6. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 30.11.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

(a) Geben Sie alle Löungen der folgenden Differentialgleichung mit Anfangswert an:

$$f'(t) = 3\,\mathrm{sign}(f(t)) \cdot |f(t)|^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad f(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

(b) Warum existiert keine stetige Löung $F : (-1,1) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ von

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) = 3\,\mathrm{sign}(F(x,t)) \cdot |F(x,t)|^{\frac{2}{3}} \;\; \text{mit } F(s,0) = s\ ?$$

Hinweis: Betrachten Sie vor allem den Fall $f(0) = 0$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie die Kurve $\gamma(t) = (1 - \cos t, 1 - \sin t) \subset (B_1^2(0), g^{hyp})$ für $t \in (0, \pi/2)$.

(a) Berechnen Sie die Länge von γ bezüglich der hyperbolischen Metrik aus Beispiel 1.35 und geben Sie eine Parametrisierung an, die γ proportional zur hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert.

(b) Stellen Sie die Geodätengleichung von $(B_1^2(0), g^{hyp})$ mit Hilfe von Aufgabe 3 von Blatt 4 als gewöhnliche Differentialgleichung in den kartesischen Koordinaten auf.

(c) Zeigen Sie, dass γ mit der Parametrisierung aus a) eine Geodätische ist.

(d) Zeigen Sie allgemeiner, dass alle Kreise, die den Rand S^1 des Poincaré-Ballmodells senkrecht schneiden, bei geeigneter Parametrisierung Geodätische im hyperbolischen Raum sind.

Aufgabe 3

Ein Großkreis auf S^2 ist $S^2 \cap E$ für eine Ebene E durch $0 \in \mathbb{R}^3$.

(a) Sei $c\colon [0, 2\pi] \to S^2 \cap E$ nach Bogenlänge parametrisiert. Zeigen Sie: Wenn wir c as Abbildung $c\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ auffassen, gilt $\ddot{c}(t) \perp T_{c(t)}S^2$.

(b) Folgern Sie aus a), dass c eine Geodätische ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es sei ∇ ein beliebiger Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M, und es seien $p \in M$, $v \in T_pM$ beliebig. Wir betrachten $\iota_p \colon T_pM \to TM$ mit $\iota_p(v) = (p,v) \in TM$ und (vgl. Proposition 1.16) $\pi \colon TM \to M$ mit $\pi(p,v) = p$.

(a) Zeigen Sie, dass die Sequenz $0 \longrightarrow \underbrace{T_vT_pM}_{\cong T_pM} \overset{d_v(\iota_p)}{\longrightarrow} T_{(p,v)}TM \overset{d_{(p,v)}\pi}{\longrightarrow} T_pM \longrightarrow 0$ exakt ist, dass also $d_v(\iota_p)$ injektiv, $d_v\pi$ surjektiv ist, und dass im $d_v(\iota_p) = \ker d_v\pi$ gilt.

(b) Einer Kurve $\gamma \colon I \to M$ mit $\gamma(0) = p$ soll das Vektorfeld W längs γ zugeordnet werden, welches $W(0) = v$ und $\nabla^\gamma_{\frac{\partial}{\partial t}} W = 0$ erfüllt. Man kann W als Kurve in TM auffassen. Zeigen Sie, dass die Zuordnung $[\gamma] \mapsto [W]$ eine wohldefinierte lineare Abbildung h von T_pM nach T_vTM liefert. Diese erfüllt $d\pi \circ h = id_{T_pM}$.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildung $[V] \mapsto (\nabla^\gamma_{\frac{\partial}{\partial t}} V(0), \dot\gamma)$ für alle Kurven γ in M und alle Vektorfelder V mit $V(0) = v$ längs γ einen Vektorraumisomorphismus zwischen T_vTM und $T_pM \times T_pM$ definiert.

Beachten Sie: Die Abbildungen in b) und c) hängen von der Wahl von ∇ ab.