6. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 29.11.18
(zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Beweisen Sie Proposition 4.30: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Für k-Formen $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ mit $0 \leq k \leq \dim M$ gilt

$$\langle \nabla^* \nabla \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \nabla \alpha, \nabla \beta \rangle_{L^2} .$$

Aufgabe 2

Beweisen Sie die Bochner-Formel aus Satz 4.31: In der Situation aus Aufgabe 1 gilt mit $\mathfrak{R}^k \alpha = -\sum_{j,k} e^j \wedge \iota_{e_k} R_{e_j, e_k} \alpha$, dass

$$(d + d^*)^2 \alpha = \nabla^* \nabla \alpha + \mathfrak{R}^k \alpha.$$

Aufgabe 3

Es sei (M, g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand mit Ricci-Krümmung $ric \geq 0$. Zeigen Sie, dass $H^1_{dR}(M)$ isomorph zum Raum der parallelen Vektorfelder auf M ist.
Hinweis: Drücken Sie zunächst den Rest-Term $\mathfrak{R}^1$ in der Bochner-Formel durch ric aus. Zeigen Sie dann, dass harmonische 1-Formen auf M parallel sind.

Aufgabe 4

Es sei (M, g) eine komplexe Mannigfaltigkeit und $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel mit einer Hermiteschen Metrik h. Zeigen Sie:

(a) Es gibt genau einen Zusammenhang $\nabla \colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M; E)$, so dass

  (1) der $(0, 1)$-Anteil von ∇ gerade $\bar{\partial}^E$ ist und

  (2) $dh(v, w) = h(\nabla v, w) + h(v, \nabla w)$.

(b) * Eine Hermitesche Metrik h auf $TM \to M$ ist genau dann eine Kähler-Metrik, wenn der obige Zusammenhang der Levi-Civita-Zusammenhang ist.

Hinweis zu a): Bestimmen Sie ∇_{e_j} für eine lokale holomorphe Basis $e_1, \ldots, e_r$ von $E|_U$.

Aufgaben mit * sind freiwillige Ergänzungen.

due on Thursday 29.11.18 (beginning of lecture)

Problem 1

Prove Proposition 4.30: Let (M, g) be a Riemannian manifold. For k-forms $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$ with $0 \leq k \leq \dim M$, we have

$$\langle \nabla^* \nabla \alpha, \beta \rangle_{L^2} = \langle \nabla \alpha, \nabla \beta \rangle_{L^2} .$$

Problem 2

Rove the Bochner formula from Theorem 4.31: In the situation of Problem 1, we denote $\mathfrak{R}^k \alpha = -\sum_{j,k} e^j \wedge \iota_{e_k} R_{e_j, e_k} \alpha$. Then

$$(d + d^*)^2 \alpha = \nabla^* \nabla \alpha + \mathfrak{R}^k \alpha.$$

Problem 3

Let (M, g) be a compact Riemannian manifold without boundary and with Ricci curvature $ric \geq 0$. Show that $H^1_{dR}(M)$ is isomorphic to the space of parallel vector fields on M.
Hint: Write the remainder term $\mathfrak{R}^1$ from the Bochner formula in terms of ric. Then show that harmonic 1-forms on M are parallel.

Problem 4

Let (M, g) be a complex manifold and $E \to M$ a holomorphic vector bundle with a Hermitian metric H. Show:

(a) There is a unique connection $\nabla \colon \Gamma(E) \to \Omega^1(M; E)$, such that

  (1) the $(0, 1)$-part of ∇ is exactly $\bar{\partial}^E$ and

  (2) $dh(v, w) = h(\nabla v, w) + h(v, \nabla w)$.

(b) * A Hermitian metric h on $TM \to M$ is a Kähler metric if and only if the above connection is the Levi-Civita connection.

Hint for a): Compute ∇_{e_j} for a local holomorphic basis $e_1, \ldots, e_r$ of $E|_U$.

Problems with * are voluntary.