-Form ω , für die gilt: $d\omega = 0$ und an jedem Punkt $p \in M$ ist ω_p nicht-ausgeartet. Eine **symplektische Mannigfaltigkeit** ist ein Paar (M, ω) aus einer glatten Mannigfaltigkeit M und einer symplektischen Form ω .

Wie bei Vektorräumen folgt auch hier aus der Nicht-Entartung sofort, dass die Dimension von M gerade sein muss.

Bemerkung 4.2. Man rechnet im linearen Fall leicht nach, dass die Nicht-Entartung einer symplektischen Form ω auf \mathbb{R}^{2n} äquivalent dazu ist, dass die Form $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$ nicht verschwindet. Da das Produkt punktweise definiert ist, folgt also, dass eine geschlossene 2-Form ω auf einer Mannigfaltigkeit genau dann symplektisch ist, wenn das Produkt ω^n eine Volumenform ist.

Beispiel 4.3. (a) Die 2-Form $\omega_0 := dx \wedge dy = \sum dx_i \wedge dy_i$ auf \mathbb{R}^{2n} ist gerade die symplektische Form ω_0 aus Kapitel 2.

(b) Auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ definieren wir eine 2-Form punktweise im Punkt p durch

$$\omega_p(v, w) = \langle p, v \times w \rangle,$$

wobei \times das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3 ist. (Übung)

(c) Jede Volumenform auf einer orientierbaren Fläche ist eine symplektische Form.

Analog zum linearen Fall definieren wir auch hier symplektische Abbildungen.

Definition 4.4. Seien (M, ω_M) und (N, ω_N) symplektische Mannigfaltigkeiten. Dann heißt eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ **symplektisch**, wenn $f^*\omega_N = \omega_M$ gilt. Ist f zusätzlich ein Diffeomorphismus, so heißt f auch ein **Symplektomorphismus** und (M, ω_M) und (N, ω_N) heißen **symplektomorph**.

Alternativ kann man nun symplektische Mannigfaltigkeiten auch über Karten definieren:

Definition 4.5. Eine symplektische Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit M , für die es einen **symplektischen Atlas** $\varphi_i: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ gibt, bei dem alle Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ symplektisch bezüglich ω_0 sind.

Beachte: Der Kartenwechsel $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ ist ein Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen in \mathbb{R}^{2n} , auf denen jeweils die Standardform ω_0 definiert ist.

Diese Definition liefert durch $\varphi_i^*\omega_0$ direkt eine symplektische Form auf M . Umgekehrt hat jede symplektische Mannigfaltigkeit auch einen symplektischen Atlas. Dies ist der

Satz von Darboux, den wir später zeigen werden. Damit sind die beiden Definitionen dann äquivalent.

Zunächst betrachten wir noch einige weitere Beispiele:

Beispiel 4.6. Sei $M = T^*B$ ein Kotangentialbündel.

- (a) Die kanonische 1-Form λ aus Beispiel 3.5 definiert eine symplektische Form via $\omega = d\lambda$. In lokalen Koordinaten ist

$$\omega_0 = d\lambda = dp \wedge dq$$

und dies ist offensichtlich symplektisch.

- (b) Allgemeiner betrachtet man auf M auch sogenannte **magnetische** Formen. Dafür sei β eine geschlossene 2-Form auf B . Dann definieren wir symplektische Formen $\omega_\beta := \omega_0 + \pi^*\beta$ (Übung). Diese Formen heißen magnetisch, weil sich mit β ein magnetisches Feld auf B beschreiben lässt. Später werden wir sehen, dass man mit Hilfe dieser Formen die Bewegung eines geladenen Teilchens in diesem magnetischen Feld beschreiben kann.

Es gibt auch einfache Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit gerader Dimension, die nicht symplektisch sind. Im Allgemeinen ist das aber eine schwierige Frage, genauso wie die Frage nach der Zahl der echt verschiedenen symplektischen Formen.

Beispiel 4.7. Die Sphäre S^{2n} besitzt genau dann eine symplektische Struktur, wenn $n = 1$ gilt.

Zum Beweis muss man die Kohomologie der Sphären kennen, die nur in den Graden 0 und dem höchsten Grad ungleich 0 ist. Als deRham-Kohomologie erhalten wir \mathbb{R} in Grad 0 und Grad $2n$ ist und in allen anderen Graden 0.

Allgemeiner kann eine geschlossene Mannigfaltigkeit nur dann symplektisch sein, wenn die symplektische Form ω nicht exakt sein muss, also wenn es nicht verschwindende Kohomologie in Grad 2 gibt. Bei den Sphären ist das nur für $S^2 = \mathbb{C}P^1$ der Fall. Insbesondere ist die Kohomologiekategorie der symplektischen Form nie 0.

Jetzt können wir die allgemeine Form von Satz 2.14 formulieren, den wir im linearen (affinen) Fall bereits bewiesen haben.

Satz 4.8. *Wenn es eine symplektische Abbildung gibt, die $B(r)$ in $Z(R)$ abbildet, dann gilt $r \leq R$. Hierbei sind $B(r)$ und $Z(R)$ der Ball und der Zylinder in \mathbb{R}^{2n} wie in Kapitel 2.*

Der Beweis dieses Satzes würde für diese Vorlesung zu weit führen, dafür benötigt man zum Beispiel symplektische Kapazitäten, s. [McDS].

Bemerkung 4.9. Da jede symplektische Form eine Volumenform definiert, ist offenbar auch jede symplektische Abbildung volumenerhaltend. Das Non-Squeezing Theorem zeigt aber, dass symplektisch stärker ist als reine Volumenerhaltung, denn da $B(r)$ endliches und $Z(R)$ unendliches Volumen haben, ist eine solche Einbettung volumenerhaltend immer möglich.

Wir haben jetzt also verschiedene Gruppen von Abbildungen, die wir auf symplektischen Mannigfaltigkeiten anschauen können,

- die Diffeomorphismengruppe $\text{Diff}(M)$,
- die symplektischen Diffeomorphismen $\text{Symp}(M, \omega)$, die auch die Volumenform ω^n erhalten.

Dabei gilt $\text{Symp}(M, \omega) \subset \text{Diff}(M)$. Später werden wir dazu noch jeweils die Zusammenhangskomponente der Identität, also $\text{Diff}_0(M)$ und $\text{Symp}_0(M, \omega)$ und die Gruppe der Hamiltonschen Diffeomorphismen anschauen. Im Allgemeinen sind die Inklusionen $\text{Symp}(M, \omega) \subset \text{Diff}(M)$ und $\text{Symp}_0(M, \omega) \subset \text{Diff}_0(M)$ echte Inklusionen. Ein Beispiel für einen Diffeomorphismus, der nicht symplektisch ist, liefert zum Beispiel eine Skalierung $\varphi = \lambda \text{id}$ auf \mathbb{R}^{2n} .

4.2. Fast komplexe Strukturen. Analog zum linearen Fall untersuchen wir auch allgemein den Zusammenhang zwischen komplexer und symplektischer Geometrie.

Im Gegensatz zum linearen Fall ist symplektisch auf Mannigfaltigkeiten echt schwächer als komplex.

Definition 4.10. (a) Eine **fast komplexe Struktur** auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Familie J_x von komplexen Strukturen auf den Fasern des Tangentialbündels. Eine fast komplexe Struktur heißt **komplex**, wenn es einen Atlas gibt, der J auf J_0 abbildet, in diesem Fall nennen wir J auch **integrabel**.

(b) Eine fast komplexe Struktur J auf einer symplektischen Mannigfaltigkeit heißt **verträglich**, wenn $g_J(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ eine Riemannsche Metrik ist.

Diese Definition entspricht genau der Definition von Verträglichkeit im linearen Fall, wie auch eine Riemannsche Metrik in jedem Tangentialraum ein Skalarprodukt ist.

Genauer sprechen wir auch von einem **verträglichen Tripel** (ω, J, g) , wenn $g = g_J$ gilt.

Beispiel 4.11. Gesehen haben wir dies schon ganz am Anfang, als wir den Zusammenhang zwischen der Hamiltonschen Gleichung und dem Gradienten betrachtet haben. Auf \mathbb{R}^{2n} ist $(\omega_0 = dy \wedge dx, J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ die übliche Struktur eines verträglichen Tripels.

Bemerkung 4.12. Jede symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) hat eine verträgliche fast komplexe Struktur. Wenn wir zusätzlich eine Riemannsche Metrik J zugrunde legen, gibt es sogar eine kanonische verträgliche fast komplexe Struktur J , die durch die Polarzerlegung gegeben ist. Es gilt allerdings nicht unbedingt, dass $g = g_J$. Außerdem gilt wieder, dass die Menge der kompatiblen komplexen Strukturen zusammenziehbar ist. Denn dies gilt in jedem Tangentialraum nach der linearen Theorie. Bis auf Homotopie ist also auch hier die Wahl von J eindeutig.

Bei einer komplexen Struktur sind also die Kartenwechsel nicht nur symplektisch, sondern sogar holomorph, wenn man wie üblich \mathbb{R}^{2n} mit \mathbb{C}^n identifiziert.

Es gibt auch eine lokal nachprüfbare Integrabilitätsbedingung, nämlich das Verschwinden des **Nijenhuisensors**

$$\mathcal{N}(X, Y) := [JX, JY] - J[X, JY] - J[JX, Y] - [X, Y]$$

für alle Vektorfelder X, Y auf M , wobei $[\cdot, \cdot]$ die Lie-Klammer ist.

In diesem Fall heißt (M, ω, J) eine **Kähler Mannigfaltigkeit** und ω heißt dann auch **Kählerform**. Es gibt viele Beispiele von symplektischen Mannigfaltigkeiten, die nicht Kähler sind. Diese Beispiele beruhen aber alle auf schwierigen Konstruktionen, weswegen wir hier darauf verzichten, ein Beispiel zu nennen und geben stattdessen zwei Beispiele für Kählermannigfaltigkeiten an.

Beispiel 4.13. Komplexe Mannigfaltigkeiten sind insbesondere Kähler. Allgemeiner induzieren bestimmte komplexe Gruppenwirkungen von diskreten Gruppen auf komplexen Mannigfaltigkeiten eine Kählerstruktur auf dem Quotienten. So erhält man zum Beispiel die Riemannschen Flächen, insbesondere sind komplexe Tori Kähler, also hat

$$T^{2n} = \mathbb{C}^n / (\mathbb{Z}^{2n} + i\mathbb{Z}^{2n})$$

eine komplexe Struktur, die von \mathbb{C}^n her kommt.

Ein weiteres Beispiel ist der komplex projektive Raum, für den wir zwei Konstruktionen einer komplexen Struktur angeben

Beispiel 4.14. (a) Einerseits kann man wie üblich komplexe Karten konstruieren. Die Überdeckung ist dabei gegeben durch Mengen der Form

$$\{[z_0 : \dots : z_n] \mid z_i \neq 0\}$$

in homogenen Koordinaten. So hat $\mathbb{C}P^n$ durch die Multiplikation mit i auf \mathbb{C}^n eine natürliche komplexe Struktur, da die Kartenwechsel holomorph sind.

(b) Eine weitere Konstruktion ist ein Spezialfall der **symplektischen Reduktion**, dies liefert die **Fubini-Study-Metrik** auf $\mathbb{C}P^n$. Dafür betrachten wir $\mathbb{C}P^n$ als Quotienten der Hopf-Faserung auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. An einem Punkt $z \in S^{2n+1}$ definieren wir die reelle Hyperebene

$$H_z := T_z S^{2n+1} \cap iT_z S^{2n+1}.$$

Diese Hyperebene im Tangentialraum ist orthogonal zur Faser der Hopf-Faserung $\pi: S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ und damit durch $d\pi$ isomorph zu $T_{[z]}\mathbb{C}P^n$. Da H_z auch unter der Multiplikation mit i invariant ist, induziert $d\pi$ eine komplexe Struktur J auf $\mathbb{C}P^n$. Die Einschränkung des Skalarproduktes von \mathbb{C}^{n+1} auf H_z induziert eine Riemannsche Metrik auf $\mathbb{C}P^n$, die mit J kompatibel ist und also auch eine symplektische Struktur auf $\mathbb{C}P^n$ induziert.

4.3. Satz von Darboux. Wir haben jetzt viel Struktur kennengelernt. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass symplektische Mannigfaltigkeiten lokal bis auf Symplektomorphismen durch die Dimension bestimmt sind. Verschiedene symplektische Mannigfaltigkeiten unterscheiden sich also nur durch die Dimension und globale Invarianten. Im Gegensatz zur Krümmung in der Riemannschen Geometrie gibt es hier also als lokale Invariante nur die Dimension.

Satz 4.15 (Satz von Darboux). *Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es eine Umgebung U von p , die symplektomorph zu einer Umgebung von $0 \in (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir die **Mosersche Deformationsmethode** und einiges an Vorarbeit.

Die Idee der Moserschen Deformationsmethode ist es, statt eines Diffeomorphismus eine Homotopie und dann statt der Homotopie ein Vektorfeld zu suchen, das die Homotopie erzeugt. Insgesamt finden wir also ein Vektorfeld, dessen Zeit-1-Fluss der gesuchte Diffeomorphismus ist.

Damit finden wir etwas viel stärkeres als schlicht einen Diffeomorphismus mit den gesuchten Eigenschaften, aber es stellt sich heraus, dass dies eine effektive Methode ist.

Genauer heißt das: Gesucht ist ein Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$, der eine gegebene Differentialform α_1 auf eine andere gegebene Differentialform α_0 zurückzieht, also $\varphi^*\alpha_1 = \alpha_0$. Dann betrachten wir $\alpha_t := t\alpha_1 + (1-t)\alpha_0$ und suchen φ^t mit $(\varphi^t)^*\alpha_t = \alpha_0$ und suchen denn ein (zeitabhängiges) Vektorfeld X_t , dass den Fluss φ^t erzeugt.

Die Zeit-Ableitung der Gleichung $\alpha_0 = (\varphi^t)^*\alpha_t$ an der Stelle $t = 0$ liefert dann:

$$0 = (\varphi^t)^*(L_X\alpha_t + \alpha_0 - \alpha_1).$$

Mit Cartan haben wir also die Gleichung für X_t gegeben als

$$0 = \alpha_0 - \alpha_1 + di_X\alpha_t + i_Xd\alpha_t.$$

Wenn in den Voraussetzungen an α_0 und α_1 weitere Bedingungen gegeben sind, können wir diese Gleichung lösen und zeigen, dass der Fluss des Vektorfeldes X_t für die Zeit 1 existiert.

Mit dieser Methode lassen sich auch einige andere Sätze beweisen.

Satz 4.16 (Satz von Moser). *Sei M eine geschlossene (kompakt, ohne Rand) Mannigfaltigkeit mit zwei Volumenformen Ω_0 und Ω_1 . Dann gibt es genau dann einen Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ mit $\varphi^*\Omega_1 = \Omega_0$, wenn $\int_M \Omega_0 = \int_M \Omega_1$. Außerdem liegt dieses φ dann in der Zusammenhangskomponente von id in $\text{Diff}(M)$.*

Das Volumen ist also die einzige Invariante unter volumenerhaltenden Diffeomorphismen. Daraus folgt direkt:

Korollar 4.17. *Zwei geschlossene symplektische Mannigfaltigkeiten der Dimension 2 sind genau dann symplektomorph, wenn sie das gleiche Geschlecht und das gleiche Volumen haben.*

Der Satz von Moser hat auch eine lokale Version, wenn zwei symplektische Formen auf einer Untermannigfaltigkeit übereinstimmen.

Lemma 4.18 (Lokaler Satz von Moser). *Sei $W \subset M$ kompakt und ω_0 und ω_1 symplektische Formen mit $\omega_1|_W = \omega_0|_W$. Dann gibt es Umgebungen U_0 und U_1 von W und einen Diffeomorphismus $\varphi: U_0 \rightarrow U_1$ mit $\varphi^*\omega_1 = \omega_0$ und $\varphi|_W = id$.*

Allgemeiner kann man die deRham Kohomologie benutzen, um verschiedene symplektische Strukturen auf geschlossenen Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren. Da symplektische Formen geschlossen sind, haben sie eine wohldefinierte deRham Kohomologieklassen. Wir zeigen, dass sich zwei symplektische Formen in der selben Kohomologieklassen nicht wesentlich unterscheiden.

Satz 4.19 (Moserscher Stabilitätssatz). *Sei M geschlossene Mannigfaltigkeit und ω_t eine glatte Familie von symplektischen Formen in der selben Kohomologiekategorie. Dann gibt es eine glatte Familie von Diffeomorphismen φ^t , so dass $(\varphi^t)^*\omega_t = \omega_0$.*

Insbesondere sind also je zwei symplektische Formen in der selben Kohomologiekategorie symplektomorph. Denn es gilt $\omega_1 - \omega_0 = d\beta$ ist exakt. Damit ist dann $\omega_t = \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) = \omega_0 + d\beta$ auch in der selben Kohomologiekategorie und die Voraussetzungen des Satzes sind erfüllt.

4.4. Untermannigfaltigkeiten. Als nächstes beschäftigen wir uns noch mit Untermannigfaltigkeiten von symplektischen Mannigfaltigkeiten. Wie im linearen Fall unterscheiden wir auch hier verschiedene Typen abhängig von der symplektischen Form.

Definition 4.20. Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Eine Untermannigfaltigkeit N heißt **isotrop** / **koisotrop** / **Lagrangesch** oder **symplektisch**, wenn an jedem Punkt $p \in N$ der Unterraum $T_p N \subset T_p M$ ein entsprechender Unterraum ist.

Als Beispiel sieht man leicht, dass wie im linearen Fall alle eingebetteten Kurven isotrop und alle Hyperflächen Koisotrop sind.

Bemerkung 4.21. (a) Wie im linearen Fall gibt es auch hier wieder Dimensionsbeschränkungen für die verschiedenen Typen. Sei $\dim M = 2n$. Dann gilt:

- Wenn N isotrop ist, gilt $\dim N \leq n$.
- Wenn N koisotrop ist, gilt $\dim N \geq n$.
- Wenn N Lagrangesch ist, dann ist N sowohl isotrop als auch koisotrop und es gilt $\dim N = n$.
- Wenn N symplektisch ist, dann ist $\dim N$ gerade.

- (b) Sei $\iota: N \rightarrow M$ die Einbettung. Dann ist N genau dann symplektisch, wenn $\iota^*\omega$ eine symplektische Form auf N ist. Außerdem ist N isotrop genau dann, wenn $\iota^*\omega = 0$. Insbesondere ist N Lagrangesch genau dann, wenn N isotrop ist und $\dim N = n$.

Als nächstes schauen wir uns wieder Beispiele an, insbesondere Beispiele für Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten

Beispiel 4.22. (a) Sei $M = T^*B$ ein Kotangentenbündel und $N = B$ der Nullschnitt. Dann ist N Lagrangesch in M .

- (b) Wie im linearen Fall ist die Diagonale $\Delta = N \subset (M \times M, \omega \oplus -\omega)$ Lagrangesch für jede symplektische Mannigfaltigkeit (M, ω) .
- (c) Als Verallgemeinerung von a) betrachten wir eine beliebige 1-Form α auf B als Schnitt N im Kotangentenbündel $M = T^*B$. Dann ist N genau dann Lagrangesch, wenn α geschlossen ist (Übung). Insbesondere ist dies der Fall, wenn $\alpha = 0$ in a)
- (d) Wir verallgemeinern auch b), indem wir für einen Diffeomorphismus $f: M \rightarrow M$ den Graph $N = \text{gr}(f) \subset (M \times M, \omega \oplus -\omega)$ betrachten. Dann ist N genau dann Lagrangesch, wenn f ein Symplektomorphismus ist. Im Fall b) ist die Diagonale gerade der Graph der Identität, die offensichtlich symplektisch ist.

Fixpunkte von symplektischen Diffeomorphismen sind genau die Schnittpunkte des Graphen mit der Diagonalen. Nach dem Beispiel sind das also die Schnittpunkte von zwei Lagrangeschen Untermannigfaltigkeiten. Die Frage nach der minimalen Anzahl solcher Schnittpunkte ist einer der Fragen der symplektischen Geometrie und führt auf eine Version der Arnoldvermutung. Die genaue Beschäftigung damit führt zu Floertheorien, die aber für diese Vorlesung zu weit führen.

Das nächste Ziel dieser Vorlesung ist es, Normalformen von Untermannigfaltigkeiten zu finden. Mit dem lokalen Satz von Moser können wir für Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten eine Normalform konstruieren.

Satz 4.23 (Weinstein). *Sei $L \subset (M, \omega)$ Lagrangesch und kompakt. Dann gibt es Umgebungen $U = U(L) \subset M$ und $V = V(0) \subset T^*L$ und einen Diffeomorphismus $\varphi: V \rightarrow U$ mit $\varphi|_L = id$ und $\varphi^*\omega = d\lambda$, wobei λ die kanonische 1-Form auf T^*L ist und wir den Nullschnitt in T^*L mit L identifizieren.*

Beispiel 4.24. Sei $f: M \rightarrow M$ ein Symplektomorphismus, d.h. der Graph von f ist Lagrangesch. Auch die Diagonale ist Lagrangesch und diffeomorph zu M . Nach dem Satz von Weinstein ist eine Umgebung U der Diagonale also symplektomorph zu einer Umgebung des Nullschnittes in T^*M , also $\varphi: U \rightarrow T^*M$ ist ein Symplektomorphismus auf sein Bild.

Wenn f nun C^1 -nah an der Identität ist, dann ist der Graph von f wieder ein Graph über der Diagonalen und in U enthalten. Damit können wir dann f mit einer geschlossenen 1-Form identifizieren, indem wir $\varphi(gr(f))$ betrachten.

Damit haben wir gezeigt, dass eine C^1 -Umgebung der Identität in $\text{Symp}(M, \omega)$ mit einer Umgebung des Nullschnittes in T^*M identifiziert werden kann.

Im linearen Fall $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ kann man ϕ sogar explizit bestimmen. Wir wählen Koordinaten $(x, y, v, w) = ((x, y), (v, w)) \in \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ und $(X, Y, V, W) \in T^*\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$. Die symplektischen Strukturen unterscheiden sich jedoch. Auf $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ betrachten wir $\omega = dy \wedge dx - dw \wedge dv$ und auf $T^*\mathbb{R}^{2n}$ haben wir $dV \wedge dX + dW \wedge dY$. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi(x, y, v, w) = \left(\frac{x+v}{2}, \frac{y+w}{2}, y-w, v-x \right)$$

mit $\varphi: M \times M \rightarrow T^*M$ in einer Umgebung der Diagonalen für $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Die Diagonale wird dann auf den Nullschnitt abgebildet und wir haben einen lokalen Symplektomorphismus (Übung).

5. SYMPLEKTISCHE VEKTORFELDER

Da wir gesehen haben, dass die Tangentialräume an Untermannigfaltigkeiten spezielle Eigenschaften bestimmen, schauen wir uns nun Tangentialräume etwas genauer an und betrachten Vektorfelder auf symplektischen Mannigfaltigkeiten und ihre Dynamik im Zusammenhang mit der symplektischen Form.

5.1. Symplektische Vektorfelder. Zunächst schauen wir uns an, welche Vektorfelder mit der symplektischen Struktur verträglich sind.

Definition 5.1. Sei (M, ω) eine geschlossene symplektische Mannigfaltigkeit und X ein Vektorfeld auf M .

- (a) Dann heißt X **symplektisch**, wenn $i_X \omega$ eine geschlossene 1-Form ist.
- (b) Weiter heißt X **Hamiltonsch**, wenn $i_X \omega$ exakt ist. In diesem Fall heißt eine Funktion $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ **Hamiltonfunktion**, wenn $i_X \omega = -dH$ und der zugehörige Fluss von $X = X_H$ heißt der **Hamiltonsche Fluss** $\varphi_H^t = \varphi_{X_H}^t$. Die Flussgleichung heißt dann auch **Hamiltonsche Gleichung**.

Natürlich gilt wie bei jeder Integration, dass H durch X auf jeder Zusammenhangskomponente bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung 5.2. (a) Das Vorzeichen in der Definition von H ist dabei reine Konvention. Vorsicht: verschiedene Quellen verwenden hier verschiedene Konventionen, aber irgendwo taucht immer ein Minuszeichen auf, damit alles zusammenpasst.
 (b) Der Begriff der Hamiltonfunktion ist etwas irreführend, wenn natürlich ist jede glatte Funktion $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ auch eine Hamiltonfunktion, wenn man die Gleichung $i_{X_H} \omega = -dH$ zur Definition des Vektorfeldes X_H benutzt. Wir benutzen im Folgenden die Begriffe Funktion und Hamiltonfunktion synonym.

Beispiel 5.3. (a) Im Spezialfall $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ und $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ gilt

$$i_{X_H} \omega = \omega(X_H, \cdot) = \omega(JX_H, J\cdot) = \langle JX_H, \cdot \rangle = -dH.$$

Damit finden wir dann für X_H die explizite Form $X_H = J\nabla H$. In Koordinaten $z = (x, y)$ erhält die Hamiltonsche Gleichung $\dot{z} = X_H = J\nabla H$ dann die Form

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Dies ist gerade die Hamiltonsche Gleichung aus der Einleitung für klassische Mechanik.

- (b) Die gleiche Form erhält man auch auf Kotangentialbündeln $M = T^*B$ mit dem gleichen J in lokalen Koordinaten, wobei dann die Faserkoordinaten als Impuls aufgefasst werden kann. Dies ist das eigentliche Setting für klassische Mechanik. Die Hamiltonfunktionen haben dabei die Form

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \|p\|^2 + V(q, t),$$

wobei V ein (zeitabhängiges) Potential beschreibt. Im Fall $V = 0$ sind die Projektionen der Flusslinien auf B gerade die Geodäten bezüglich der Metrik $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$. Wenn $B = \mathbb{R}^n$ gilt, ist dies Übung.

Wir haben es hier also mit einer Verallgemeinerung der klassischen Mechanik zu tun, da wir jetzt Hamiltonsche Systeme auf beliebigen symplektischen Mannigfaltigkeiten betrachten können. Dort gibt es dann den direkten Bezug zur Physik nicht mehr, aber im Spezialfall von Kotangentialbündeln sind alle Resultate auf die klassische Situation übertragbar.

Beispiel 5.4. Sei $T = S^1 \times S^1$ der 2-Torus und die symplektische Form darauf gegeben als $\omega = dy \wedge dx$, also die Standardvolumenform. Sei $\varphi^t: T \rightarrow T$ die Drehung um t in der ersten Komponente. Dieser Fluss wird vom Vektorfeld $\partial/\partial x$ erzeugt, das symplektische, aber nicht Hamiltonsch ist. Später werden wir sogar zeigen, dass es für ein festes $t \notin \mathbb{Z}$ kein Hamiltonsches Vektorfeld geben kann, das diese Drehung als Zeit-1-Abbildung hat.

Als nächstes untersuchen wir einige Eigenschaften von symplektischen Vektorfeldern.

Satz 5.5. (a) *Sei (M, ω) eine geschlossene symplektische Mannigfaltigkeit und φ_t eine Familie von Diffeomorphismen, die von einem Vektorfeld X_t erzeugt wird. Dann ist φ_t für alle t ein Symplektomorphismus genau dann, wenn alle X_t symplektisch sind.*

(b) *Zwei Vektorfelder X, Y sind genau dann symplektisch, wenn die Lie-Klammer $[X, Y]$ Hamiltonsch ist mit Hamiltonfunktion $H = \omega(X, Y)$. (Übung)*

Die symplektischen Vektorfelder bilden also eine Lie-Algebra mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Lie-Klammern sogar Hamiltonsch sind.

Noch schöner wird es, wenn wir sogar Hamiltonsche Vektorfelder betrachten.

Satz 5.6. (a) *Hamiltonsche Flüsse sind symplektische Abbildungen.*

(b) *Symplektomorphismen bilden Hamiltonsche Flüsse wieder auf Hamiltonsche Flüsse ab.*

(c) *Bahnen von Hamiltonschen Flüssen liegen auf Niveauflächen der Hamiltonfunktion, d.h. die Niveauflächen sind invariant unter dem Fluss. (Übung)*

Analog zu symplektischen Vektorfeldern bilden auch die Hamiltonschen Vektorfelder eine Lie-Algebra und auch hier kann man die Hamiltonfunktion der Lie-Klammern explizit angeben.

Definition 5.7. Die **Poisson-Klammer** ist ein bilinearer Differentialoperator für Funktionen F, G auf symplektischen Mannigfaltigkeiten. Sie ist definiert als $\{G, H\} = \omega(X_G, X_H) = -dG(X_H) = dH(X_G)$. Zwei Funktionen G, H heißen **in Involution**, wenn $\{G, H\} = 0$ ist.

Der nächste Satz motiviert diese Definition und stellt einen Zusammenhang zwischen Lie-Klammer und Poisson-Klammer her.

Satz 5.8. *Die Hamiltonfunktion für die Lie-Klammer zweier Hamiltonscher Vektorfelder ist die Poisson-Klammer der Hamiltonfunktionen, es gilt also $[X_G, X_H] = X_{\{G, H\}}$.*

Daraus folgen dann direkt einige Eigenschaften der Poisson-Klammer.

- Korollar 5.9.** (a) Die Poisson-Klammer ist bilinear, schiefsymmetrisch und erfüllt die Produktregel $\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H$. (Übung)
- (b) Zwei Funktionen G, H sind genau dann in Involution, wenn $[X_G, X_H] = 0$, also wenn die Flüsse der Hamiltonschen Vektorfelder kommutieren.
- (c) Die Poisson-Klammer erfüllt die Jacobi-Identität

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Die Poisson-Klammer spielt auch im nächsten Abschnitt eine wichtige Rolle, wenn es um kommutierende Hamiltonsche Flüsse geht.

Wir schauen uns die Hamiltonschen Strukturen etwas genauer an und betrachten zeitabhängige Funktionen $H: M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I = [0, 1]$.

- Definition 5.10.** (a) Die Menge der zulässigen Hamiltonfunktionen bezeichnen wir mit \mathcal{H} oder $\mathcal{H}(M, \omega)$ und definieren sie als

- Für offenes M ist \mathcal{H} die Menge der Funktionen $H: M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger.
- Für kompaktes M ist \mathcal{H} die Menge der Funktionen $H: M \times I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\int_M H_t \omega^n = 0$ für alle $t \in I$.

In beiden Fällen sorgt die Bedingung dafür, dass die Hamiltonfunktionen additiv normiert sind. Wir erhalten also eine injektive Abbildung $H \mapsto X_H$ von Funktionen zu Vektorfeldern.

- (b) Ein Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ heißt **Hamiltonsch**, wenn er die Zeit-1-Abbildung eines Hamiltonschen Vektorfeldes X_H mit $H \in \mathcal{H}$ ist. Wir schreiben dann auch $\varphi_H = \varphi_H^1$.

Die Einschränkung ist also nur eine zeitanhängige additive Normierung der Funktionen. Damit gilt dann.

Satz 5.11. Die Menge der Hamiltonschen Diffeomorphismen ist eine Gruppe, die wir mit $\text{Ham}(M, \omega)$ bezeichnen. Die Hamiltonfunktionen für Inverse und Kompositionen lassen sich auch explizit angeben.

Da wir schon gesehen haben, dass Hamiltonsche Flüsse symplektische Abbildungen sind, ist $\text{Ham}(M, \omega)$ also eine Untergruppe der symplektischen Gruppe $\text{Symp}(M, \omega)$. Genauer ist es sogar eine Untergruppe von $\text{Symp}_0(M, \omega)$, der Zusammenhangskomponente der Identität. Denn als Zeit-1-Abbildung eines zeitanhängigen Vektorfeldes gibt es immer einen Pfad in Symp , der einen Hamiltonschen Diffeomorphismus mit der Identität verbindet. Genauer werden wir diese Gruppe später noch untersuchen und uns zunächst mehr mit der Dynamik von symplektischen Flüssen beschäftigen.

5.2. Integrale. Wir haben bereits gesehen, dass Hamiltonsche Flüsse die Niveauflächen der Hamiltonfunktion invariant lassen. Diese Eigenschaft lässt sich verallgemeinern.

Definition 5.12. Eine Funktion $F: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein **Integral** eines Vektorfeldes X , wenn $F \circ \varphi_X^t = F$ gilt. Wenn $X = X_H$ Hamiltonsch ist, dann sagen wir auch, dass F ein Integral von H ist.

Insbesondere sind die Niveauflächen von Integralen also invariant unter dem Fluss. Wenn man nun genügend Integrale findet, damit die Schnitte der Niveauflächen 1-dimensional werden, dann geben Integrale eine geometrische Beschreibung der Flusskurven und damit der Dynamik des Vektorfeldes. Insbesondere kann man durch ein Integral die Dimension des Problems verringern, wenn man das Integral als eine der Koordinaten auffasst.

Satz 5.13. (a) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (i) F ist ein Integral von G .
- (ii) G ist ein Integral von F .
- (iii) F, G sind in Involution.

(b) *Sind zwei Funktionen F, G Integrale von H , so ist auch die Poisson-Klammer $\{F, G\}$ ein Integral von H .*

Insbesondere erhalten wir mit der Poisson-Klammer ein weiteres Integral, dass aber die Dimension des Schnittes der Niveauflächen nicht weiter reduziert. Um den Fluss zu verstehen, brauchen wir also unabhängige Integrale.

Bemerkung 5.14. (a) Bei physikalischen Systemen steht hinter einem Integral immer eine Erhaltungsgröße. Insbesondere gilt $\{H, H\} = 0$, das ist die Energieerhaltung. Genauer sehen wir das später im Satz von Noether.

(b) Im Allgemeinen reduziert ein Integral die Dimension des Systems um 1, bei Hamiltonschen Systemen reduzieren unabhängige Integrale die Dimension sogar um 2. Daher spricht man auch von der halben Dimension als der Anzahl der **Freiheitsgrade** und ein Integral reduziert um einen Freiheitsgrad.

Wichtig: Dies gilt nur für unabhängige Integrale, die in Involution zueinander stehen! Zum Beispiel hat das Keplerproblem (2 Körper und Gravitation im \mathbb{R}^3) zwar 3 Freiheitsgrade, aber 7 Integrale. (Übung)

Die Aussage in b) werden wir nicht beweisen, sondern nur an einem Beispiel illustrieren.

Beispiel 5.15. Sei $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hamiltonfunktion, die nicht von x_n abhängt. Dann gilt $\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0$ und damit ist auch $\dot{y}_n = 0$. Also ist $F = y_n$ ein Integral von H und alle Bahnen liegen auf einer Niveaufläche $F^{-1}(c) = \{y_n = c\}$.

Damit können wir das System in $(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1})$ betrachten, wenn wir $y_n = c$ setzen. Dieses System ist immer noch Hamiltonsch mit Hamiltonfunktion $H = H(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, c)$. Hat man dieses System in $n - 1$ Freiheitsgraden (d.h. $2n - 2$ Variablen) gelöst, dann kann man x_n durch eine eindimensionale Integration bestimmen.

Als letztes schauen wir uns noch an, wie man Integrale finden kann. Eine Möglichkeit dazu bietet der Satz von Noether.

Satz 5.16 (Satz von Noether). *Falls eine Hamiltonfunktion $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ unter einer 1-Parameter-Familie von symplektischen Diffeomorphismen invariant ist, die als Hamiltonscher Fluss von einer Funktion F erzeugt wird, dann ist F ein Integral von H .*

In physikalischen Systemen entspricht also eine geometrische Symmetrie einer Erhaltungsgröße. Beispielsweise entspricht eine Rotationssymmetrie der Erhaltung des Drehimpulses, eine Translationssymmetrie entspricht der Impulserhaltung.

Definition 5.17. Ein Hamiltonsches System mit Hamiltonfunktion $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer $2n$ -dimensionalen symplektischen Mannigfaltigkeit (M, ω) heißt **(vollständig) integrabel**, wenn es n Funktionen F_1, \dots, F_n gibt mit

- (a) F_j ist ein Integral von H , d.h. $\{F, H\} = 0$.
- (b) Die n 1-Formen dF_j sind überall linear unabhängig.
- (c) Die Funktionen F_j sind paarweise in Involution, d.h. $\{F_j, F_k\} = 0$ für alle j, k .

Dies ist eine globale Definition, denn lokal ist jedes Hamiltonsche System symplektisch äquivalent zu $H = y_1$ auf \mathbb{R}^{2n} , für das alle y_i Integrale sind, die offensichtlich in Involution sind. Also finden wir auch hier wieder ein Beispiel dafür, dass in der symplektischen Geometrie eigentlich nur globale Eigenschaften interessant sind, da lokal alles auf eine Standardform gebracht werden kann.

Integrierte Systeme sind wichtig, da auch Störungen solcher Systeme noch Eigenschaften haben, die die Dynamik gut erkennen lassen. Dies führt dann auf Winkel-Wirkungs-Variablen und KAM-Theorie.

5.3. Hamiltonsche Dynamik. Wir betrachten nun einen wichtigen Spezialfall, in dem sich der Hamiltonsche Fluss geometrisch beschreiben lässt. Dies ist der Fall von Energieflächen, also Hyperflächen der Form $H^{-1}(c)$. Wir haben schon gesehen, dass die Hyperflächen unter dem Hamiltonschen Fluss von H invariant bleiben. Um die Bahnen genauer zu untersuchen, betrachten wir die Einschränkung der symplektischen Form auf solche Hyperflächen.

Definition 5.18. Sei $S = H^{-1}(c)$ eine Energiefläche. Das Geradenbündel $TS^\perp = \ker \omega|_S \subset TS$ heißt das **charakteristische Geradenbündel** und die Integralkurven heißen **Charakteristiken** von S .

Die Ideen dieser Definition funktionieren auch allgemein für koisotrope Untermannigfaltigkeiten.

Bemerkung 5.19. Sei $N \subset (M, \omega)$ eine koisotrope Untermannigfaltigkeit. Dann bildet $TN^\perp = \ker \omega|_N$ die **charakteristische Distribution** von N , also ein Unterbündel des Tangentialbündels TN . Eine Untermannigfaltigkeit U von N heißt dann **Integral** von TN^\perp , wenn $T_x U = T_x N^\perp$ gilt. Die Dimension eines Integrals ergibt sich also als die Kodimension von N in M . Man kann zeigen, dass es diese Integrale für charakteristische Distributionen von koisotropen Untermannigfaltigkeiten überall existieren und eine **Blätterung** von N definieren, also eine Zerlegung von N in paarweise disjunkte Untermannigfaltigkeiten, die lokal parallel sind.

Diese Blätterung für Energiehyperflächen hat einen starken Zusammenhang mit Hamiltonscher Dynamik. Insbesondere sind die Integralkurven für Hyperflächen eindimensionale Untermannigfaltigkeiten.

Satz 5.20. *Die Bahnen von X_H auf $S = H^{-1}(c)$ sind gerade die Charakteristiken von S , wenn c ein regulärer Wert von H ist.*

Dies gilt natürlich für jede Hamiltonfunktion, die S als reguläre Energie Fläche hat.

Korollar 5.21. *Die Flusstrajektorien zweier Hamiltonfunktionen, die beide S als reguläre Energiefläche haben, stimmen bis auf Parametrisierung auf S überein.*

Wir haben also gesehen, dass man die Lösungen einer Hamiltonschen Gleichung sogar unabhängig von der Parametrisierung nur mit Kenntnis der Niveauflächen der Hamiltonfunktion beschreiben kann. Es gibt auch noch eine andere Beschreibung, die in der Praxis oft sehr nützlich ist.

Wir betrachten hier den Fall, dass die symplektische Form exakt ist, also dass $\omega = d\lambda$. Außerdem sei S immer eine reguläre Energiehyperfläche $H^{-1}(c)$ in (M, ω) .

Definition 5.22. Sei γ ein Weg (unparametrisiert) in S . Dann ist die (**reduzierte**) **Wirkung** von γ definiert als

$$A(\gamma) = \int_{\gamma} \lambda$$

Seien nun L_0, L_1 zwei Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten von M , die in S enthalten sind und für die gilt $\lambda|_{L_i} = 0$. Wir betrachten nun Wege in S von L_0 nach L_1 und interessieren uns dafür, wann solche Wege Charakteristiken sind. Dafür betrachten wir Kurven $\gamma: [a, b] \rightarrow S$ mit $\gamma(a) \in L_0$ und $\gamma(b) \in L_1$.

Satz 5.23. *Für solche Wege γ auf regulären Energieflächen S sind äquivalent:*

- (a) γ ist ein kritischer Punkt der Wirkung A mit Endpunkten auf L_0 und L_1 .
- (b) γ ist ein kritischer Punkt der Wirkung A mit festen Endpunkten.
- (c) γ ist Teil einer Charakteristik von S .

In a) und b) variieren wir γ in verschiedenen Klassen von Kurven, in a) nur Kurven mit der Randbedingung, dass die Endpunkte auf L_0 und L_1 liegen sollen. In b) halten wir die Punkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ fest und variieren nur in der Klasse der Kurven zwischen diesen beiden Punkten.

In der Regel sind die Lösungen sogar Minima, deswegen spricht man auch vom **Prinzip der kleinsten Wirkung**.

Dieses Prinzip lässt sich verallgemeinern und dann auch auf Systeme anwenden, bei denen die Gesamtenergie, die durch die Hamiltonfunktion beschrieben wird, von der Zeit abhängt. In diesem Fall sind die Niveauflächen nicht mehr invariant und wir müssen die Wirkung anpassen, indem wir die Hamiltonfunktion mit dazu nehmen.

Definition 5.24. Sei $(M, \omega = d\lambda)$ eine exakte symplektische Mannigfaltigkeit und H eine zeitabhängige Hamiltonfunktion auf M , also eine Funktion $H: \mathbb{R} \times M \rightarrow \mathbb{R}$.

Das **(Hamiltonsche) Wirkungsfunktional** oder die **(Hamiltonsche) Wirkung** für Kurven $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ ist in diesem Fall definiert als

$$\mathcal{A}_H(\gamma) = - \int_a^b (\gamma^* \lambda - H \circ \gamma dt).$$

Bemerkung 5.25. (a) Oft interessiert man sich besonders für Fixpunkte von φ_H . Diese findet man als kritische Punkte des Wirkungsfunktionals, wenn man nicht über ein Intervall, sondern über S^1 (Kreis der Länge 1) integriert. Ähnlich wie Morse-theorie kann man dann auch für das Wirkungsfunktional einen Kettenkomplex definieren, der die Hamiltonsche Dynamik mit homologischen Methoden zugänglich macht. Dies ist die **(Hamiltonsche) Floerhomologie**.

(b) Für geschlossene Kurven kann man A_H auch bei nicht exaktem ω definieren, wenn man zusätzliche Wahlen trifft. Dann braucht man aber andere Zusatzigenschaften der symplektischen Form, damit das Funktional wohldefiniert ist. Im Allgemeinen bekommt man ein mehrwertiges Funktional auf dem Schleifenraum, das von den Wahlen abhängt.

Satz 5.26. *Die Trajektorien des Hamiltonschen Flusses sind genau die kritischen Punkte des Wirkungsfunktionals mit festen Endpunkten.*

Wie oben sind die Lösungen in der Regel Minima. Genauer haben wir sogar die gleiche Äquivalenz wie für die reduzierte Wirkung, wenn wir c) durch die Hamiltonsche Gleichung ersetzen. Im autonomen (zeitunabhängigen) Fall haben wir bereits gesehen, dass diese beiden Varianten von c) äquivalent sind.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch einige Beispiele:

Beispiel 5.27 (Geodätischer Fluss). Ein wichtiges Beispiel ist dann der geodätische Fluss auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit B . Um daraus eine symplektische Mannigfaltigkeit zu machen, betrachten wir wieder $M = T^*B$ mit der kanonischen symplektischen Form $\omega = d\lambda$. Die Hamiltonfunktion zum geodätischen Fluss ist dann die kinetische Energie $H = \frac{1}{2} \|p\|^2$.

In der Übung haben wir das im Fall von $B = \mathbb{R}^n$ schon in Koordinaten nachgerechnet. Im Allgemeinen Fall arbeitet man eher über das Wirkungsfunktional. Da man Geodäten reparametrisieren kann, legen wir auch hier fest, dass wir nach Bogenlänge parametrisieren wollen. Die Faserkoordinate im Kotangentenbündel entspricht gerade dem Impuls, also nach Normierung der Masse der Geschwindigkeit. Wir beschränken uns also auf das Einheitskotangentenbündel S^*B der Kovektoren mit Länge 1. Aus der Differentialgeometrie ist bekannt, dass Geodäten die Energie lokal minimieren. Man kann nachrechnen, dass die Wirkung bis auf eine additive Konstante gleich der Energie ist, also die gleichen Minimierer hat.

Einfacher sieht man das mit dem Lagrangeformalismus der klassischen Mechanik, der in klassischen Situationen über die Legendre-Transformation mit dem Hamiltonschen zusammenhängt. (Übung)

Als nächstes sehen wir, wie der geodätische Fluss sogar allgemeinere Systeme beschreiben kann, indem man die Metrik anpasst.

Definition 5.28. Sei $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(q)$ die Hamiltonfunktion auf T^*B , die die freie Bewegung eines Teilchens im Potentialfeld V auf B beschreibt. Sei $\sup V < \infty$ und $E > \sup V$, so dass $S = H^{-1}(E)$ eine reguläre Energiefläche ist. Dann gilt auf S die Gleichung

$$\frac{\|p\|^2}{2(E - V(q))} = 1.$$

Die Wurzel aus der linken Seite beschreibt dann eine Metrik $\frac{\|p\|}{\sqrt{2(E - V(q))}}$ auf T_q^*B , die dual zur **Jacobi-Metrik** $\sqrt{2(E - V(q))}\|\dot{q}\|$ auf T_qB ist.

Mit Hilfe dieser Metrik können wir ein klassisches Hamiltonsches System auf T^*B als geodätischen Fluss schreiben, wenn das Potential V beschränkt ist.

Korollar 5.29. Die Bahnen von $H = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(q)$ auf $H^{-1}(E)$ mit $E > \sup V$ sind genau die geodätischen Bahnen der zugehörigen Jacobi-Metrik auf B .

Als letztes schauen wir uns noch ein Beispiel an, wie der Hamiltonsche Formalismus ein komplexes physikalisches System verständlich machen kann.

Beispiel 5.30 (Ebenes Doppelpendel). Wie betrachten die Komposition zweier ebener Pendel, also ein Pendel, das sich am unteren Ende eines zweiten Pendels befindet, wobei beide Pendel gleich lang sind. Wir interessieren uns für die Positionen der beiden Pendel.

Als Koordinaten benutzen wir für jedes Pendel den Winkel zur Senkrechten, wobei 0 gerades Herunterhängen bedeutet. Dann sind wir in der obigen Situation mit $B = T^2$ und

$$V(q) = -\cos q_1 - \cos q_2.$$

Für $E \leq \sup V = 2$ (beide Pendel oben) wird die Rechnung etwas aufwändiger, denn analog zum einfachen Pendel hat man dann verschiedene Bewegungstypen zu unterscheiden. Diese Zeit nehmen wir uns jetzt nicht, sondern wir konzentrieren uns auf den Fall höherer Energie.

Für $E > \sup V$ suchen wir also Geodätische der Jacobi-Metrik auf T^2 , wir haben also ein komplexes mechanisches Problem (mit Newton will man das nicht rechnen) auf ein Problem der Riemannschen Geometrie einer relativ einfachen Mannigfaltigkeit zurückgeführt, wenn auch mit einer komplizierten Metrik.

Ein Satz von Morse sagt aus, dass es auf jedem Riemannschen Torus zu jeder rationalen Rotationszahl eine geschlossene Geodätische gibt. Im Fall des Doppelpendels kann man also vorgeben, wie viele Umdrehungen jedes Pendel machen soll und es gibt eine periodische Lösung, die das realisiert. Zum Beispiel könnte man fordern, dass sich das obere Pendel dreimal im und das untere in der gleichen Zeit 5 mal gegen den Uhrzeigersinn überschlagen soll.

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch einige strukturelle Resultate über Hamiltonsche Diffeomorphismen.

Wie fast alle Abbildungsgruppen ist auch die Gruppe Ham der Hamiltonschen Diffeomorphismen nicht abelsch:

Satz 5.31. *Zu jeder offenen Menge $U \subset M$ gibt es $\varphi, \psi \in \text{Ham}$ mit Träger in U , so dass $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$.*

Bevor wir Ham weiter untersuchen, brauchen wir noch eine Definition.

Die universelle Überlagerung einer Mannigfaltigkeit M ist eine Mannigfaltigkeit \tilde{M} , so dass $\pi_1(\tilde{M}) = 0$ gilt. Uns interessieren zunächst die universellen Überlagerungen von $\text{Ham}(M, \omega)$ und $\text{Symp}(M, \omega)$, also $\widetilde{\text{Ham}}(M, \omega)$ und $\widetilde{\text{Symp}}_0(M, \omega)$. Ein Punkt in einer dieser Überlagerungen ist eine Homotopieklasse von Isotopien $\psi_t, t \in [0, 1]$ mit $\psi_0 = id$ und $\psi_1 = \psi$ und wird mit $\{\psi_t\}$ bezeichnet.

Eine Isotopie ist dabei eine Homotopie von Abbildungen die bestimmte Zusatzeigenschaften erhält. Hier interessieren uns zum Beispiel symplektische Isotopien, bei denen alle Abbildungen symplektisch sind oder Hamiltonsche Isotopien, bei denen alle Abbildungen Hamiltonsch sind. Insbesondere ist jeweils das Vektorfeld $\frac{d}{dt}\psi_t$ symplektisch oder Hamiltonsch.

Definition 5.32. Der **Flux-Homomorphismus** $\text{Flux}: \widetilde{\text{Symp}}_0(M, \omega) \rightarrow H^1(M; \mathbb{R})$ ist

$$\text{Flux}(\{\psi_t\}) = \int_0^1 i_{X_t} \omega dt,$$

wobei X_t durch die Gleichung $\frac{d}{dt}\psi_t = X_t \circ \psi_t$ gegeben ist. Wir sagen dann auch, dass X_t die Isotopie ψ_t erzeugt.

Wenn also eine Homotopieklasse durch eine geschlossene Kurve γ representiert wird, dann gilt

$$\text{Flux}(\{\psi_t\})(\gamma) = \int_0^1 \int_0^1 \omega(X_t(\gamma(t), \dot{\gamma}(s))) ds dt$$

Geometrischer kann man Flux beschreiben als

$$\text{Flux}(\{\psi_t\})(\gamma) = \int_0^1 \int_0^1 \omega\left(\frac{\partial \beta}{\partial t}, \frac{\partial \beta}{\partial s}\right), ds dt$$

wobei $\beta(t, s) = \psi_t(\gamma(s))$ ist. Wir bestimmen also die symplektische Fläche des Zylinders, der entsteht, wenn man ψ_t auf $\gamma(s)$ anwendet.

Beide Definitionen sind äquivalent, denn er hängt nur von der Homotopieklasse von γ und ψ_t ab. Dies wird zum Beispiel in [McDS] (Abschnitt 10.2) gezeigt. An der letzten Definition sieht man auch, dass Flux ein Gruppenhomomorphismus ist, denn durch die Komposition von Flüssen addieren sich die Flächen.

Als nächstes sehen wir, dass $\text{Ham}(M, \omega)$ sogar ein Normalteiler von $\text{Symp}(M, \omega)$ ist. Dazu beschreiben wir $\text{Ham}(M, \omega)$ als Kern eines Gruppenhomomorphismus.

Satz 5.33 (z.B. [McDS], Theorem 10.12). *Sei $\psi \in \text{Symp}_0(M, \omega)$. Dann ist $\psi \in \text{Ham}(M, \omega)$ genau dann, wenn es eine Isotopie ψ_t gibt mit $\psi_1 = \psi$, $\psi_0 = id$ und $\text{Flux}(\{\psi_t\}) = 0$.*

Genauer ist der Flux-Homomorphismus sogar auf $\text{Symp}_0(M, \omega)$ wohldefiniert, denn es gilt

$$\text{Symp}_0(M, \omega) = \widetilde{\text{Symp}}_0(M, \omega)/G,$$

wobei G eine diskrete Untergruppe ist. Dies ist die Aussage der Fluxvermutung, die von K. Ono bewiesen wurde. Dann ist tatsächlich $\text{Ham}(M, \omega)$ der Kern eines Gruppenhomomorphismus und damit ein Normalteiler von $\text{Symp}_0(M, \omega)$.

Damit können wir nun zeigen, dass die Abbildung aus Beispiel 5.4 nicht Hamiltonsch ist.

Beispiel 5.34. Betrachte die Rotation auf dem Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ in der ersten Koordinate um den Winkel a , also $\varphi(x, y) = (x + a, y)$. Sei $\gamma: S^1 \rightarrow T^2$ eine geschlossene Kurve in T^2 . Wenn $\varphi = \varphi_H$ Hamiltonsch ist, definieren wir $\Gamma(s, t) := \varphi_H^s(\gamma(t))$. Dann rechnet man nach, dass für jede Kurve γ gilt $\text{Flux}(\varphi_H^t)(\gamma) = \int_{\Gamma} \omega = 0$.

Andererseits haben wir gesehen, dass die einfache Rotation $\psi^t(x, y) = (x + at, y)$ nicht Hamiltonsch ist. Die Komposition dieser beiden Wege in Symp ergibt eine geschlossene Kurve in Symp und Flux davon ist das Integral über einen Torus in T^2 . Es gilt dann aber

$$\mathbb{Z} \ni \int_{\Gamma_{\varphi_H - \Gamma_{\psi}}} \omega = \int_{\Gamma_{\varphi_H}} \omega - \int_{\Gamma_{\psi}} \omega = 0 - a$$

Also ist φ genau dann Hamiltonsch, wenn $a \in \mathbb{Z}$ gilt. Dann ist aber $\varphi = id$, das offensichtlich Hamiltonsch ist.

5.4. Erzeugendenfunktionen. Wir lernen nun noch eine andere Möglichkeit kennen, wie eine Funktion einen Symplektomorphismus erzeugen kann. Insbesondere können wir mit dieser Methode die Gruppe $\text{Symp}_0(M, \omega)$ besser verstehen.

Insbesondere interessieren uns die beiden folgenden Fragen:

- Wie können wir alle beliebigen Symplektomorphismen in einer C^1 -kleinen Umgebung der Identität auf einmal darstellen?
- Wie kann man einen beliebigen Diffeomorphismus $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu einem symplektischen Diffeomorphismus auf \mathbb{R}^{2n} fortsetzen?

Die zweite Frage haben wir im linearen Fall schon beantwortet. In diesem Kapitel werden wir sehen, wie das auch im nichtlinearen Fall geht.

Zunächst interessieren wir uns für die lokale Gestalt eines Symplektomorphismus $\varphi: (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$. Mit dem Satz von Darboux reicht es also, Symplektomorphismen $\varphi: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ zu betrachten.

Die Definition $\varphi^*\omega_0 = \omega_0$ führt zu einer nichtlinearen partiellen Differentialgleichung für $d\varphi$, das ist also nicht sehr hilfreich.

Trotzdem betrachten wir zunächst $d\varphi$, also noch einmal lineare symplektische Abbildungen.

Lemma 5.35. *Seien A und B zwei $n \times n$ -Matrizen mit Spaltenvektoren a_i und b_i , so dass $AB^T = BA^T$ gilt. Sei r der Rang der $2n \times n$ -Matrix (A, B) . Dann gibt es r paarweise verschiedene Indizes $j_p \in \{1, \dots, 2n\}$, so dass die Vektoren v_p linear unabhängig sind und für jedes p gilt $v_p \in \{a_{j_p}, b_{j_p}\}$.*

Insbesondere brauchen wir also nie a_j und b_j , um das ganze Bild von (A, B) zu erzeugen.

Satz 5.36. *Sei U eine lineare symplektische Abbildung von $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. Dann gibt es eine symplektische Abbildung E , so dass*

$$UE = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ und } \det A \neq 0.$$

Jede symplektische $2n \times 2n$ -Matrix hat also eine $n \times n$ -Unterdeterminante, die nicht verschwindet, und es gibt einen symplektischen Koordinatenwechsel, der diese nach links oben verschiebt.

Zurück zum allgemeinen Symplektomorphismus $\varphi: \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}^{2n}$. Wir schreiben $\varphi(x, y) = (u, v)$. Es gilt dann also

$$\varphi^*(dy \wedge dx) = dv \wedge du = dy \wedge dx.$$

Die Ableitung von φ ist nach Voraussetzung eine symplektische Matrix

$$d\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Mit dem obigen Koordinatenwechsel können wir oBdA annehmen, dass $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ gilt. Lokal lässt sich also u nach x auflösen und wir schreiben $x = x(y, u)$. Dann gilt natürlich auch $v = v(x, y) = v(x(y, u), y) = v(y, u)$.

Wir berechnen nun

$$d(x dy + v du) = dx \wedge dy + dv \wedge du = 0.$$

Die 1-Form $\alpha = x dy + v du$ ist also geschlossen und damit exakt und wir schreiben $\alpha = dS$ für eine Funktion $S: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$.

Lokal können wir damit die Abbildung φ mit Hilfe von S ausdrücken, denn

$$\varphi(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow (x, v) = \nabla S(y, u)$$

mit

$$\det \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial y} = \det \frac{\partial x}{\partial u} \neq 0.$$

Definition 5.37. Die Funktion S heißt die **erzeugende Funktion**, manchmal auch die **Erzeugendenfunktion** von φ .

Eine Erzeugendenfunktion ist bis auf additive Konstante eindeutig, da sie als Integral einer 1-Form definiert ist.

Mit Hilfe von Erzeugendenfunktionen darstellt, können nun obige Fragen beantwortet werden.

Erzeugenden funktionen sind auch hilfreich, weil sie Funktionen auf endlichdimensionalen Räumen sind. Im Gegensatz zum Wirkungsfunktional kann man diese ohne höhere Funktionalanalysis untersuchen und trotzdem Informationen über den Symplektomorphismus bekommen. Insbesondere kann man Erzeugendenfunktionen benutzen, um die stetige Dynamik eines Flusses anzunähern, indem man den Fluss in kurze diskrete Zeitschritte aufspaltet.

LITERATUR

- [BottTu] R. Bott, L.W. Tu, Differential forms in algebraic topology. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982
- [daSilva] A. Cannas da Silva, Lectures on Symplectic Geometry, Lecture Notes in Mathematics, 1764. Springer-Verlag, Berlin, 2001
- [Lee] J.M. Lee, Introduction to smooth manifolds, Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.
- [McDS] D. McDuff, D. Salamon, Introduction to Symplectic Topology, Second edition. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998
- [Zehnder] E. Zehnder, Lectures on Dynamical Systems, Hamiltonian vector fields and symplectic capacities. EMS Textbooks in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010