

7. ÜBUNGSBLATT

SYMPLEKTISCHE GEOMETRIE

IM SS 2016 BEI DR. DORIS HEIN

Abgabe Donnerstag, den 30.6.16
in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Betrachte die Hamiltonfunktion

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\|y\|^2 - \frac{1}{\|x\|}$$

auf $T^*(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^6 \setminus \{x = 0\}$.

Zeige, dass die Bewegungsbahnen durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\ddot{x} = -\frac{x}{\|x\|^3}$$

beschrieben wird. (\ddot{x} beschreibt die zweite Ableitung der Position x nach der Zeit).

Aufgabe 2

Zeige, dass in der Situation aus Aufgabe 1 die Komponenten des Drehimpulsvektors

$$L := x \times \dot{x}$$

Integrale sind.

Aufgabe 3

Zeige, dass das Resultat aus Aufgabe 2 die folgenden Aussagen impliziert:

- (a) Für jede Zeit t liegt $x(t)$ in einer festen Ebene in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
- (b) Wenn die Bahn von x eine Ellipse ist, dann wird für jedes $\epsilon > 0$ in jedem Intervall $(t_0, t_0 + \epsilon)$ durch die Strecke von 0 nach $x(t)$ die gleiche Strecke überstrichen.

Aufgabe 4

Zeige nun, dass auch die Komponenten des Runge-Lenz-Vektors

$$C := \dot{x} \times L - \frac{x}{\|x\|}$$

Integrale sind.

Damit haben wir für das 6-dimensionale Problem insgesamt 7 (H und jeweils 3 Komponenten von L und C) Integrale gefunden. Diese sind also nicht voneinander unabhängig.