9. Übungsblatt

Symplektische Geometrie

im SS 2016 bei Dr. Doris Hein

Abgabe Donnerstag, den 14.7.16 in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und $f\colon V \to \mathbb{R}$ eine glatte, strikt konvexe Funktion, i.e., $d^2 f$ pos. definit. Die Legendre-Transformierte von f ist

$$f^*\colon V^* \to \mathbb{R} \text{ mit } f^*(y) = \sup_x \,(y(x) - f(x)) = (y(x) - f(x))|_{y=df(x)}.$$

Zeige: f^* ist dann ebenfalls strikt konvex und es gilt $(f^*)^* = f$.

Aufgabe 2

Sei $H\colon \mathbb{R} \times T^*\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Hamiltonfunktion der Form $H(t,q,p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(t,q)$. Diese Funktion ist in jeder Faser des Kotangentialbündels strikt konvex und wir definieren die Legendre-Transformierte faserweise wie in Aufgabe 1).
Zeige: die Legendre-Transformierte von H ist von der Form $L\colon \mathbb{R} \times T\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$L(t,x,v) = H^*(t,x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(t,x).$$

Aufgabe 3

Zeige: $(q(t), p(t))\colon [0,1] \to M = T^*B$ ist genau dann ein Extremwert (Max oder Min) der Hamiltonschen Wirkung A_H für eine Hamiltonfunktion $H\colon M \to \mathbb{R}$ mit festen Endpunkten $q(0), q(1) \in B$ ist, wenn $q(t)$ auch ein Extremwert der Lagrangeschen Wirkung

$$A_L(q) = \int_0^1 L(t,q,\dot q)\; dt$$

mit festen Endpunkten in B ist.
Beachte: Wegen $H = L^*$ gilt $p = \frac{\partial L}{\partial \dot q}$.

Aufgabe 4

Sei $H\colon T^2 \to \mathbb{R}$ eine Hamiltonfunktion auf dem 2-Torus $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ und φ_H^t der zugehörige Hamiltonsche Fluss. Definiere für eine geschlossene Kurve $\gamma\colon S^1 \to T^2$ die Abbildung $\Gamma\colon [0,1] \times S^1 \to T^2$ durch $\Gamma(s,t) = \varphi_H^s(\gamma(t))$.
Zeige, dass die symplektische Fläche des durch Γ definierten Zylinders in T^2 verschwindet, dass also

$$\int_{[0,1]\times S^1} \Gamma^*\omega = 0.$$