12. Übungsblatt

Differentialgeometrie I

im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 25.1.18 10 Uhr (also vor der Vorlesung) in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Bitte denken Sie an die Prüfungsanmeldung bis 19.1. und die Evaluierung bis 20.1.

Aufgabe 1

Seien (M, g) und $(N.h)$ zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Wir betrachten die Produktmannigfaltigkeit $W = M \times N$ mit der Produktmetrik

$$G((v_1, u_1), (v_2, u_2)) = g(v_1, v_2) + h(v_1, u_2)$$

für $(v_i, u_i) \in T(M \times N) = TM \times TN$ (vgl. Aufgabe 4 von Blatt 5).

(a) Wenn M und N beide positive Schnittkrümmung haben, gilt dies dann auch für W?

(b) Wenn M und N beide positive Ricci-Krümmung haben, gilt dies dann auch für W?

Aufgabe 2

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K(E) \leq \kappa \leq 0$ für alle Ebenen $E \subset TM$. Präzisieren und zeigen Sie folgende Aussage:
Ein kleines Dreieck in M hat höchstens so große Winkel wie ein Dreieck mit den gleichen Seitenlängen in M^n_κ.

Aufgabe 3

Betrachten Sie auf $\mathbb{R}^n$ die Metrik $g_x(v, w) = e^{-2f(x)} \langle v, w \rangle$ für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole von g als Ausdrücke in den Ableitungen von f.

(b) Bestimmen Sie aus a) die Koeffizienten des Krümmungstensors ebenfalls als Ausdrücke in den Ableitungen von f.

(c) Bestimmen Sie die Schnittkrümmungen der Koordinatenebenen, d.h., der Ebenen der Form $E = \operatorname{span}(e_i, e_j)$, und drücken Sie diese ebenfalls mit Hilfe von f aus.

(d) **(2 Bonuspunkte)** Zeigen Sie, dass für diese Metriken der Krümmungstensor aus der Ricci-Krümmung rekonstruiert werden kann.

Bitte wenden

Aufgabe 4

In der Situation von Aufgabe 3 sei $f(x) = h(\|x\|)$ mit $h(0) = 1$. Zeigen Sie:

(a) Geraden durch den Nullpunkt in $\mathbb{R}^n$ sind Geodätische in $(\mathbb{R}^n, g)$.

(b) $(M = \mathbb{R}^n, g)$ ist genau dann vollständig, wenn $\int_0^\infty e^{-h(t)}\, dt = \infty$.

(c) Finden Sie eine Bedingung an h, so dass $K > 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ gilt.

(d) **(2 Bonuspunkte)** Existieren Funktionen h, die b) und c) erfüllen?