13. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 1.2.18
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Beweisen Sie Folgerung 2.27: Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\pi\colon \tilde{M} \to M$. Sei $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \tilde{M}$ ein Weg, dessen Bild $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ eine Schleife in M ist, d.h., es gilt $\gamma(0) = \gamma(1)$. Dann ist γ genau dann in M zusammenziehbar, wenn $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$.

Aufgabe 2

Es sei $M = \mathbb{R}P^n$ mit der Standardmetrik. Finden Sie eine kürzeste Geodätische in der nichttrivialen Konjugationsklasse in $\pi_1(M)$. Ist die Abschätzung in Lemma 2.28 (1) optimal?
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 1 von Blatt 9 und Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Es sei M eine kompakte, vollständige Mannigfaltigkeit mit nichtpositiver Schnittkrümmung. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hadamard-Cartan:

(a) Es gibt in M geschlossene Geodätische.

(b) Keine geschlossene Geodätische ist zusammenziehbar.

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, G die Gruppe aller Isometrien von (M, g) und H eine Untergruppe von G. Es sei

$$M^H = \{p \in M \mid h(p) = p \ \text{ für alle } \ h \in H\}\,.$$

M^H ist stets eine disjunkte Vereinigung von Untermannigfaltigkeiten von M. Zeigen Sie:

(a) Es sei $p \in M^H$, $v \in T_pM^H \subset T_pM$, dann gilt $dh_p(v) = v$ für alle $h \in H$.

(b) Sei $c : \mathbb{R} \to M$ Geodätische und $h \in H$, dann ist $h \circ c$ Geodätische.

(c) Sei $c : \mathbb{R} \to M$ Geodätische mit $c(0) \in M^H$, $\dot{c}(0) \in T_{c(0)}M^H$, dann verläuft c in M^H.

(d) Sei c wie in c), dann ist c auch Geodätische in M^H bezüglich der induzierten Metrik. Umgekehrt ist jede Geodätische in M^H auch Geodätische in M.

Hinweis: Benutzen Sie, dass Geodätische lokal Kürzeste sind.