9. Übungsblatt
Differentialgeometrie I
im WS 2017/18 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 21.12.17
10 Uhr (also vor der Vorlesung)
in den Briefkasten (Nr. 3.1)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ der reell projektive Raum von Blatt 1 und $\pi : S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ durch $p \mapsto [p]$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Es gibt eine Riemannsche Metrik g auf $\mathbb{R}P^n$, so dass $d_p\pi : T_pS^n \to T_{[p]}\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ für alle $p \in S^n$ eine lineare Isometrie ist.

(b) Beweisen Sie: Sei $c : \mathbb{R} \to S^n$ Geodätische, dann ist auch $\pi \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}P^n$ Geodätische, und alle Geodätischen auf $\mathbb{R}P^n$ haben diese Form.

(c) Bestimmen Sie für $p = [e_1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ den Schnittort und den konjugierten Ort.

Aufgabe 2

Betrachten Sie $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ als Teilmenge von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, indem Sie Punkte der Form $[(x, y, 0, \ldots, 0)] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit Punkten $[(x, y)] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^1$ identifizieren. Zeigen Sie: $\mathbb{C}\mathrm{P}^1 \subset \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ ist *total geodätisch*, d.h., jede Geodätische in $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ is auch Geodätische in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Finden Sie dazu eine Isometrie von $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, deren Fixpunktmenge $\mathbb{C}\mathrm{P}^1$ als eine Zusammenhangskomponente enthält. Argumentieren Sie dann analog zu Aufgabe 2d von Blatt 6.

Aufgabe 3

Sei M eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Wenn es einen Punkt $p \in M$ gibt, so dass es entlang jeder Geodätischen durch p einen zu p konjugierten Punkt gibt, dann ist M kompakt.

Aufgabe 4

Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und q im Schnittort von p. Zeigen Sie: Der Punkt q ist längs der Kürzesten Geodätischen zu p konjugiert oder es gibt zwei Kürzeste von p nach q oder. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Sei γ eine kürzeste Geodätische mit $\gamma(0) = p, \gamma(t_0) = q$. Betrachten Sie kürzeste Geodätische γ_i von p nach $\gamma(t_0+\epsilon_i)$ für eine positive Nullfolge ϵ_i. Zeigen Sie, dass die Geodätische c_v mit $c_v(0) = p$ und $v = \dot{c}_v(0)$ Häufungspunkt von $\dot{\gamma}_i(0)$ Kürzeste von p nach q ist. Im Fall $c_v \neq \gamma$ gibt es zwei Kürzeste von p nach q.

(b) Zeigen Sie im Fall $c_v = \gamma$, dass $d\exp_p$ am Punkt t_0v nicht regulär sein kann. Konstruieren Sie daraus ein Jacobifeld V entlang γ mit $V(0) = 0 = V(t_0)$. In diesem Fall ist also q längs γ zu p konjugiert.