2. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 2.11.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es sei $v \in T_pS^2$ der Vektor, welcher bezüglich der Karte $\varphi_+ \colon S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{R}^2$ der stereographischen Projektion die Gestalt $\frac{1}{\sqrt{2}-1}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ mit dem Fußpunkt $\varphi_+(p) = \frac{1}{2-\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ besitzt.

(a) Beschreiben und skizzieren Sie eine Kurve auf S^2, die v als Geschiwindigkeitsvektor besitzt.

(b) Bestimmen den Fußpunkt und die Darstellung von v bezüglich der Karte φ_-.

(c) Wie wirkt v als Richtungsableitung auf die Funktionen $f_i \colon S^2 \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f_i(x) = x_i$ für $i = 1, 2, 3.$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2

Definieren Sie noch einmal die Homomorphismen aus der Vorlesung vom physikalischen in den geometrischen Tangentialraum und den in umgekehrter Richtung. Zeigen Sie, dass diese wohldefiniert und zueinander invers sind.

Aufgabe 3

Zeigen Sie für eine C^k-Abbildung $F \colon M \to N$:

(a) Das physikalische Differential ist wohldefiniert;

(b) Das geometrische Differential ist wohldefiniert;

(c) Beide Konstruktionen liefern die gleiche Abbildung $dF \colon TM \to TN$.

Aufgabe 4

(a) Zeigen Sie, dass das Differential der Identität $\mathrm{id} \colon M \to M$ an jedem Punkt $p \in M$ ebenfalls die Identität $\mathrm{id} \colon T_pM \to T_pM$ ist.

(b) Beweisen Sie für zwei C^k-Abbildungen $F \colon M \to N$ und $G \colon L \to M$ die Kettenregel:

$$d(F \circ G) = dF \circ dG \colon TL \to TN\ .$$

Hinweis: Benutzen Sie nur eine der drei möglichen Darstellungen von Tangentialvektoren.