6. Übungsblatt

Symplektische Geometrie

im SS 2016 bei Dr. Doris Hein

Abgabe Donnerstag, den 23.6.16 in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Zeige, dass für eine Funktion $H\colon (M,\omega) \to \mathbb{R}$ der Fluss des Hamiltonschen Vektorfeldes X_H die Niveauflächen von H erhält.

Aufgabe 2

Identifiziere $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ mit den üblichen Koordinaten (x, y) und der symplektischen Form $dy \wedge dx$.

(a) Bestimme das Hamiltonsche Vektorfeld der Hamiltonfunktion $H(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$.

(b) Zeige, dass die Projektion der Hamiltonschen Flusslinien auf den x-Raum $\mathbb{R}^n$ genau die Geraden in diesem Raum beschreiben.

Aufgabe 3

Betrachte die Funktion

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x$$

auf $M = S^1 \times \mathbb{R} = T^*S^1$ mit der üblichen symplektischen Struktur. Der Hamiltonsche Fluss dieser Funktion beschreibt die Gesamtenergie eines Pendels, wobei x den Winkel zur Senkrechten und y die Winkelgeschwindigkeit beschreibt.

Skizziere einige Niveaulinien dieser Funktion auf der universellen Überlagerung $R^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wie viele verschiedene Typen von Niveaulinien gibt es? Beschreibe jeweils die zugehörige Bewegung des Pendels.

Hinweis: Betrachte zuerst die Menge $H^{-1}(0)$.

Aufgabe 4

Beweise die folgenden Eigenschaften der Poisson-Klammer: Die Poisson-Klammer ist bilinear, schiefsymmetrisch und erfüllt die Produktregel

$$\{F, GH\} = G\{F, H\} + \{F, G\}H.$$