Übungsblatt Differentialformen

Symplektische Geometrie

im SS 2016 bei Dr. Doris Hein

keine Abgabe

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie: Für eine 0-Form f und ein Vektorfeld X auf einer Mannigfaltigkeit M gilt

$$df(X) = X(f).$$

(b) Sei α eine konstante n-Form auf $\mathbb{R}^n$, also $\alpha = a\, dx_1 \wedge dx_n$, und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Zeigen Sie: dann ist f^* die Multiplikation mit der Determinante von df, es gilt also

$$f^*\alpha = \det(df)\alpha.$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie Satz 3.8, indem Sie zeigen:

(a) Es gilt $d^2 = 0$, wobei $d^2 = d \circ d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+2}(M)$.

(b) Für Produkte von Differentialformen $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^l(M)$ gilt

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta.$$

(c) Die äußere Ableitung ist mit dem Pullback verträglich, es gilt $f^* d\alpha = d(f^*\alpha)$.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Differentialformen in Polarkoordinaten:

(a) $\alpha = dx \wedge dy$ auf $\mathbb{R}^2$

(b) $\beta = \frac{1}{x^2+y^2}(x\,dy - y\,dx)$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Zeigen Sie außerdem, dass β auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ geschlossen, aber nicht exakt ist.

Aufgabe 4

Es seien in $\mathbb{R}^3$ mit Basis x, y, z die folgenden Differentialformen mit reelweertigen Funktionen a, b, c, A, B, C gegeben:

(a) Berechnen Sie das äußere Differential $d\alpha$ für eine 1-Form $\alpha = a\,dx + b\,dy + c\,dz$,

(b) Berechnen Sie das äußere Differential $d\beta$ für eine 2-Form $\beta = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$,

(c) Identifizieren Sie α mit dem Vektorfeld $X = (a, b, c)$ und β mit dem Vektorfeld $Y = (A, B, C)$. Leiten Sie aus $d^2 = 0$ die bekannten Relationen $rot(\nabla f) = 0$ und $div(rotX) = 0$ her.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass die Lie-Ableitung L_X in Richtung eines Vektorfeldes X auf einer Mannigfaltigkeit M mit dem äußeren Differential kommutiert, dass also für jede Differentialform α auf M gilt:

$$L_X d\alpha = dL_X\alpha.$$