5. Übungsblatt

Symplektische Geometrie

im SS 2016 bei Dr. Doris Hein

Abgabe Donnerstag, den 16.6.16
vor Beginn der Übung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Eine Untermannigfaltigkeit $L \in (M, J)$ in einer Mannigfaltigkeit M mit fast komplexer Struktur J heißt **vollständig reell**, wenn sie von halber Dimension ist und $T_qL \cap JT_qL = 0$ gilt für alle $q \in L$.

(a) Sei (ω, g, J) ein kompatibles Tripel. Zeige, dass jede Lagrangesche Untermannigfaltigkeit vollständig reell ist.

(b) Zeige, dass die Gegenrichtung nicht gilt: eine vollständig reelle Untermannigfaltigkeit ist genau dann Lagrangesch, wenn an jedem Punkt JT_qL das g-orthogonale Komplement von T_qL ist.

Aufgabe 2

Wir betrachten eine 1-Form α auf einer Mannigfaltigkeit B als Schnitt im Kotangentialbündel, also also Untermannigfaltigkeit L_α in $(M = T^*B, \omega = d\lambda)$ mit der Standardstruktur der kanonischen symplektischen Form.

Zeige, dass L_α genau dann Lagrangesch ist, wenn α geschlossen ist.

Aufgabe 3

Sei N eine koisotrope Untermannigfaltigkeit von (M, ω). Zeige, dass für zwei Vektorfelder X, Y auf N mit $X, Y \in (TN)^\perp$ gilt, dass auch die Lie-Klammer $[X, Y]$ in $(TN)^\perp$ liegt.

Wie üblich bezeichnet $\perp$ hier das ω-orthogonale Komplement.

Damit definiert $(TN)^\perp$ eine integrable Blätterung auf N, es gibt also lokal für jeden Punkt $p \in N$ in einer Umgebung eine Untermannigfaltigkeit F von N, so dass $TF = (TN)^\perp$ gilt.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Abbildung nach Beispiel 4.23φ: $M \times M \to T^*M$ mit

$$\varphi(x, y, v, w) = \left(\frac{x+v}{2}, \frac{y+w}{2}, y - w, v - x \right)$$

in einer Umgebung der Diagonalen für $(M, \omega) = (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ ein lokaler Symplektomorphismus ist, wenn man auf T^*M die kanonische symplektische Struktur benutzt. Außerdem bildet φ die Diagonale in $M \times M$ auf den Nullschnitt in T^*M ab.