8. Übungsblatt

Symplektische Geometrie

im SS 2016 bei Dr. Doris Hein

Abgabe Donnerstag, den 7.7.16 vor der Übung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Beweise den Satz von Noether:

Falls eine Hamiltonfuntion $H: M \to \mathbb{R}$ unter einer 1-Parameter-Familie von symplektischen Diffeomorphismen invariant ist, die als Hamiltonscher Fluss von einer Funktion F erzeigt wird, dann ist F ein Integral von H.

Hinweis: Fasse die Aussage als Aussage über Integrale von Hamiltonschen Systemen auf.

Aufgabe 2

Beweise Satz 5.20:

Sei $H: M \to \mathbb{R}$ eine Hamiltonfunktion und c rein regulärer Wert von H. Dann ist die Hyperfläche $S = H^{-1}(c)$ eine Untermannigfaltigkeit von M.

Zeige: die Bahnen von X_H auf S sind gerade die Charakteristiken von S.

Aufgabe 3

Betrachte S^3 als Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{R}^4, \omega_0)$ mit der Einbettung als Einheitssphäre. Zeige, dass die charakteristische Blätterung genau die Fasern der Hopf-Faserung erzeugt.

Aufgabe 4

Sei $H: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben als

$$H(x, y) = \frac{1}{2}\|z_1\|^2 + \frac{a}{2}\|z_2\|^2$$

und sei $S = H^{-1}(1)$.

(a) Zeige, dass S eine reguläre Niveaufläche von H ist, d.h., dass 1 ein regulärer Wert von H ist.

(b) Beschreibe die Bahnen der characteristischen Blätterung geometrisch. Welche davon sind geschlossene Kurven? Für welche Werte von a ist der Fluss periodisch, d.h., sind alle Bahnen geschlossen?

Hinweis: der Fluss lässt sich als komplex lineare Abbildung schreiben.