

7. ÜBUNGSBLATT

DIFFERENTIALGEOMETRIE I

IM WS 2017/18 BEI PROF. DR. S. GOETTE

Abgabe Donnerstag, den 7.12.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre
Abgabe

Aufgabe 1

Geben Sie eine Formel für Riemannsche Normalkoordinaten $\exp_p^{-1} : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2$ an

- (a) auf S^2 für $p = e_3$, und
- (b) im Poincaré-Ballmodell $(B_1^2(0), g^{\text{hyp}})$ mit $p = 0$.

Geben Sie eine Formel für g in diesen Koordinaten an.

Hinweis: Sie dürfen Aufgaben 2 und 3 von Blatt 6 verwenden.

Aufgabe 2

Es sei (M, g) eine n -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung K und $c: [a, b] \rightarrow M$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodäische auf M .

- (a) Es sei (e_1, \dots, e_n) eine Orthonormalbasis von $T_{c(0)}M$ mit $e_1 = \dot{c}(0)$. Zeigen Sie: Es gibt Vektorfelder $e_i \in \mathfrak{X}(c)$ mit $e_i(0) = e_i$ und $\nabla_{\frac{c}{\partial t}}^c e_i = 0$. Diese Vektorfelder heißen „parallel längs c “.
- (b) Für alle $t \in [a, b]$ gilt $g_{c(t)}(e_i(t), e_j(t)) = \delta_{ij}$.
- (c) Es sei $Y(t) = \sum_{i=1}^n y^i(t)e_i(t) \in \mathfrak{X}(c)$. Übersetzen Sie die Jacobi-Differentialgleichungen in ein Differentialgleichungssystem in den y^i .

Aufgabe 3

Es sei $V = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s}$ das Jacobifeld zu der geodäischen Variation

$$\bar{c}: (s, t) \mapsto \exp_p(t(v + sw)), \quad v, w \in T_p M$$

der Geodäischen c .

- (a) Zeigen Sie, dass die folgende Näherung gilt:

$$\langle V(t), V(t) \rangle = |w|^2 t^2 - \frac{1}{3} \langle R_{w, \dot{c}} w, w \rangle t^4 + O(t^5).$$

- (b) Bestimmen Sie damit die zweiten Ableitungen der Metrik in Normalkoordinaten im Nullpunkt.

Bitte wenden

Aufgabe 4

Wir betrachten auf dem \mathbb{R}^n die Funktionen

$$g_{jk}(x) = \delta_{jk} - \frac{1}{3} \sum_{i,l} T_{ijkl} x^i x^l$$

mit $T_{ijkl} = T_{ikjl} \in \mathbb{R}$ und $i, j, k, l = 1 \dots n$. Die x^k seien die k -ten Koordinatenfunktionen des \mathbb{R}^n .

- (a) Warum liefern die g_{jk} in einer Umgebung um die 0 die Komponenten einer Riemannschen Metrik?
- (b) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k und die Komponenten des Krümmungstensors R im Punkt 0.
- (c) Zeigen Sie: Genau dann, wenn T_{ijkl} die Symmetrien des Krümmungstensors erfüllt, gilt am Punkt 0, dass $T_{ijkl} = \langle R_{e_i, e_j} e_k, e_l \rangle$.