7. Übungsblatt

Differentialgeometrie II - Spezielle Holonomie

im WS 2018/19 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 6.12.18 (zu Beginn der Vorlesung)

Bitte schreiben Sie Ihren Namen auf Ihre Abgabe

Aufgabe 1

Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, R bezeichne die Krümmung des Zusammenhangs auf ℓ-Formen aus (4.15) und $\mathcal{R}^\ell$ den Operator aus der Bochner-Formel (Satz 4.31).

Zeigen Sie, dass für alle $\alpha \in \Omega^\ell(M)$ bezüglich eines lokalen orthonormalen Rahmens $e_1, ..., e_n$ die folgenden Formeln gelten:

(a) $R_{u,v}\alpha = -\sum_{j,k} \langle R_{u,v} e_j, e_k \rangle \, e^j \wedge \iota_{e_k} \alpha$

(b) $R^\ell \alpha = \sum_{j,k,m,n} \langle R_{e_j,e_k} e_m, e_n \rangle \, e^j \wedge \iota_{e_k}(e^m \wedge \iota_{e_n} \alpha)$

Aufgabe 2

Es sei $M = G/H$ ein symmetrischer Raum vom kompakten Typ.

(a) Zeigen Sie mit Satz 3.19 (3), dass $\left\langle \mathcal{R}^k \alpha, \alpha \right\rangle \geq 0$ für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ gilt.

(b) Folgern Sie, dass für eine k-Form α somit äquivalent sind:

  (1) α ist harmonisch,

  (2) α ist parallel,

  (3) α ist G-invariant.

Hinweis: schreiben Sie den Operator $\mathcal{R}^k$ an der Stelle eH als $-\sum_{a=1}^{\dim \mathfrak{h}} A_a^2$, wobei die A_a schiefadjungierte Endomorphismen von $\Lambda^k \mathfrak{p}^*$ sind.

Aufgabe 3

Es sei $L = \omega \wedge \cdot$ der Lefschetz-Operator wie in Bemerkung 4.44 und L^* der dazu adjungierte Operator. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $L^* \alpha = 2i \sum_{j=1}^n \iota_{e_j} \iota_{\bar{e}_j} \alpha$.

(b) L^* bildet harmonische Formen auf harmonische Formen ab. Berechnen Sie dazu $[L^*, \bar{\partial}]$.

(c) Sei nun $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ eine (p,q)-Form. Dann gilt $H\alpha := [L^*, L]\alpha = (n - p - q)\alpha$.

Aufgabe 4

Es sei (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit und R ihr Riemannscher Krümmungstensor. Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.25 und den Symmetrien des Krümmungstensors für alle Vektoren $u, v, w \in T_pM$ die folgenden Formeln:

(a) $R_{u,v} Jw = JR_{u,v} w$

(b) $R_{Ju,Jv} w = R_{u,v} w$

(c) Wir setzen nun R in allen drei Argumenten komplex linear fort. Folgern Sie dann aus a) und b), dass $R \in \Omega^{1,1}(M; \mathfrak{u}(TM))$.

due on Thursday 29.11.18 (beginning of lecture)

Problem 1

Let (M, g) be a Riemannian manifold, R the curvature of the connection on k-forms as in formula (4.15) and $\mathcal{R}^k$ the operator from the Bochner formula (Proposition 4.31).
Show that with respect to a local orthonormal frame $e_1, ..., e_n$, the following formulas hold for all $\alpha \in \Omega^k(M)$:

(a) $R_{u,v}\alpha = -\sum_{j,\ell}\langle R_{u,v}e_j, e_k\rangle\, e^j \wedge \iota_{e_k}\alpha$

(b) $R^k\alpha = \sum_{j,\ell,m,n}\langle R_{e_j,e_\ell}e_m, e_n\rangle\, e^j \wedge \iota_\ell(e^m \wedge \iota_n\alpha)$

Problem 2

Let $M = G/H$ be a symmetric space of compact type.

(a) Use Proposition 3.19 (3) to show that $\langle \mathcal{R}^k\alpha, \alpha\rangle \to 0$ holds for all $\alpha \in \Omega^k(M)$.

(b) Folgern Sie, dass für eine k-Form α somit äquivariant sind:

  (1) α ist harmonisch,
  (2) α ist parallel,
  (3) α ist G-invariant.

Hinweis: schreiben Sie den Operator $\mathcal{R}^k$ an der Stelle eH als $-\sum_{a=1}^{\dim\mathfrak{h}} A_a^2$, wobei die A_a schiefadjungierte Endomorphismen von $\Lambda^k\mathfrak{p}^*$ sind.

Problem 3

Let $L = \omega \wedge \cdot$ be the Lefschetz operator as in Remark 4.44 and L^* the adjoint operator L^*. Show the following:

(a) Es giltL^* has the form $L^*\alpha = 2i\sum_{j=1}^{n}\iota_{e_j}\iota_{\bar{e}_j}\alpha$.

(b) L^* maps harmonic forms to harmonic forms. To prove this, compute $[L^*, \bar{\partial}]$.

(c) Let now $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ be a (p, q) form. Then $H\alpha := [L^*, L]\alpha = (n - p - q)\alpha$.

Problem 4

Let (M, h) be a Kähler manifold and R its Riemannian curvature tensor. Use Proposition 3.25 and the smmetries of the curvature tensor to show that the following holds for all $u, v, w \in T_pM$:

(a) $R_{u,v}Jw = JR_{u,v}w$

(b) $R_{Ju,Jv}w = R_{u,v}w$

(c) We now extend R complex linearly in all three components. Conclude from a) and b) that $R \in \Omega^{1,1}(M; \mathfrak{u}(TM))$.