4. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 16.11.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei (M, g) eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ mit der Euklidischen Metrik und $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ Vektorfelder. Betrachten Sie Y als Abbildung

$$M \ni p \mapsto Y(p) \in T_pM \subset T_p\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N$$

mit Ableitung $X(Y) : M \to \mathbb{R}^N$, vgl. Bemerkung 1.42. Zeigen Sie:

(a) Es gibt ein eindeutiges Vektorfeld $Z \in \mathfrak{X}(M)$, so dass $\langle X(Y), W\rangle = \langle Z, W\rangle$ für alle $W \in \mathfrak{X}(M)$.

(b) Es gilt $\nabla_X Y = Z$ für den Levi-Civita-Zusammenhang auf M.

Aufgabe 2

Es sei $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und $\varphi_+ : S^n \setminus \{e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n$ die stereographische Projektion. Sei X_i das φ_+^{-1}-verwandte Vektorfeld zu $\frac{\partial}{\partial x^i} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$.

(a) Berechnen Sie $\nabla_{X_i} X_j$ mit Hilfe von Aufgabe 1 und stellen Sie $\nabla_{X_i} X_j$ in der Basis $X_1, \dots, X_n$ dar, d.h., bestimmen Sie die Cristoffelsymbole bezüglich der Karte φ_+.

(b) Berechnen Sie $R_{X_i,X_j} X_k$.

Aufgabe 3

Es sei $(B_1^n(0), g^{\mathrm{hyp}})$ das Poincaré-Modell des hyperbolischen Raumes in n Dimensionen aus Beispiel 1.35.
Bestimmen Sie den Levi-Civita-Zusammenhang ∇, indem Sie zunächst $g_p^{hyp}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k})$ ausrechnen und dann $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}|_p$ in den $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ ausdrücken, d.h., bestimmen Sie die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k bezüglich der Identität.

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, ∇ ein Zusammenhang auf TM und T ein $(a, 1)$-Tensor auf M. Wir definieren ∇T als

$$(\nabla_{X_0} T)(X_1, \dots X_a) = \nabla_{X_0}\big(T(X_1, \dots, X_a)\big) - \sum_{j=1}^{a} T(X_1, \dots, \nabla_{X_0} X_j, \dots, X_a)$$

mit $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ für $i = 0, \dots, a$. Zeigen Sie, dass ∇T ein $(a + 1, 1)$-Tensor ist.