12. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

Abgabe Donnerstag, den 24.1.19
(zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass $G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$ gilt.

Aufgabe 2

Sei $M = G/H$ ein symmetrischer Raum, bei dem die Gruppe H transitiv auf der Einheitssphäre von $T_{eH}M$ wirkt.
Zeigen Sie, dass es zu je zwei Paaren von Punkten gleichen Abstandes $(p,q), (p',q') \in M \times M$ mit $d(p,q) = d(p',q')$ ein Element $g \in G$ gibt, so dass $p' = g(p)$ und $q' = g(q)$.

Aufgabe 3

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang. Wir definieren außerdem $\nabla_X R$ wie in Definition 3.1 durch

$$(\nabla_X R)_{Y,Z}W = \nabla_X(R_{Y,Z}W) - R_{\nabla_X Y,Z}W - R_{Y,\nabla_X Z}W - R_{Y,Z}\nabla_X W.$$

Zeigen Sie die zweite Bianchi-Identität

$$(\nabla_U R)_{V,W} + (\nabla_V R)_{W,U} + (\nabla_W R)_{U,V} = 0.$$

Aufgabe 4

Es sei $M = SU(n)/SO(n)$ der Raum der orientierten speziellen Lagrangeschen Untervektorräume in $(\mathbb{C}^n, \Omega)$, wobei $\Omega = dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$ ist.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{rk}\, M = n-1$.

(b) Geben Sie alle Flachs der maximalen Dimension explizit an.

(c) Fixieren Sie ein Flach F aus b) und bestimmen Sie alle „Eigenwerte“ $\lambda_i \in \mathrm{Sym}^2 T_p^*F$ des Operators $T_R \in \mathrm{Sym}^2 T_p^*F \otimes \mathrm{End}(T_pM)$ aus Proposition 5.49.

Homework 12, due on Thursday 24.1.19 (beginning of lecture)

Problem 1

Show that $G_2 = \mathrm{Aut}(\mathbb{O})$.

Problem 2

Let $M = G/H$ be a symmetric space such that the group H acts transitively on the unit sphere of $T_{eH}M$.
Show that for each two pairs of points $(p, q), (p', q') \in M \times M$ with $d(p, q) = d(p', q')$, there exists an element $g \in G$ such that $p' = g(p)$ and $q' = g(q)$.

Problem 3

Let (M, g) be a Riemannian manifold and ∇ the Levi Civita connection. Furthermore, we define $\nabla_X R$ as in Defintion 3.1 by

$$(\nabla_X R)_{Y,Z}W = \nabla_X(R_{Y,Z}W) - R_{\nabla_X Y,Z}W - R_{Y,Z}\nabla_X W.$$

Prove the second Bianchi-identity

$$(\nabla_U R)_{V,W} + (\nabla_V R)_{W,U} + (\nabla_W R)_{U,V} = 0.$$

Problem 4

Let $M = SU(n)/SO(n)$ be the space of oriented special Lagrangian subspaces in $(\mathbb{C}^n, \Omega)$, where $\Omega = dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^n$.

(a) ZProve that $\mathrm{rk}\, M = n - 1$.

(b) Give all flats of maximal dimension explicitly.

(c) Fix a flat F from b) and find all „Eigenvalues “$\lambda_i \in \mathrm{Sym}^2\, T_p^* F$ of the operator $T_R \in \mathrm{Sym}^2\, T_p^* F \otimes \mathrm{End}(T_p M)$ from Proposition 5.49.