2. Übungsblatt

Symplektische Geometrie

im SS 2016 bei Dr. Doris Hein

Abgabe Donnerstag, den 12.5.16
vor Beginng der Übung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage aus Beispiel 2.11: Sei $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ gegeben mit der üblichen symplektischen Form. Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, $f(v) = Av$ ist genau dann symplektisch, wenn $J = A^T JA$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Ist A eine symplektische Matrix, so sind die Eigenräume zu zwei verschiedenen Eigenwerten λ und μ von A ω-orthogonal, wenn nicht $\lambda\mu = 1$ gilt.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den symplektischen Vektorraum $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ mit der symplektischen Standardbasis $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Wie üblich bezeichnen wir die Elemente mit $z = (x, y)$.
Zeigen Sie, dass man jede lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, x \mapsto f(x)$ fortsetzen kann zu einer symplektischen Abbildung $F\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ der Form $F(x, y) = (f(x), g(y))$. Geben Sie g explizit in Abhängigkeit von f an.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Aussage von Bemerkung 2.12:

(a) Zeigen Sie, dass jede symplektische lineare Abbildung injektiv ist.

(b) Sei $f\colon (V_0, \omega_0) \to (V_1, \omega_1)$ ein symplektischer Isomorphismus und $L_0 \subset V_0$ Lagrangesch. Dann ist auch $L_1 = f(L_0) \subset V_1$ Lagrangesch.

(c) Sei (V, ω) ein symplektischer Vektorraum und die Abbildung $f\colon V \to V$ symplektisch. Der Graph $gr(f) = \{(v, f(v)) \,|\, v \in V\}$ ist dann Lagrangesch im Produktraum $V \times V$ mit der symplektischen Form $\Omega(z_1, z_2) := (\omega \oplus -\omega)((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \omega(x_1, y_1) - \omega(x_2, y_2)$.

Aufgabe 4

Konstruieren Sie eine symplektische lineare Abbildung, die den offenen Einheitsball $B(1)$ in $\mathbb{R}^4$ in den Zylinder $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1^2 + x_2^2 < 1/2\}$ abbildet.