Differentialgeometrie I/II

—

WS 17/18 und WS 18/19

Sebastian Goette

Die Differentialgeometrie ist Geometrie mit Methoden der Analysis. Man erweitert den Begriff der Differenzierbarkeit auf Mannigfaltigkeiten. In der Riemannschen Geometrie tragen Mannigfaltigkeiten zusätzlich Riemannsche Metriken. Für diese Riemannschen Mannigfaltigkeiten existieren verschiedene Krümmungsgrößen. Weiterhin lassen sich Geodätische (lokal kürzeste Verbindungskurven zwischen zwei Punkten) durch eine bestimmte Differentialgleichung zweiter Ordnung beschreiben. Dies führt zu Fragestellungen nach Zusammenhängen zwischen Topologie der Mannigfaltigkeit, Krümmung und dem globalen Verhalten von Geodätischen. Ziel der Vorlesung ist es, die oben genannten Begriffe einzuführen, und ein paar dieser Zusammenhänge herauszuarbeiten.

In der Vorlesung werden wir die beiden folgenden Themengebiete behandeln.

(1) **Riemannsche Mannigfaltigkeiten.** Wir definieren den Begriff der Riemannschen Mannigfaltigkeit, und lernen verschiedene Krümmungsbegriffe kennen. Außerdem betrachten wir Überlagerungen und die Fundamentalgruppe. Danach erinnern wir uns an die Bogenlänge von Kurven auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten und betrachten Variationsformeln für die Bogenlänge. Dabei sehen wir, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten einer bestimmten Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen. Das führt uns auf den Begriff der Geodätischen. Im Rest der Vorlesung betrachten wir das globale Verhalten von Geodätischen auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten. Zunächst benutzen wir Geodätische, um Normalkoordinaten und Exponentialabbildung einzuführen. Die Frage, ob Geodätische global existieren, führt auf den Begriff der geodätischen Vollständigkeit.

(2) **Vergleichssätze.** Das globale Verhalten von Geodätischen auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit wird von ihrer Krümmung bestimmt. Wir werden sehen, dass Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung asphärisch sind, d.h., eine universelle Überlagerung besitzen, die diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist. Auf der anderen Seite haben vollständige Mannigfaltigkeiten, deren Ricci-Krümmung größer als eine positive Konstante ist, stets beschränkten Durchmesser und endliche Fundamentalgruppe. Danach setzen wir das Volumenwachstum geodätischer Bälle in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in Beziehung zu ihrer Ricci-Krümmung. Zum Schluss beweisen wir einige Ungleichungen für geodätische Dreiecke in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

KAPITEL 1

Riemannsche Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel führen wir zunächst die grundlegenden Definitionen differenzierbarer und Riemannscher Mannigfaltigkeiten ein. Anschließend lernen wir die zwei Variationsformeln für die Bogenlänge und Geodätische kennen. Die geodätische Exponentialabbildung liefert uns nicht nur geodätische Normalkoordinaten, sondern auch den Begriff der geodätischen Vollständigkeit. Am Ende dieses Kapitels geben wir noch einen Überblick über die Fundamentalgruppe und Überlagerungen von Mannigfaltigkeiten.

1.1. Mannigfaltigkeiten

Definition. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Umgebung U von x, eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{R}^n$ und einen C^k-Diffeomorphismus $\varphi\colon U \to V$ mit

$$U \cap M = \varphi^{-1}(V \cap (\mathbb{R}^m \times \{o\}))$$

gibt. φ heißt Karte von M.

Beispiel. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ist n-dimensionale C^∞ Untermannigfaltigkeit. Eine große Klasse von Untermannigfaltigkeiten liefert der Satz vom regulären Wert. Hierbei heißt $y \in \mathbb{R}^m$ regulärer Wert von $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (U offen), falls $Df(x) = f'(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ surjektiv ist $\forall\, x \in f^{-1}(\{y\})$.

Satz. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \geq 1$ und $y_0 \in \mathbb{R}^m$ ein regulärer Wert von $f \in C^k(U, \mathbb{R}^m)$. Dann ist $f^{-1}(\{y_0\})$ eine $(n-m)$ dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.*

1.1. Beispiel. $Gl(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$ und $SO(n)$ sind C^∞ Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n^2}$.

Wir ersetzen jetzt den Begriff der Untermannigfaltigkeit durch das abstraktere Objekt der Mannigfaltigkeit.

1.2. Definition. Eine *n-dimensionale Mannigfaltigkeit* ist ein Hausdorff-Raum M mit abzählbarer Basis, so dass jeder Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung $U \subset M$ besitzt, die zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist.

1.3. Bemerkung. Es folgen einige weitere Definitionen und Eigenschaften:

(1) Ein *Hausdorff-Raum* ist ein topologischer Raum, in dem je zwei verschiedene Punkte disjunkte offene Umgebungen besitzen.
(2) Eine *abzählbare Basis* eines topologischen Raumes X ist eine abzählbare Menge $\mathcal{B}$ offener Teilmengen von X, so dass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen $U \in \mathcal{B}$ geschrieben werden kann.
(3) Ein Homöomorphismus $\varphi\colon x \to y$ von topologischen Räumen ist eine stetige Abbildung, für die eine stetige Umkehrabbildung existiert.
(4) Eine (n-dimensionale) *Karte* von M ist ein Homöomorphismus $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$, wobei $U^\varphi \subset M$ und $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ offen seien. Eine *Karte* um $p \in M$ ist eine Karte $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ mit $p \in U^\varphi$.

(5) Ein (n-dimensionaler) *Atlas* von M ist eine Menge $\mathcal{A}$ von Karten von M, so dass die Definitionsbereiche der Karten ganz M überdecken. Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist somit ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis, der einen n-dimensionalen Atlas besitzt.
(6) Aus der „Invarianz des Gebietes“ folgt, dass die Dimension eine Invariante ist. Wenn ein topologischer Raum einen m- und einen n-dimensionalen Atlas besitzt, folgt also $m = n$.
(7) Seien schließlich φ, ψ Karten in einem Atlas $\mathcal{A}$, dann heißt die Abbildung

$$\psi \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U^\phi \cap U^\psi) \to \psi(U^\phi \cap U^\psi)$$

ein *Kartenwechsel* im Atlas $\mathcal{A}$. Man beachte, dass $\psi \circ \varphi^{-1}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ auf eine andere homöomorph abbildet. Man kann also fragen, ob der Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ ein $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus ist.

1.4. Definition. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, und sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Ein *$\mathcal{C}^k$-Atlas* auf M ist ein Atlas $\mathcal{A}$ auf M, dessen Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle φ, $\psi \in \mathcal{A}$ $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen sind.

Ein $\mathcal{C}^k$-Atlas heißt *maximal,* wenn er in keinem anderen $\mathcal{C}^k$-Atlas echt enthalten ist.

Eine *n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit* ist ein Paar aus einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und einem maximalen $\mathcal{C}^k$-Atlas von M. Eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit heißt auch *differenzierbare Mannigfaltigkeit.*

1.5. Bemerkung. Man kann leicht zeigen, dass jeder $\mathcal{C}^k$-Atlas $\mathcal{A}$ von M in genau einem maximalen $\mathcal{C}^k$-Atlas $\bar{\mathcal{A}}$ enthalten ist, nämlich in

$$\left\{\, \psi \colon U^\psi \to V^\psi \text{ Karte von } M \;\middle|\; \psi \circ \varphi^{-1} \text{ ist } \mathcal{C}^k\text{-Diffeomorphismus für alle } \varphi \in \mathcal{A} \,\right\} .$$

Es reicht also, einen beliebigen $\mathcal{C}^k$-Atlas auf M anzugeben. In der Praxis möchte man oft so wenig Karten wie nötig benutzen.

In diesem Sinne liefern zwei $\mathcal{C}^k$-Atlanten $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ von M die gleiche $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, wenn sie in dem gleichen maximalen Atlas enthalten sind. Das gilt genau dann, wenn die Kartenwechsel $\psi \circ \varphi^{-1}$ für alle $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{A}'$ $\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismen sind.

1.6. Beispiel. (1) $\mathbb{R}^n$ ist n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit für alle k mit Atlas $\{\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}\}$. Genauso ist jede offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\{\mathrm{id}_U\}$.
(2) Die n-dimensionale Kugel $S^n = \left\{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; |x| = 1 \,\right\}$ ist eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit für alle k. Die stereographischen Projektionen an den Punkten $\pm e_{n+1}$ bilden einen Atlas $\{\varphi_+, \varphi_-\}$ mit

$$\varphi_\pm \colon S^n \setminus \{\pm e_{n+1}\} \to \mathbb{R}^n , \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{1 \mp x_{n+1}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} .$$

Die Umkehrabbildungen werden gegeben durch

$$\varphi_\pm^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{y_1^2 + \cdots + y_n^2 + 1} \begin{pmatrix} 2y_1 \\ \vdots \\ 2y_n \\ \pm y_1^2 \pm \cdots \pm y_n^2 \mp 1 \end{pmatrix} ,$$

also erhalten wir als Kartenwechsel zum Beispiel

$$\varphi_- \circ \varphi_+^{-1} \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \qquad \text{mit} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{y_1^2 + \cdots + y_n^2} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Es ist jetzt leicht zu sehen, dass dieser und alle anderen Kartenwechsel $\mathcal{C}^\infty$-Diffeomorphismen sind.

1.7. Bemerkung. (1) Sei $0 \le l \le k$, und sei $(M, \mathcal{A})$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, dann ist M trivialerweise auch eine $\mathcal{C}^l$-Mannigfaltigkeit, wobei der maximale $\mathcal{C}^k$-Atlas automatisch zu einem (im allgemeinen nicht maximalen) $\mathcal{C}^l$-Atlas wird.

(2) Die Umkehrung ist nicht trivial: sei $1 \le l \le k$, und sei $(M, \mathcal{A})$ ein $\mathcal{C}^l$-Mannigfaltigkeit. Nach einem Resultat von Whitney enthält $\mathcal{A}$ einen $\mathcal{C}^k$-Atlas, ja sogar einen Atlas mit reell analytischen Kartenwechseln, siehe [**GKM**], §1.1.1. Wir werden solche reell analytischen Mannigfaltigkeiten jedoch nicht weiter betrachten, da $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeiten für alle folgenden Konstruktionen genau das richtige Maß an Flexibilität bieten.

(3) Nicht jede toplogische (also $\mathcal{C}^0$-)Mannigfaltigkeit M trägt einen $\mathcal{C}^k$-Atlas mit $k \ge 1$, und wenn doch, kann es verschiedene, nicht diffeomorphe $\mathcal{C}^k$-Strukturen auf M geben, beispielsweise 28 verschiedene solche Strukturen auf S^7, oder überabzählbar viele auf $\mathbb{R}^4$.

Wir wollen auch Untermannigfaltigkeiten betrachten.

1.8. Definition. Sei $(N, \mathcal{A})$ eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Eine *m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit* von N ist eine Teilmenge $M \subset N$, so dass zu jedem $p \in M$ eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ mit

$$\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad M \cap U^\varphi = \varphi^{-1}\big(V^\varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})\big)$$

existiert. Eine solche Karte φ heißt *Untermannigfaltigkeitskarte* von M in N.

1.9. Bemerkung. (1) Jede $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit M von N ist selbst eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Dazu versehen wir M zunächst mit der Unterraumtopologie, dann erbt M die Hausdorff-Eigenschaft und eine abzählbare Basis von N. Als $\mathcal{C}^k$-Atlas wählen wir

$$\left\{\, \varphi|_{U^\varphi \cap M}\colon U^\varphi \cap M \to V^\varphi \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^m \;\middle|\; \varphi \text{ ist Untermannigfaltigkeitskarte} \,\right\} .$$

(2) Insbesondere ist jede $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit. Die Umkehrung ist ein weiterer **Satz von Whitney:** *jede m-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit M ist diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.* Dabei kann $n = 2m + 1$ gewählt werden (sogar $n = 2m$, falls M kompakt ist), siehe [**GKM**], §1.1.6.

1.10. Definition. Seien $(M, \mathcal{A})$, $(N, \mathcal{A}')$ zwei $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $F\colon M \to N$ heißt *$\mathcal{C}^k$-differenzierbar,* wenn sie stetig ist und die Abbildungen

$$F^{\varphi,\psi} = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}|_{\varphi(U^\varphi \cap F^{-1}U^\psi)}\colon \varphi\big(U^\varphi \cap F^{-1}(U^\psi)\big) \to V^\psi$$

für alle Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{A}'$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist. Sie heißt *$\mathcal{C}^k$-Diffeomorphismus,* falls die Umkehrabbildung existiert und ebenfalls $\mathcal{C}^k$-differenzierbar ist.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann heißt eine $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Abbildung $\gamma\colon I \to M$ auch eine *$\mathcal{C}^k$-Kurve* in M. Eine $\mathcal{C}^k$-differenzierbare Abbildung $f\colon M \to \mathbb{R}$ heißt auch eine *$\mathcal{C}^k$-Funktion* auf M.

In Zukunft werden wir statt $(M, \mathcal{A})$ einfach nur noch M schreiben. Wir schreiben $\mathcal{C}^k(M, N)$ für die Menge der $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Abbildungen von M nach N, und $\mathcal{C}^k(M) = \mathcal{C}^k(M, \mathbb{R})$ für den Vektorraum der $\mathcal{C}^k$-differenzierbaren Funktionen auf M.

1.11. Bemerkung. Die $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten bilden die Objekte einer Kategorie, deren Morphismen von M nach N gerade durch $\mathcal{C}^k(M, N)$ gegeben sind.

Der Raum $\mathcal{C}^k(M)$ trägt eine Algebren-Struktur, gegeben durch punktweise Multiplikation von Funktionen,

$$(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p) .$$

1.12. Beispiel. Für späteren Gebrauch konstruieren wir sogenannte „Abschneidefunktionen“, die nahe eines festen Punktes $p \in M$ konstant 1 sind und außerhalb einer etwas größeren Umgebung von M verschwinden.

Betrachte dazu zunächst $\vartheta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\vartheta(r) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{r}} & \text{für } r > 0, \text{ und} \\ 0 & \text{für } r \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\vartheta(r) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r > 0 \; .$$

Sei jetzt $p \in M$, und sei φ Karte um p, o.B.d.A. mit $\varphi(p) = 0$. Wähle $0 < a < b$ so, dass $\overline{B_b(0)} \subset V^\varphi$, wobei

$$B_r(x) = \left\{ \, y \in \mathbb{R}^n \; \middle| \; |x - y| < r \, \right\} .$$

Der Überblick bezeichnet den topologischen Abschluss, also $\overline{B_b(0)} = \{ \, y \in \mathbb{R}^n \mid |y| \leq r \, \}$. Dann definiere eine Abschneidefunktion $\rho \in \mathcal{C}^\infty(M)$ durch

$$\rho(q) = \begin{cases} \dfrac{\vartheta(b - |\varphi(q)|)}{\vartheta(b - |\varphi(q)|) + \vartheta(|\varphi(q)| - a)} & \text{für } q \in U^\varphi, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es folgt

$$\rho|_{\varphi^{-1}\overline{B_a(0)}} \equiv 1 \qquad \text{und} \qquad \rho|_{M \setminus \varphi^{-1}\overline{B_b(0)}} \equiv 0 \; .$$

Insbesondere ist der *Träger* von ρ gerade

$$\operatorname{supp}(\rho) := \overline{\{ \, q \in M \mid \rho(q) \neq 0 \, \}} = \varphi^{-1}\overline{B_b(0)} \; .$$

Als nächstes definieren wir das Tangentialbündel. Zunächst wollen wir Tangentialvektoren auf drei verschiedene Arten darstellen und uns überlegen, dass wir jedesmal die gleichen Objekte erhalten. Eine beliebige Karte φ schreiben wir als

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^1 \\ \vdots \\ \varphi^n \end{pmatrix} : U^\varphi \to V^\varphi \subset \mathbb{R}^n \; ,$$

dann heißen die Funktionen $\varphi^i \colon U^\varphi \to \mathbb{R}$ die *Koordinatenfunktionen* von φ.

1.13. Definition. Sei M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$, und sei $p \in M$.

(1) Ein *algebraischer Tangentialvektor* in p ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\partial \colon \mathcal{C}^k(M) \to \mathbb{R}$ mit

$$\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g \qquad \text{für alle } f,\, g \in \mathcal{C}^k(M) \; .$$

(2) Ein *physikalischer Tangentialvektor* $(v_\varphi)_\varphi$ in p ordnet jeder Karte φ von M um p einen Vektor $v_\varphi \in \mathbb{R}^n$ zu, so dass

$$v_\psi^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \, v_\varphi^j$$

für alle Karten φ, ψ um p und alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

(3) Ein *geometrischer Tangentialvektor* in p ist eine Äquivalenzklasse von Kurven $\gamma \colon I \to M$ mit $0 \in I \subset \mathbb{R}$ und $\gamma(0) = p$ unter der Äquivalenzrelation

$$\gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (\varphi \circ \gamma_1)^{\boldsymbol{\cdot}}(0) = (\varphi \circ \gamma_2)^{\boldsymbol{\cdot}}(0)$$

für eine Karte φ von M um p.

In (3) ist es egal, welche Karte φ wir wählen, denn $\gamma_1 \sim \gamma_2$ gilt für eine bestimmte Karte φ genau dann, wenn es für alle Karten um p gilt.

Die algebraische Definition ist sowohl die eleganteste als auch die am schwierigsten zu verstehende.

1.14. Proposition. *Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und sei φ eine Karte um p. Eine Abbildung $\partial\colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ist genau dann ein algebraischer Tangentialvektor in p, wenn es einen Vektor $V \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass*

$$\partial f = V_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1}) = d_{\varphi(p)}(f \circ \varphi^{-1})(V) .$$

Man beachte, dass diese Proposition falsch ist für $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k < \infty$ ([**GKM**], §1.1.3).

Beweis. „$\Leftarrow$" ist klar.

Zu „$\Rightarrow$" zunächst ein paar Vorüberlegungen. Aus der Produktregel folgt für die konstante Funktion 1, dass

$$\partial 1 = \partial(1 \cdot 1) = \partial 1 \cdot 1 + 1 \cdot \partial 1 = 2\,\partial 1 \quad \Longrightarrow \quad \partial 1 = 0 .$$

Wegen $\mathbb{R}$-Linearität folgt für die konstante Funktion $p \mapsto r \in \mathbb{R}$, dass

$$\partial r = r \cdot \partial 1 = 0 . \tag{1.1}$$

Sei nun f beliebig, und sei φ Karte um p. O.B.d.A. gelte $\varphi(p) = 0$ und $B_1(0) \subset V^\varphi$. Dann konstruieren wir zwei Abschneidefunktionen ρ_1, $\rho_2 \in \mathcal{C}^\infty(M)$ wie in Beispiel 1.12 mit

$$\begin{aligned} \rho_1|_{\varphi^{-1}B_{\frac{1}{4}}(0)} &\equiv 1 , & & \operatorname{supp}\rho_1 = \varphi^{-1}\overline{B_{\frac{1}{2}}(0)} , \\ \rho_2|_{\varphi^{-1}B_{\frac{1}{2}}(0)} &\equiv 1 & \text{und} \qquad & \operatorname{supp}\rho_1 = \varphi^{-1}\overline{B_{\frac{3}{4}}(0)} . \end{aligned}$$

Es folgt, dass $\rho_1 = \rho_1 \cdot \rho_2$, also

$$\partial\rho_1 = \partial(\rho_1 \cdot \rho_2) = \partial\rho_1 \cdot \rho_2(p) + \rho_1(p) \cdot \partial\rho_2 = \partial\rho_1 + \partial\rho_2 \quad \Longrightarrow \quad \partial\rho_2 = 0 .$$

Da wir zu jeder Abschneidefunktion ρ_2 um p wie in Beispiel 1.12 eine Abschneidefunktion ρ_1 um p mit $\rho_2|_{\operatorname{supp}(\rho_1)} = 1$ finden können, gilt $\partial\rho = 0$ für jede Abschneidefunktion ρ um p und jeden algebraischen Tangentialvektor ∂ im Punkt p.

Insbesondere gilt

$$\partial(\rho \cdot f) = \rho(p) \cdot \partial f + \partial\rho \cdot f(p) = \partial f . \tag{1.2}$$

Also hängt ∂f nur von dem Verhalten von f in einer kleinen Umgebung von p ab.

Sei jetzt φ eine Karte um p mit $\varphi(p) = 0$, und sei ρ eine Abschneidefunktion mit $\operatorname{supp}(\rho) \subset U^\varphi$. Wir definieren Funktionen $f_i\colon M \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{supp} f_i \subset U^\varphi$,

$$f_i(q) = \rho(q) \cdot \begin{cases} \dfrac{(f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^i, \dots, y^n) - (f \circ \varphi^{-1})(0, \dots, 0, y^{i+1}, \dots, y^n)}{y^i} & \text{falls } y_i \neq 0, \text{ und} \\ \dfrac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial y^i}(0, \dots, 0, y^{i+1}, \dots, y^n) & \text{für } y^i = 0. \end{cases}$$

für alle $q \in U^\varphi$ und $y = \varphi(q) \in V^\varphi$. Insbesondere gilt

$$f_i(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=0} . \tag{1.3}$$

Man überzeugt sich leicht, dass f_i von der Klasse $\mathcal{C}^\infty$ ist (wäre $f \in \mathcal{C}^k(M)$, so wäre im allgemeinen $f_i \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$, und der Beweis bräche hier zusammen). Aus $y^i = \varphi^i(q)$ folgt

$$\rho \cdot f = f(p) \cdot \rho + \sum_{i=1}^n \varphi^i \cdot f_i$$

auf ganz U^φ.

Wir setzen die Funktionen $\rho\varphi^i\colon U^\varphi \to \mathbb{R}$ auf ganz M fort. Aus (1.1), (1.2) und (1.3) erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned}\partial f &= \partial(\rho^2 \cdot f) = f(p) \cdot \partial\rho^2 + \sum_{i=1}^n \partial((\rho\varphi^i) \cdot f_i)\\ &= \sum_{i=1}^n \Big(\partial(\rho\varphi^i) \cdot f_i(p) + \underbrace{(\rho\varphi^i)(p)}_{=0} \cdot \partial f_i\Big) = \sum_{i=1}^n \partial(\rho\varphi^i) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}\Big|_{x=0}\\ &= d_0(f \circ \varphi^{-1})(v_\varphi)\ ,\end{aligned}$$

mit

$$v_\varphi = \begin{pmatrix} \partial(\rho\varphi^1) \\ \vdots \\ \partial(\rho\varphi^n) \end{pmatrix} . \qquad \square$$

1.15. Satz und Definition. *Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$, dann existiert eine natürliche Bijektion zwischen den Mengen der physikalischen und der geometrischen Tangentialvektoren in p. Wir identifizieren beide Mengen und sprechen fortan nur noch vom* Tangentialraum T_pM *von M im Punkt p. Dieser Raum trägt eine natürliche Vektorraumstruktur aufgrund von Definition 1.13* (2).

Für alle k ist die natürliche Abbildung von T_pM in den Raum der algebraischen Tangentialvektoren injektiv, für $k = \infty$ sogar bijektiv. In diesem Fall identifizieren wir alle drei Mengen.

Beweis. Wir rekapitulieren hier die „Übersetzungsvorschriften“ zwischen den drei Begriffen, da wir später häufiger zwischen den verschiedenen Interpretationen hin- und herwechseln wollen. Den formalen Beweis, dass die angegebenen Abbildungen jeweils wohldefinierte Bijektionen (Injektionen) sind, überlassen wir als Übung.

Sei zunächst ∂ ein algebraischer Tangentialvektor in p, dann erhalten wir einen physikalischen Tangentialvektor v in p durch die Zuordnung

$$v_\varphi^i = \partial\varphi^i := \partial(\rho \cdot \varphi)$$

für eine geeignete Abschneidefunktion ρ. In der Tat kann man wie in Proposition 1.14 zeigen, dass

$$v_\psi^i = \partial(\psi^i \circ \varphi^{-1} \circ \varphi^i) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j}\Big|_{\varphi(p)} \partial\varphi^j\ .$$

Sei umgekehrt φ eine Karte von M um p, dann definieren wir Richtungsableitungen bei p durch

$$\frac{\partial f}{\partial\varphi^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p))\ .$$

Sei nun $v = (v_\varphi)_\varphi$ ein physikalischer Tangentialvektor, dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor

$$\partial := \sum_{i=1}^n v_\varphi^i \frac{\partial}{\partial\varphi^i}\Big|_p\ .$$

Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) ist es egal, welche Karte φ wir zur Konstruktion von ∂ heranziehen.

Sei wieder v ein physikalischer Tangentialvektor. Wir wählen eine Karte φ um p und erhalten eine Kurve

$$\gamma_\varphi\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to U^\varphi \qquad \text{mit} \qquad \gamma_\varphi(t) = \varphi^{-1}(t \cdot v_\varphi)$$

für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Aufgrund der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) sind die Kurven γ_φ für alle Karten φ um p paarweise äquivalent im Sinne von Definition 1.13 (3), wir erhalten also einen geometrischen Tangentialvektor $[\gamma_\varphi]$.

Sei umgekehrt γ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, dann definiert

$$v_\varphi := (\varphi \circ \gamma)^\cdot(0)$$

einen physikalischen Tangentialvektor in p unabhängig von $\gamma \in [\gamma]$.

Sei wieder γ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$, dann erhalten wir einen algebraischen Tangentialvektor ∂ mit

$$\partial f = (f \circ \gamma)^\cdot(0)$$

Für die umgekehrte Abbildung gehen wir den Umweg über physikalische Tangentialvektoren.

Schließlich zur Vektorraumstruktur: Die algebraischen Tangentialvektoren bilden einen Vektorraum mit den Verknüpfungen

$$(\partial_1 + \partial_2)(f) = \partial_1 f + \partial_2 f \qquad \text{und} \qquad (r \cdot \partial)(f) = r \cdot (\partial f) \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R}\ .$$

Analog bilden die physikalischen Tangentialvektoren einen Vektorraum mit

$$(v + w)_\varphi = v_\varphi + w_\varphi \qquad \text{und} \qquad (r \cdot v)_\varphi = r \cdot (v_\varphi) \qquad \text{für alle } r \in \mathbb{R}\ .$$

Die obigen Operationen sind verträglich mit der Transformationsvorschrift in Definition 1.13 (2) und den obigen Bijektionen. □

1.16. Proposition und Definition. *Sei M eine n-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit Atlas $\mathcal{A}$. Die Vereinigung*

$$TM = \dot{\bigcup_{p \in M}} T_pM = \{\, (p, v) \mid p \in M, v \in T_pM \,\}$$

trägt eine Topologie, so dass $\mathcal{A} = \{\, d\varphi \mid \varphi \text{ Karte von } M \,\}$ einen $2n$-dimensionalen $\mathcal{C}^{k-1}$-Atlas auf TM definiert, wobei

$$d\varphi\colon U^{d\varphi} := \bigcup_{p \in U^\varphi} T_pM \longrightarrow V^{d\varphi} := V^\varphi \times \mathbb{R}^n \qquad \textit{mit} \qquad (p, v) \mapsto \big(\varphi(p), v_\varphi\big)\ .$$

Die Mannigfaltigkeit TM heißt das Tangentialbündel *von M, die $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung*

$$\pi\colon TM \longrightarrow M \qquad \textit{mit} \qquad (p, v) \mapsto p$$

heißt die (Fußpunkt-) Projektion.

Beweis. Die Topologie auf TM wird wie folgt definiert: Eine Teilmenge $U \subset TM$ heißt offen, wenn zu jedem Vektor $(p, v) \in U$ eine Karte $d\varphi$ um (p, v) mit $\varphi \in \mathcal{A}$ existiert, so dass $d\varphi(U \cap U^{d\varphi}) \subset \mathbb{R}^{2n}$ offen ist. Man überprüft leicht, dass

(1) dadurch tatsächlich eine Topologie definiert wird,
(2) die angegebene Topologie Hausdorffsch ist,
(3) eine abzählbare Basis besitzt,
(4) und nicht vom Atlas $\mathcal{A}$, sondern nur vom dazugehörigen maximalen Atlas abhängt.

Man muss auch zeigen, dass $\{\, d\varphi \mid \varphi \in \mathcal{A} \,\}$ einen Atlas bildet. Die Kartenwechsel haben die Gestalt

$$\big(d\psi \circ (d\varphi)^{-1}\big)(x, v) = \big((\psi \circ \varphi^{-1})(x), d_x(\psi \circ \varphi^{-1})(v)\big)\ .$$

Da $\psi \circ \varphi^{-1}$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist, ist $d(\psi \circ \varphi^{-1})$ eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung, und das gleiche gilt dann auch für $d\psi \circ (d\varphi)^{-1}$. Somit haben wir einen $\mathcal{C}^{k-1}$-Atlas für TM konstruiert. □

Sei jetzt $F\colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung zwischen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$. Dann induziert F eine Abbildung $dF\colon TM \to TN$. Wir geben drei Konstruktionen dieser Abbildung an. Für $p \in M$ definieren wir zunächst $d_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$.

(1) Falls $k = \infty$ und $\partial \in T_pM$ ein algebraischer Tangentialvektor ist, dann definiere

$$\big(d_pF(\partial)\big)(f) = \partial(f \circ F) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}^\infty(N)\ .$$

(2) Sei φ Karte von M um p und ψ Karte von N um $F(p)$, und sei $v \in T_pM$ physikalischer Tangentialvektor. In der Notation von Definition 1.10 definiere

$$(d_pF(v))_\psi = dF^{\varphi,\psi}{}_{\varphi(p)}(v_\varphi) \in T_{F(p)}N\ .$$

(3) Sei schließlich $\gamma\colon I \to M$ eine Kurve mit $\gamma(0) = p$ und $[\gamma]$ der dazugehörige geometrische Tangentialvektor. Dann definiere

$$d_pF([\gamma]) = [F \circ \gamma] \in T_{F(p)}N\ .$$

In den Konstruktionen (2) und (3) ist wieder Wohldefiniertheit zu beweisen. Insgesamt definieren wir schließlich

$$dF\colon TM \to TN \qquad \text{durch} \qquad dF(p,v) = d_pF(v) \qquad \text{für alle } (p,v) \in TM\ .$$

1.17. Satz und Definition. *Sei $F\colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung zwischen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 1$. Dann definieren die drei obigen Konstruktionen dieselbe faserweise lineare $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung $dF\colon TM \to TN$, das* Differential *von F.*

Die Zuordnung $M \mapsto TM$ und $F \mapsto dF$ definiert einen Funktor von der Kategorie der $\mathcal{C}^k$- ($\mathcal{C}^\infty$-) Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der $\mathcal{C}^{k-1}$- ($\mathcal{C}^\infty$-) Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Man sieht leicht, dass die obigen drei Konstruktionen wohldefiniert und mit den Abbildungen aus dem Beweis von Satz 1.15 verträglich sind. Hieraus folgt, dass (1)–(3) die gleiche Abbildung $d_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ für alle $p \in M$, und damit auch die gleiche Abbildung $dF\colon TM \to TN$ definieren.

Um zu zeigen, dass dF von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ ist betrachten wir beliebige Karten φ von M und ψ von N. Nach Definition 1.16 und obiger Konstruktion (2) erhalten wir

$$\begin{aligned} dF^{d\varphi,d\psi}(x,v_\varphi) &= (d\psi \circ dF \circ (d\varphi)^{-1})(x,v_\varphi) = (d\psi \circ dF)\big(p,v\big) \\ &= \big(F^{\varphi,\psi}(x), dF^{\varphi,\psi}{}_x(v_\varphi)\big) \end{aligned}$$

mit $x = \varphi(p)$ und $v_\varphi = d\varphi(v)$. Somit ist dF in den Karten $d\varphi$ von TM und $d\psi$ von TN durch die Abbildung

$$dF^{d\varphi,d\psi} = \big(F^{\varphi,\psi}, dF^{\varphi,\psi}\big)\colon V^{d\varphi} \to V^{d\psi}$$

gegeben. Da $F^{\varphi,\psi}$ von der Klasse $\mathcal{C}^k$ ist, ist $dF^{\varphi,\psi}$ von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$, also ist dF eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Abbildung.

Funktorialität folgt aus

(1) $d\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{TM}$ für alle $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten M, und
(2) (*Kettenregel*) $d(F \circ G) = dF \circ dG$ für alle $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten L, M, N und alle Abbildungen $F\colon M \to N$ und $G\colon L \to M$.

Diese Aussagen überlassen wir dem Leser als Übung. □

1.18. Definition. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel $\pi\colon TM \to M$ und $\ell \leq k-1$. Ein *$\mathcal{C}^\ell$-Vektorfeld* auf M ist eine $\mathcal{C}^\ell$-Abbildung $X\colon M \to TM$, so dass $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$. Der Raum aller $\mathcal{C}^\ell$-Vektorfelder auf M wird mit $\mathfrak{X}^\ell(M)$ oder mit $\Gamma(TM)$ bezeichnet.

Mit anderen Worten: Ein Vektorfeld X ordnet jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor $X_p \in T_pM$ zu, denn $(\pi \circ X)(p) = \pi(X_p) = p$. Diese Abbildung ist von der Klasse $\mathcal{C}^\ell$ im Sinne der Definitionen 1.10 und 1.16.

1.19. Beispiel. (1) Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann erhalten wir Vektorfelder $e_1, \dots, e_n$ auf der $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^n$. Für $x \in \mathbb{R}^n$ realisieren wir den Vektor $e_i|_x \in T_x\mathbb{R}^n$ geometrisch durch die Kurve

$$t \mapsto x + t \cdot e_i \ ,$$

physikalisch durch den Vektor

$$(e_i|_p)_{\mathrm{id}} = e_i$$

in der Karte $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, und algebraisch durch die Richtungsableitung

$$f \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \ .$$

(2) Sei $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ eine Karte von M, dann ist $U^\varphi \subset M$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Im Beweis von Satz 1.15 haben wir Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n} \in \mathfrak{X}^{k-1}(U^\varphi)$ definiert. In der Karte φ erhalten wir einfach

$$\left(d\varphi \circ \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \circ \varphi^{-1}\right)(x) = d\varphi\left(\varphi^{-1}(x), \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_{\varphi^{-1}(x)}\right) = (x, e_i) \ .$$

1.20. Bemerkung. (1) $\mathfrak{X}^\ell(M)$ ist ein reeller Vektorraum, da sich Vektorfelder mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ multiplizieren und punktweise addieren lassen.

(2) $\mathfrak{X}^\ell(M)$ ist ein $\mathcal{C}^\ell(M)$-Modul, dabei sei

$$(fX)_p = (f \cdot X)_p = f(p) \cdot X_p \in T_pM$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\ell(M)$, $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$ und alle $p \in M$. Da $\mathcal{C}^k(M) \subset \mathcal{C}^\ell(M)$, ist $\mathfrak{X}^\ell(M)$ erst recht ein $\mathcal{C}^k(M)$-Modul.

(3) Man kann Funktionen nach Vektorfeldern ableiten und erhält eine Ableitung $d\colon \mathcal{C}^{\ell+1}(M) \times \mathfrak{X}^\ell(M) \to \mathcal{C}^\ell(M)$ mit

$$df(X) := X(f) \ , \qquad \text{mit} \qquad d_pf(X) = X_p(f) \in \mathbb{R}$$

für alle $f \in \mathcal{C}^{\ell+1}(M)$, $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$ und alle $p \in M$. Hierbei haben wir benutzt, dass jeder (physikalische oder geometrische) Tangentialvektor wie im Beweis von Satz 1.15 einen algebraischen Tangentialvektor, also eine Richtungsableitung definiert. Es gilt dann die Produktregel

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot (X(g)) \qquad \text{für alle } f,\, g \in \mathcal{C}^{\ell+1}(M) \text{ und alle } X \in \mathfrak{X}^\ell(M) \ .$$

(4) Die beiden Verknüpfungen aus (2) und (3) hängen wie folgt zusammen:

$$(f \cdot X)(g) = f \cdot (X(g)) \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{C}^\ell(M),\, g \in \mathcal{C}^{\ell+1}(M) \text{ und alle } X \in \mathfrak{X}^\ell(M) \ .$$

1.21. Bemerkung. Eine *Derivation* auf einer $\Bbbk$-Algebra $\Bbbk$ ist eine $\Bbbk$-lineare Abbildung

$$\mathcal{D}\colon A \to A$$

die eine Produktregel erfüllt:

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}f \cdot g + f \cdot \mathcal{D}g \qquad \text{für alle } f,\, g \in A \ .$$

Sei M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit, so kann man wie im Beweis von Satz 1.15 zeigen, dass der $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul $\mathfrak{X}^\infty(M)$ isomorph zum $\mathcal{C}^\infty(M)$-Modul der Derivationen auf $\mathcal{C}^\infty(M)$ ist (vergleiche Bemerkung 1.20 (3)). Entscheidend ist die Beobachtung, dass für alle $p \in M$ gilt

$$\bigl(\mathcal{D}(f \cdot g)\bigr)(p) = (\mathcal{D}f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot (\mathcal{D}g)(p) ,$$

somit ist $\mathcal{D}_p = \mathcal{D}(\,\cdot\,)(p)$ ein (algebraischer) Tangentialvektor am Punkt p. Wir erhalten also eine „algebraische" Beschreibung von Vektorfeldern.

1.22. Bemerkung. Sei $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$ ein Vektorfeld und φ eine Karte von M, dann erhalten wir eine $\mathcal{C}^\ell$-Abbildung

$$d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \colon V^\varphi \to V^{d\varphi} = V^\varphi \times \mathbb{R}^n$$

mit

$$x \mapsto \bigl(x, (X_{\varphi^{-1}(x)})_\varphi\bigr) =: \bigl(x, X_\varphi(x)\bigr) .$$

Wir nennen $X_\varphi \colon V^\varphi \to \mathbb{R}^n$ das *Vektorfeld X in den Koordinaten φ.*

Seien $X_\varphi^1, \dots, X_\varphi^n \colon V^\varphi \to \mathbb{R}$ die Komponenten der Funktion X_φ, dann erhalten wir mit den Vektorfeldern aus Beispiel 1.19 (2), dass

$$X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n (X_\varphi^i \circ \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} .$$

Als $\mathcal{C}^\ell(U^\varphi)$-Modul ist $\mathfrak{X}^\ell(U^\varphi)$ also frei mit der Basis $\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^n}$. Auf beliebigen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten ist $\mathfrak{X}^\ell(M)$ im allgemeinen jedoch kein freier $\mathcal{C}^\ell(M)$-Modul.

Wir berechnen X_φ wie folgt:

$$X|_{U^\varphi}(\varphi^i) = \sum_{j=1}^n (X_\varphi^j \circ \varphi) \cdot \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi^j} = \sum_{j=1}^n (X_\varphi^j \circ \varphi) \cdot \frac{\partial(\varphi^i \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} = X_\varphi^i \circ \varphi ,$$

also

$$X_\varphi^i = \bigl(X|_{U^\varphi}(\varphi^i)\bigr) \circ \varphi^{-1}$$

und

$$X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n X|_{U^\varphi}(\varphi^i) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} .$$

Es gibt auch eine „geometrische" Beschreibung von Vektorfeldern mit Hilfe von Flüssen. Hierbei löst man eine zum Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$ assoziierte gewöhnliche Differentialgleichung auf M und erhält dadurch eine Schar von Integralkurven auf M, deren Geschwindigkeitsvektor an jeder Stelle gleich X ist.

Wir wollen jetzt eine Lie-Algebren-Struktur auf $\mathfrak{X}^\infty(M)$ einführen. Die Lie-Klammer ist später wichtig bei der Definition 1.39 des Levi-Civita-Zusammenhangs und bei der Definition 1.45 des Riemannschen Krümmungstensors.

1.23. Definition. Eine *Lie-Klammer* auf einem $\Bbbk$-Vektorraum V ist eine Abbildung

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,] \colon V \times V \to V$$

mit den Eigenschaften

(1) *Linearität:* $[au + bv, w] = a[u,w] + b[v,w]$ für alle a, $b \in K$ und u, v, $w \in V$;
(2) *Antisymmetrie:* $[u,v] = -[v,u]$ für alle v, $w \in V$;
(3) *Jacobi-Identität:* für alle u, v, $w \in V$ gilt

$$\bigl[u,[v,w]\bigr] + \bigl[v,[w,u]\bigr] + \bigl[w,[u,v]\bigr] = 0 .$$

Das Paar $(V, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ heißt dann eine *Lie-Algebra.*

Aus (1) und (2) folgt Bilinearität.

1.24. Beispiel. Auf den Raum $M_n(K)$ der $n \times n$-Matrizen über einem Körper $\Bbbk$ ist eine Lie-Klammer definiert durch

$$[A, B] = AB - BA .$$

Die Jacobi-Identität folgt aus der Assoziativität des Matrixproduktes. Eine analoge Definition funktioniert auf jeder assoziativen Algebra.

Die obige Lie-Klammer auf $M_n(\Bbbk)$ lässt sich auf einige interessante Unterräume wie die Räume $\mathfrak{o}(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ der schiefsymmetrischen oder $\mathfrak{u}(n) \subset M_n(\mathbb{C})$ der antiselbstadjungierten Matrizen einschränken.

Wir beginnen mit einer „algebraischen" Beschreibung der Lie-Klammer auf Vektorfeldern. Sei M eine glatte (also $\mathcal{C}^\infty$-) Mannigfaltigkeit, und seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Wir definieren den Operator

$$[X, Y] \colon \mathcal{C}^\infty(M) \to \mathcal{C}^\infty(M) \qquad \text{durch} \qquad [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

für alle $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Aus der Produktregel in Bemerkung 1.20(3) folgt

$$\begin{aligned} [X, Y](f \cdot g) &= \dots \\ &= ([X, Y](f)) \cdot g + f \cdot ([X, Y](g)) . \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 1.21 ist $[X, Y]$ wieder eine Derivation auf M, also ein Vektorfeld.

In Karten geben wir dieses Vektorfeld unten an. Wir wollen nun eine allgemeinere Beschreibung der Lie-Klammer auf $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten geben. Wenn X ein Vektorfeld auf M ist, und $F \colon M \to N$ differenzierbar, dann ist $dF(X)$ eine Abbildung $M \to TN$, aber kein Vektorfeld auf N. Daher folgende Definition.

1.25. Definition. Sei $F \colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung zwischen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten. Zwei Vektorfelder $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(N)$ heißen *F-verwandt,* wenn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} TM \arrow[r, "dF"] & TN \\ M \arrow[u, "X"] \arrow[r, "F"] & N \arrow[u, "Y"'] \end{tikzcd} ,$$

kommutiert, d.h., wenn $d_pF(X_p) = Y_{F(p)}$ für alle $p \in M$ gilt.

1.26. Beispiel. Sei M eine Mannigfaltigkeit, sei φ eine Karte von M, und sei $X \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ ein Vektorfeld auf M, dann erhalten wir eine Abbildung $X_\varphi \colon V^\varphi \to \mathbb{R}^n$ wie in Bemerkung 1.22. Wir fassen X_φ als Vektorfeld auf V^φ auf. Dann sind die Vektorfelder $X|_{U^\varphi}$ auf U^φ und X_φ auf V^φ φ-verwandt. Oder noch etwas schöner: Die Vektorfelder X_φ und X sind φ^{-1}-verwandt.

1.27. Satz und Definition. *Zu jeder $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 2$ existiert eine* Lie-Klammer $[\,\cdot\,,\,\cdot\,] \colon \mathfrak{X}^{k-1}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-2}(M)$ *mit folgenden Eigenschaften.*

(1) *Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ und alle Funktionen $f \in \mathcal{C}^k(M)$ gilt*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \in \mathcal{C}^{k-2}(M) .$$

(2) *Sei $M = \mathbb{R}^n$ und seien X, Y Vektorfelder auf $\mathbb{R}^n$, aufgefasst als $\mathcal{C}^k$-Abbildungen X, $Y \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$[X, Y] = X(Y) - Y(X) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n ,$$

wobei $X(Y)$ die komponentenweise Ableitung von Y nach X bezeichne.

(3) *Sei $F \colon M \to N$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung und $X, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ seien F-verwandt zu $V, W \in \mathfrak{X}^{k-1}(N)$, dann ist $[X, Y]$ auch F-verwandt zu $[V, W]$.*

(4) *Falls $k \geq 3$, so gilt die Jacobi-Identität*

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0 \in \mathfrak{X}^{k-3}(M) \qquad \text{für alle } X,\ Y,\ Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)\ .$$

Falls $k = \infty$, so bildet $(\mathfrak{X}^\infty(M), [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ eine Lie-Algebra. Wir nennen $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ auch im Fall $k < \infty$ eine Lie-Klammer auf $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$, auch wenn die Werte im Algemeinen nicht wieder in $\mathfrak{X}^{k-1}(M)$ liegen.

Beweis. Wir folgern die Eindeutigkeit aus (2) und (3). Wir benutzen dazu die „physikalische Darstellung“ in Bemerkung 1.22 und die Überlegung in Beispiel 1.26. Wenn $[X,Y]$ existiert ist das Vektorfeld

$$[X,Y]_\varphi = [X_\varphi, Y_\varphi] = X_\varphi(Y_\varphi) - Y_\varphi(X_\varphi) \in \mathfrak{X}^{k-2}(V_\varphi) \tag{*}$$

zu $[X,Y]$ φ^{-1}-verwandt. Damit ist $[X,Y]|_{U^\varphi}$ eindeutig bestimmt. Somit ist $[X,Y]$ auf jedem Kartengebiet festgelegt, also eindeutig.

Zur Existenz müssen wir zeigen, dass die obigen Konstruktionen zu verschiedenen Karten φ, ψ zusammenpassen, das heißt, dass $[X_\varphi, Y_\varphi]$ und $[X_\psi, Y_\psi]$ zum gleichen Vektorfeld auf $U_\varphi \cap U_\psi$ verwandt sind. Man überlegt sich, dass das äquivalent ist dazu, dass

$$[X_\varphi, Y_\varphi]|_{\varphi(U^\varphi \cap U^\psi)} \qquad \text{und} \qquad [X_\psi, Y_\psi]|_{\psi(U^\varphi \cap U^\psi)}$$

$\psi \circ \varphi^{-1}$-verwandt sind.

Allgemeiner sei $F\colon U \to V$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung zwischen offenen Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^m$ und $V \subset \mathbb{R}^n$, und $X,\ Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(U)$ seien F-verwandt zu $V,\ W \in \mathfrak{X}^{k-1}(V)$. Wir definieren $[X,Y]$ und $[V,W]$ durch (2) und zeigen, dass dann $[X,Y]$ zu $[V,W]$ verwandt ist. Mit den Definitionen (1), (2) des Differentials und Definition 1.25 erhalten wir

$$\begin{aligned}
[V,W]_{F(x)} &= V_{F(x)}(W) - W_{F(x)}(V) = \big(dF_x(X_x)\big)(W) - \big(dF_x(Y_x)\big)(V) \\
&= X_x(W \circ F) - Y_x(V \circ F) = X_x(dF \circ Y) - Y_x(dF \circ X) \\
&= \sum_{i,j=1}^m X^i(x)\, \frac{\partial}{\partial x^i}\biggl(\frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot Y^j\biggr) - \sum_{i,j=1}^m Y^j(x)\, \frac{\partial}{\partial x^j}\biggl(\frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot X^i\biggr) \\
&= \sum_{i,j=1}^m X^i(x) \cdot \biggl(\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \cdot Y^j + \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\biggr) - \sum_{i,j=1}^m Y^j(x) \cdot \biggl(\frac{\partial^2 F}{\partial x^j \partial x^i} \cdot X^i + \frac{\partial F}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\biggr) \qquad (**) \\
&= \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial F}{\partial x^j} \cdot \biggl(X^i \cdot \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \cdot \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\biggr) = dF_x\big([X,Y]_x\big)\ .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir den Satz von Schwarz benutzt, wonach zweite partielle Ableitungen im $\mathbb{R}^m$ kommutieren. Mit der obigen Überlegung folgt jetzt die Existenz eines globalen Vektorfeldes $[X,Y]$ auf M.

Um (3) zu beweisen, sei $F\colon M \to N$ eine C^k-Abbildung, φ sei Karte von M und ψ sei Karte von N. Wegen (**) sind die Vektorfelder

$$[X_\varphi, Y_\varphi]|_{\varphi(F^{-1}(U_\psi))} = [X,Y]_\varphi|_{\varphi(F^{-1}(U_\psi))} \qquad \text{und} \qquad [V_\psi, W_\psi] = [V,W]_\psi$$

verwandt unter der Abbildung $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Da das für alle Paare von Karten (φ, ψ) gilt, ist $[X,Y]$ zu $[V,W]$ F-verwandt.

Für $\mathcal{C}^k$-Vektorfelder X, Y auf $U \subset \mathbb{R}^n$ folgt aus der Produktregel und dem Satz von Schwarz aus der Analysis II, dass

$$\begin{aligned} X(Y(f)) - Y(X(f)) &= \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)\right) \\ &= \dots = (X(Y) - Y(X))(f) \;. \end{aligned}$$

Also gilt auch (1).

Mit (1) folgt (4) sofort, da

$$\begin{aligned} &([X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]])(f) \\ &\qquad = X(Y(Z(f))) - X(Z(Y(f))) - Y(Z(X(f))) + Z(Y(X(f))) \pm \dots = 0 \;. \qquad \square \end{aligned}$$

Aus (*) erhalten wir auch eine explizite Formel für die Lie-Klammer in Karten. Aus $X|_{U^\varphi} = \sum_{i=1}^n (X^i_\varphi \circ \varphi) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ und Y entsprechend folgt

$$\begin{aligned} [X,Y]|_{U^\varphi} &= \sum_{i=1}^n \Big(\big(X_\varphi(Y^i_\varphi) - Y_\varphi(X^i_\varphi)\big) \circ \varphi \Big) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\left(X^j_\varphi \cdot \frac{\partial Y^i_\varphi}{\partial x^j} - Y^j_\varphi \cdot \frac{\partial X^i_\varphi}{\partial x^j}\right) \circ \varphi \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \;. \end{aligned}$$

1.28. Beispiel. Sei φ eine Karte von M. Die Koordinatenvektorfelder $\frac{\partial}{\partial \varphi^1}$, …, $\frac{\partial}{\partial \varphi^n}$ sind φ-verwandt mit den Standardbasisfeldern e_1, …, e_n auf $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$, nach der Konstruktion der $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ in Beispiel 1.19 (2) ist das ein Spezialfall von Beispiel 1.26. Da $[e_i, e_j] = 0$, folgt mit Satz 1.27 (3), dass

$$\left[\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right] = 0 \in \mathfrak{X}(U^\varphi) \;.$$

Insbesondere können wir zweite Ableitungen bezüglich einer festen Karte φ für alle f auf M definieren durch

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^i\, \partial \varphi^j} := \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \frac{\partial f}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} = \frac{\partial^2 (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i\, \partial x^j} \circ \varphi \;.$$

Mit anderen Worten: die Ableitungen nach Koordinatenvektorfeldern zu einer festen Karte vertauschen. In diesem Sinne gilt ein „Satz von Schwarz“ auch auf Mannigfaltigkeiten.

Umgekehrt kann man zeigen: Seien X_1, …, X_n Vektorfelder auf M, deren Lie-Klammern auf einer Umgebung U von $p \in M$ verschwinden, so dass $X_{1,p}$, …, $X_{n,p}$ eine Basis von T_pM bilden, dann existiert eine Karte φ mit $U^\varphi \subset U$, so dass $X_i|_{U^\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$.

1.29. Bemerkung. Auch für die Lie-Klammer gelten Produktregeln, nämlich

$$[fX, Y] = f\,[X,Y] - Y(f)\,X \qquad \text{und} \qquad [X, fY] = X(f)\,Y + f\,[X,Y]$$

für alle $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ und alle X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$. Zum Beweis berechne etwa

$$\begin{aligned} [X, fY](h) &= X(fY(h)) - f\,Y(X(h)) \\ &= X(f)\,Y(h) + f\,X(Y(h)) - f\,Y(X(h)) = \big(X(f)\,Y + f\,[X,Y]\big)(h) \;. \end{aligned}$$

Indem man $h = \varphi^1, \dots, \varphi^n$ wählt, erhält man die Komponenten von $[X, fY]$ und $X(f) \cdot Y + f \cdot [X,Y]$ bezüglich einer Karte φ, und damit Gleichheit der Vektorfelder. Alternativ benutze die Injektivität der natürlichen Abbildung von T_pM in den Raum der algebraischen Tangentialvektoren in p.

1.2. Riemannsche Metriken

In diesem Abschnitt definieren wir Riemannsche Metrik und leiten daraus den Riemannschen Krümmungstensor ab. Der Krümmungstensor ist die entscheidende lokale Größe der Riemannschen Geometrie. In späteren Abschnitten werden wir uns globale Eigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten ansehen; einige dieser Eigenschaften lassen bereits aus der Riemannschen Krümmung ableiten.

Zur Motivation: in der linearen Algebra ergeben sich geometrisch Begriffe wie Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren in einem $\mathbb{R}$- (oder $\mathbb{C}$- oder $\mathbb{H}$-) Vektorraum V aus einem Skalarprodukt auf V. In der Riemannschen Geometrie definieren wir entsprechend Skalarprodukte auf allen Tangentialräumen einer Mannigfaltigkeit M.

1.30. Definition. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$. Eine ($\mathcal{C}^{k-1}$-) *Riemannsche Metrik* g auf M ordnet jedem $p \in M$ ein Skalarprodukt g_p auf dem Vektorraum T_pM zu, so dass für je zwei Vektorfelder X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ die Funktion

$$g(X,Y) \qquad \text{mit} \qquad \big(g(X,Y)\big)(p) = g_p(X_p, Y_p)$$

von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ ist. Eine *Riemannsche* ($\mathcal{C}^k$-) *Mannigfaltigkeit* ist ein Paar (M,g) aus einer $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit und einer Riemannschen Metrik g auf M.

Eine *Riemannsche Isometrie* von (M,g) nach (N,h) ist ein Diffeomorphismus $F\colon M \to N$ mit $F^*h = g$, d.h., für alle $p \in M$ und alle v, $w \in T_pM$ gilt

$$g(v,w) = (F_p^*h)(v,w) = h(d_pF(v), d_pF(w)) \; .$$

Sei φ eine Karte von M, dann heißt die Funktion $g^\varphi\colon V^\varphi \to M_n(\mathbb{R})$ mit

$$g_x^\varphi = (g_{ij}^\varphi(x))_{i,j} = \left(g_{\varphi^{-1}(x)}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j} \right) \right)_{i,j}$$

die *Darstellung* von g in der Karte φ. Das Inverse der Matrix $g_x^\varphi = (g_{ij}^\varphi(x))_{i,j}$ wird mit $(g_\varphi^{ij}(x))_{i,j}$ bezeichnet.

Man überlegt sich leicht (etwa mit Hilfe von Abschneidefunktionen), dass die g_{ij}^φ genau dann für alle Karten φ von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ sind, wenn g selbst von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$ ist.

1.31. Beispiel. Der *n-dimensionale Euklidische Raum* ist definiert als $(\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$ mit $g_x^{\mathrm{eukl}} = \langle \,\cdot\, , \,\cdot\, \rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Zur Konstruktion Riemannscher Metriken können wir eine Partition der Eins verwenden. Sei dazu $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{C}^k$-Atlas auf M. Eine *$\mathcal{C}^k$-Partition der Eins* zum Atlas $\mathcal{A}$ ist eine Familie $(\rho_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{C}^k$-Funktionen auf M mit folgenden Eigenschaften:

(1) Zu jedem $i \in I$ existiert eine Karte $\varphi_i \in \mathcal{A}$, so dass $\operatorname{supp}(\rho_i) \subset U^{\varphi_i}$.
(2) Jeder Punkt in M besitzt eine Umgebung, auf der fast alle ρ_i verschwinden.
(3) Es gilt $\rho_i \geq 0$ für alle $i \in I$ auf ganz M und

$$\sum_{i\in I} \rho_i = 1 \; .$$

Wegen (2) ist die Summe in (3) endlich. Eine solche $\mathcal{C}^k$-Partition der Eins existiert auf jeder $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, wobei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Auf jeder Teilmenge $V^\varphi \subset \mathbb{R}^n$ haben wir die Euklidische Metrik $\langle \,\cdot\, , \,\cdot\, \rangle$ aus Beispiel 1.31. Auf M definieren wir g durch

$$g_p(v,w) = \sum_{i\in I} \rho_i(p) \langle v_{\varphi_i}, w_{\varphi_i} \rangle$$

für alle $p \in M$ und $v, w \in T_pM$. Wegen (1) ist jeder Summand wohldefiniert, wegen (2) ist die Summe lokal endlich und daher g von der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$, und wegen (3) ist g_p positiv definit für alle $p \in M$. Also trägt jede $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$ eine Riemannsche $\mathcal{C}^{k-1}$-Metrik, für $\dim M \geq 1$ gibt es sogar überabzählbar viele verschiedene.

Weitere Riemannsche Mannigfaltigkeiten erhalten wir zum Beispiel als Riemannsche Untermannigfaltigkeiten.

1.32. Proposition. *Sei $M \subset N$ eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit mit $k \geq 1$. Dann ist T_pM ein linearer Unterraum von T_pN für alle $p \in M$.*

Beweis. Sei $\varphi \colon U^\varphi \to V^\varphi$ eine Untermannigfaltigkeitskarte von M in N um $p \in M$ wie in Definition 1.8. Dann ist $\varphi|_{U^\varphi \cap M} \colon U^\varphi \cap M \to V^\varphi \cap \mathbb{R}^m$ eine Karte von M. Vom „physikalischen" Standpunkt aus erhalten wir

$$\begin{tikzcd} T_pM \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, "d\varphi|_{U^\varphi \cap M}"'] & T_pN \arrow[d, "d\varphi"] \\ \mathbb{R}^m \arrow[r, phantom, "\subset"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd} \;.$$

□

1.33. Definition. Sei $M \subset N$ eine $\mathcal{C}^k$-Untermannigfaltigkeit der Riemannschen Mannigfaltigkeit $(N, \bar{g})$. Dann ist die *induzierte Riemannsche Metrik* $g = \bar{g}|_{TM}$ auf M gegeben durch $g_p = \bar{g}|_{T_pM}$ für alle $p \in M$. Eine *Riemannsche Untermannigfaltigkeit* von $(N, \bar{g})$ ist ein Paar (M, g), wobei $M \subset N$ Untermannigfaltigkeit und g die induzierte Metrik ist.

Man überprüft leicht, dass g dann wieder eine Riemannsche $\mathcal{C}^{k-1}$-Metrik ist.

Nach dem Satz von Whitney aus Bemerkung 1.9 (2) ist jede Mannigfaltigkeit diffeomorph zu einer Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^N$ und trägt daher die induzierte Metrik. Wir erhalten also einen weiteren Beweis für die Existenz Riemannscher Metriken auf M.

1.34. Bemerkung. Es gilt der **Satz von Nash:** *Jede m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist isometrisch zu einer Riemannschen Untermannigfaltigkeit des n-dimensionalen Euklidischen Raumes, für n hinreichend groß.* Dieser Satz ist weitaus schwieriger zu beweisen als der analoge Satz von Whitney für differenzierbare Mannigfaltigkeiten aus Bemerkung 1.9.

1.35. Beispiel. Die *runde n-Sphäre* ist die Riemannsche Untermannigfaltigkeit (S^n, g^{sph}) des Euklidischen Raumes $(\mathbb{R}^{n+1}, g^{\mathrm{eukl}})$ mit $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ wie in Beispiel 1.6.

Um g^{sph} bezüglich der stereographischen Projektionen $\varphi_\pm$ auszudrücken, bilden wir zwei Vektoren v, $w \in \mathbb{R}^n$ mit Hilfe von $d_x(\varphi_\pm^{-1})$ nach $T_{\varphi^{-1}(x)}S^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$ ab und berechnen dann ihr Euklidisches Skalarprodukt. Wir haben diese Rechnung für den Fall $n = 2$ in der elementaren Differentialgeometrie durchgeführt. Das Ergebnis war

$$g_x^{\mathrm{sph},\varphi_\pm}(v, w) = \langle d(\varphi_\pm^{-1})_x(v), d(\varphi_\pm^{-1})_x(w) \rangle = \frac{4}{(|x|^2 + 1)^2} \langle v, w \rangle \;.$$

1.36. Beispiel. Auch der hyperbolische Raum aus der elementaren Differentialgeometrie hat ein n-dimensionales Analogon. Das *Poincarésche Ballmodell* des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes hat die Gestalt $(B_1^n(0), g^{\mathrm{hyp}})$, mit

$$g_x^{\mathrm{hyp}}(v, w) = \frac{4}{(1 - |x|^2)^2} \langle v, w \rangle \;.$$

Als nächstes betrachten wir den Levi-Civita-Zusammenhang einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

1.37. Definition. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 2$. Ein ($\mathcal{C}^{k-2}$-) *Zusammenhang* auf TM ist eine Abbildung

$$\nabla\colon \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-2}(M) \qquad \text{mit} \qquad (X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathcal{C}^{k-2}(M)$-Linearität im ersten Argument:

$$\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \qquad \text{für alle } X,\, Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M),\, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und } f,\, g \in \mathcal{C}^{k-2}(M)\;,$$

(2) $\mathbb{R}$-Linearität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(rY+sZ) = r\nabla_X Y + s\nabla_X Z \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M),\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und alle } r,\, s \in \mathbb{R}\;,$$

(3) $\mathcal{C}^{k-1}(M)$-Derivativität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f\,\nabla_X Y \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M),\, Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) \text{ und alle } f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)\;.$$

Ein Zusammenhang leitet also ein Vektorfeld nach einem anderen ab.

1.38. Beispiel. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, seien $X,\, Y : U \to \mathbb{R}^n$ Vektorfelder auf U. Die komponentenweise Ableitung

$$\nabla_X Y = X(Y)$$

definiert offensichtlich einen Zusammenhang auf $TU = U \times \mathbb{R}^n$. Dieser Zusammenhang hat die folgenden Eigenschaften:

$$[X,Y] = X(Y) - Y(X) \qquad \text{und} \qquad X\bigl(g^{\mathrm{eukl}}(Y,Z)\bigr) = g^{\mathrm{eukl}}(X(Y),Z) + g^{\mathrm{eukl}}(Y,X(Z))\;.$$

Leider lässt sich auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit nicht so einfach ein Zusammenhang angeben wie auf dem $\mathbb{R}^n$. Wir werden stattdessen die beiden obigen Eigenschaften benutzen, um zumindest auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten einen eindeutigen Zusammenhang zu definieren.

1.39. Definition. Sei M eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 2$. Ein Zusammenhang ∇ auf TM heißt

(1) *torsionsfrei,* wenn

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \mathfrak{X}^{k-2}(M) \qquad \text{für alle } X,\, Y \in \mathfrak{X}(M), \text{ und}$$

(2) *Riemannsch* oder *metrisch* bezüglich einer Riemannschen Metrik g auf M, wenn

$$X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \in \mathcal{C}^{k-2}(M) \qquad \text{für alle } X,\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}(M)\;.$$

Ein torsionsfreier, Riemannscher Zusammenhang bezüglich einer Riemannschen Metrik g heißt *Levi-Civita-Zusammenhang* von (M,g).

Wir werden bald sehen, dass es auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit genau einen solchen Levi-Civita-Zusammenhang gibt. Vorher benötigen wir jedoch noch ein wenig Technik. Wir verallgemeinern das Lemma von Riesz auf Vektorfelder.

1.40. Lemma. *Sei (M,g) eine Riemannsche $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit, und sei $\alpha\colon \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathcal{C}^\ell(M)$ eine $\mathcal{C}^{k-1}(M)$-lineare Abbildung mit $\ell \leq k-1$. Dann existiert genau ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$, so dass*

$$\alpha(Y) = \langle X, Y\rangle \in \mathcal{C}^\ell(M) \qquad \textit{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)\;.$$

Beweis. Sei φ eine Karte von M. Für jedes $p \in U^\varphi$ existiert eine Abschneidefunktion $\rho \in \mathcal{C}^k(M)$ mit $\rho(p) = 1$ und mit Träger in U^φ. Für alle $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ folgt

$$(\alpha(\rho Y))(p) = \rho(p)\,(\alpha(Y))(p) = (\alpha(Y))(p)\;,$$

also hängt $\alpha(Y)|_{U^\varphi}$ nur von $Y|_{U^\varphi}$ ab. Aus $Y = \sum_{i=1}^n (Y^i \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi_i} = \sum_{i=1}^n Y(\varphi^i) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ folgt

$$\alpha(Y)|_{U^\varphi} = \alpha\biggl(\sum_{i=1}^n Y(\varphi^i)\, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\biggr) = \sum_{i=1}^n Y(\varphi^i)\, \alpha\biggl(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\biggr) .$$

Da g_p nicht ausgeartet ist, existiert nach dem Lemma von Riesz für alle p ein eindeutig bestimmter Vektor

$$X_p^\varphi = \sum_{i,j=1}^n g_\varphi^{ij}(\varphi(p))\, \alpha\biggl(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p\biggr)\, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p ,$$

so dass

$$\langle X_p^\varphi, Y_p \rangle = \sum_{i,j,k=1}^n g_\varphi^{ij}(\varphi(p))\, \alpha\biggl(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p\biggr)\, g_{jk}^\varphi(\varphi(p))\, Y(\varphi^k) = \alpha_p(Y) ,$$

und X_p^φ hängt $\mathcal{C}^\ell$-differenzierbar von $p \in U^\varphi$ ab.

Sei ψ eine weitere Karte, so folgt

$$\langle X^\varphi - X^\psi, Y \rangle|_{U^\varphi \cap U^\psi} = \alpha(Y) - \alpha(Y) = 0 \qquad \text{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) ,$$

also gilt $X^\varphi = X^\psi$ auf $U^\varphi \cap U^\psi$, und wir erhalten ein globales Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}^\ell(M)$ mit $X|_{U^\varphi} = X^\varphi$ und

$$\alpha(Y) = \langle X, Y \rangle \in \mathcal{C}^\ell(M) \qquad \text{für alle } Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M) .$$

Aus dem gleichen Argument folgt auch die Eindeutigkeit von X. □

1.41. Satz. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann gibt es genau einen Levi-Civita-Zusammenhang ∇ auf TM. Es gilt die* Koszul-Formel

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) \\ + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) . \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst die Koszul-Formel. Dann folgern wir mit Lemma 1.40, dass für alle X, $Y \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$ genau ein Vektorfeld $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}^{k-2}(M)$ existiert, das die Koszul-Formel erfüllt. Zum Schluss zeigen wir, dass $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ tatsächlich einen Levi-Civita-Zusammenhang definiert. Wegen der Koszul-Formel ist dieser aber auch eindeutig.

Die Koszul-Formel ergibt sich sofort als Summe der Gleichungen

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) &= X(g(Y,Z)) , \\ g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) &= Y(g(Z,X)) , \\ -g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) &= -Z(g(X,Y)) , \\ g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z) &= g([X,Y],Z) , \\ -g(\nabla_Y Z, X) + g(\nabla_Z Y, X) &= -g([Y,Z],X) \\ \text{und} \qquad g(\nabla_Z X, Y) - g(\nabla_X Z, Y) &= g([Z,X],Y) , \end{aligned}$$

die sich daraus ergeben, dass ∇ Riemannsch und torsionsfrei sein soll. Man sieht leicht, dass das Vektorfeld $\nabla_X Y$ — falls es existiert — durch die Koszulformel eindeutig bestimmt ist.

Wir beweisen $\mathcal{C}^{k-2}$-Linearität der Abbildung

$$Z \mapsto X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y) .$$

In der Tat gilt

$$\begin{aligned}
&X(g(Y,fZ)) + Y(g(fZ,X)) - fZ(g(X,Y)) + g([X,Y],fZ) - g([Y,fZ],X) + g([fZ,X],Y)\\
&\quad = X(f)\,g(Y,Z) + f\,X(g(Y,Z)) + Y(f)\,g(Z,X) + f\,Y(g(Z,X)) - f\,Z(g(X,Y))\\
&\qquad + f\,g([X,Y],Z) - Y(f)\,g(Z,X) - f\,g([Y,Z],X) - X(f)\,g(Z,Y) + f\,g([Z,X],Y)\\
&\quad = f\cdot\bigl(X(g(Y,Z)) + Y(g(Z,X)) - Z(g(X,Y)) + g([X,Y],Z) - g([Y,Z],X) + g([Z,X],Y)\bigr)\;.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 1.40 folgt die Existenz eines Vektorfeldes $\nabla_X Y$, das der Koszul-Formel genügt.

Analog zur obigen Rechnung beweisen wir

$$\nabla_{fX}Y = f\,\nabla_X Y \qquad \text{und} \qquad \nabla_X(fY) = X(f)\,Y + f\,\nabla_X Y\;,$$

es folgt, dass $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ ein Zusammenhang ist.

Aus der Koszul-Formel folgt auch

$$\begin{aligned}
&2\langle\nabla_X Y, Z\rangle + 2\langle\nabla_X Z, Y\rangle = 2X\langle Y, Z\rangle\\
\text{und}\qquad &2\langle\nabla_X Y, Z\rangle - 2\langle\nabla_Y X, Z\rangle = 2\langle[X,Y],Z\rangle\;,
\end{aligned}$$

also ist ∇ Riemannsch und torsionsfrei. Insgesamt existiert also der Levi-Civita-Zusammenhang und ist durch die Koszul-Formel eindeutig festgelegt. $\square$

1.42. Bemerkung. Es sei (M,g) Riemannsche Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, dann können wir Y auffassen als Abbildung $Y\colon M \to \mathbb{R}^N$ mit

$$p \mapsto Y(p) \in T_pM \subset T_p\mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^N\;.$$

Es sei $X(Y)\colon M \to \mathbb{R}^N$ die komponentenweise Ableitung. Dann wird der Levi-Civita-Zusammenhang auf M eindeutig festgelegt durch die Gleichung

$$g(\nabla_X Y, Z) = \langle X(Y), Z\rangle$$

für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ (Übung).

1.43. Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, sei φ eine Karte von M, und sei ∇ ein Zusammenhang auf TM. Dann heißen die Koeffizienten ${}^{\varphi}\Gamma^k_{ij}\colon V^{\varphi} \to \mathbb{R}$ in

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j} = \sum_{k=1}^n ({}^{\varphi}\Gamma^k_{ij}\circ\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\varphi^k}$$

für i, $j = 1, \dots, n$ die *Christoffel-Symbole* von ∇ bezüglich φ.

1.44. Bemerkung. Die Koordinatenfelder an der Stelle $p \in U^{\varphi}$ bilden eine Basis von T_pM. Außerdem kann man für jedes $p \in U^{\varphi}$ mit Hilfe einer geeigneten Abschneidefunktion wie im Beweis von Proposition 1.14 zeigen, dass $(\nabla_X Y)_p$ nur von $X|_{U^{\varphi}}$ und $Y|_{U^{\varphi}}$ abhängt. Daher ist die Definition der ${}^{\varphi}\Gamma^k_{ij}$ sinnvoll.

Der Zusammenhang ∇ ist auf U^{φ} durch Angabe aller ${}^{\varphi}\Gamma^k_{ij}$ eindeutig beschrieben. Aus Definition 1.37 folgern wir, dass für beliebige Vektorfelder X und Y auf M gilt:

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y|_{U^{\varphi}} &= \sum_{i,k=1}^n \nabla_{X(\varphi^i)\frac{\partial}{\partial\varphi^i}}\left(Y(\varphi^k)\,\frac{\partial}{\partial\varphi^k}\right)\\
&= \sum_{i,k=1}^n X(\varphi^i)\left(\frac{\partial(Y(\varphi^k))}{\partial\varphi^i} + \sum_{j=1}^n Y(\varphi^j)\,({}^{\varphi}\Gamma^k_{ij}\circ\varphi)\right)\frac{\partial}{\partial\varphi^k}\;.
\end{aligned}$$

1.45. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $k \geq 3$, dann heißt die Abbildung $R\colon \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-2}(M) \times \mathfrak{X}^{k-1}(M) \to \mathfrak{X}^{k-3}(M)$ mit

$$(X,Y,Z) \mapsto R_{X,Y}Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

der *Riemannsche Krümmungstensor* von (M,g).

Wir wollen kurz erläutern, warum R ein „Tensor“ genannt wird. Der Einfachheit halber definieren wir aber nur $(a,0)$- und $(a,1)$-Tensoren.

1.46. Definition. Sei M eine differenzierbare $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 1$, und sei $a \in \mathbb{N}_0$. Ein $(a,0)$-*Tensor* der Klasse $\mathcal{C}^l$ ist eine $\mathcal{C}^k$-multilineare Abbildung $S\colon \mathfrak{X}^{k-1}(M)^a \to \mathcal{C}^l(M)$. Ein $(a,1)$-*Tensor* der Klasse $\mathcal{C}^l$ ist eine $\mathcal{C}^k$-multilineare Abbildung $S\colon \mathfrak{X}^{k-1}(M)^a \to \mathfrak{X}^l(M)$.

1.47. Beispiel. (1) Eine $\mathcal{C}^l$-Funktion ist ein $(0,0)$-Tensor.
(2) Ein $\mathcal{C}^l$-Vektorfeld ist ein $(0,1)$-Tensor.
(3) Eine Riemannsche Metrik ist ein symmetrischer $(2,0)$-Tensor der Klasse $\mathcal{C}^{k-1}$.

1.48. Lemma. *Sei S ein (a,b)-Tensor mit $b = 0$ oder 1, seien $X_1, \dots, X_a \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$, und sei $p \in M$. Dann hängt $S(X_1,\dots,X_a)(p)$ nur von $X_1|_p, \dots, X_a|_p \in T_pM$ ab, wir erhalten also eine $\mathbb{R}$-multilineare Abbildung $S_p\colon (T_pM)^a \to \mathbb{R}$ bzw. $\to T_pM$.*

Da Tensoren also bereits punktweise multlinear sind, erhalten wir insbesondere $\mathcal{C}^r$-Multilinearität $\mathfrak{X}^r(M) \to \mathcal{C}^r(M)$ bzw. $\mathfrak{X}^r(M)$ für alle $0 \leq r \leq l$.

Beweis. Sei φ eine Karte von M, dann existiert zu jedem $p \in U^\varphi$ eine Abschneidefunktion ρ wie im Beweis von Lemma 1.40. Aus Multilinearität folgt

$$S(\rho\, X_1, \dots, \rho\, X_a)(p) = \rho(p)^a\, S(X_1,\dots,X_a)(p) = S(X_1,\dots,X_a)(p)\;,$$

also hängt $S(\rho\, X_1,\dots,\rho\, X_a)|_{U^\varphi}$ nur von $X_1|_{U^\varphi}, \dots, X_a|_{U^\varphi} \in \mathfrak{X}(U^\varphi)$ ab.

Einschränken auf U^φ ist also möglich und liefert

$$\begin{aligned} S(X_1,\dots,X_a)(p) &= S\biggl(\sum_{i_1=1}^n \rho\, X_1(\varphi^{i_1})\,\frac{\partial}{\partial\varphi^{i_1}}, \dots, \sum_{i_a=1}^n \rho\, X_a(\varphi^{i_a})\,\frac{\partial}{\partial\varphi^{i_a}}\biggr)(p) \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^n X_{1,p}(\varphi^{i_1}) \cdots X_{a,p}(\varphi^{i_a})\, \cdot S\biggl(\frac{\partial}{\partial\varphi^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^{i_a}}\biggr)(p)\;. \end{aligned}$$

□

1.49. Bemerkung. Aus dem obigen Beweis folgt für einen $(a,0)$-Tensor S sofort

$$S(X_1,\dots,X_a)|_{U^\varphi} = \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^n X_1(\varphi^{i_1}) \cdots X_a(\varphi^{i_a})\, \cdot ({}^\varphi S_{i_1,\dots,i_a} \circ \varphi)$$

mit ${}^\varphi S_{i_1,\dots,i_a} \in \mathcal{C}^l(V^\varphi)$ für alle Indexkombinationen. Einen $(a,1)$-Tensor S können wir noch weiter zerlegen in

$$S(X_1,\dots,X_a)|_{U^\varphi} = \sum_{i_1,\dots,i_a=1}^n \sum_{j=1}^n X_1(\varphi^{i_1}) \cdots X_a(\varphi^{i_a})\, \cdot ({}^\varphi S^j_{i_1,\dots,i_a} \circ \varphi)\,\frac{\partial}{\partial\varphi^j}\;.$$

1.50. Satz. *Sei M eine Riemannsche $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 3$. Dann ist R ein $(3,1)$-Tensor der Klasse $\mathcal{C}^{k-3}$.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $R_{X,Y}Z$ in jedem Argument $\mathcal{C}^{k-1}$-linear ist.

Sei also $f \in \mathcal{C}^{k-1}(M)$ und $X,\, Y,\, Z \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$, dann folgt

$$\begin{aligned} R_{fX,Y}Z &= \nabla_{fX}\nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]}Z \\ &= f\,\nabla_X\nabla_Y Z - Y(f)\,\nabla_X Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_{Y(f)\,X} Z - f\,\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= f\,R_{X,Y}Z\;. \end{aligned}$$

Außerdem gilt offensichtlich

$$R_{X,fY}Z = -R_{fY,X}Z = -f\,R_{Y,X}Z = f\,R_{X,Y}Z\;.$$

Für das letzte Argument müssen wir etwas mehr rechnen:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}(fZ) &= \nabla_X\big(Y(f)\,Z + f\,\nabla_Y Z\big) - \nabla_Y\big(X(f)\,Z + f\,\nabla_X Z\big) - [X,Y](f)\,Z - f\,\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= X(Y(f))\,Z + Y(f)\,\nabla_X Z + X(f)\,\nabla_Y Z + f\,\nabla_X\nabla_Y Z \\ &\qquad - Y(X(f))\,Z - X(f)\,\nabla_Y Z - Y(f)\,\nabla_X Z - f\,\nabla_Y\nabla_X Z \\ &\qquad - [X,Y](f)\,Z - f\,\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= f\,R_{X,Y}Z\;. \end{aligned}$$

□

Der Riemannsche Krümmungstensor enthält sehr viel geometrische Information über die globale Gestalt der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Bevor wir geometrische Größen aus dem Krümmungstensor herauslesen können, müssen wir erst seine wichtigsten algebraischen Eigenschaften verstehen.

1.51. Satz. *Der Riemannsche Krümmungstensor hat die folgenden Symmetrien.*

(1) *Schiefsymmetrie:* $R_{X,X}Z = 0$,
(2) *erste Bianchi-Identität:* $R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y = 0$,
(3) *Metrizität:* $g(R_{X,Y}Z,Z) = 0$,
(4) *Blocksymmetrie:* $g(R_{X,Y}Z,W) = g(R_{Z,W}X,Y)$

für alle $X,\, Y,\, Z,\, W \in \mathfrak{X}^{k-1}(M)$.

Beachte, dass nach Lemma 1.40 der 3-1-Tensor R und der 4-0-Tensor $g(R_{\cdot,\cdot}\cdot,\cdot)$ genau die gleiche Information enthalten. Aus (1) bzw. (3) folgt wegen der Multilinearität auch

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Y,X}Z &= R_{X+Y,X+Y}Z - R_{X,X}Z - R_{Y,Y}Z = 0 \\ \text{und}\quad g(R_{X,Y}Z,W) + g(R_{X,Y}W,Z) &= 0\;. \end{aligned}$$

Beweis. Wegen Lemma 1.48 reicht es, die Behauptungen in allen Karten φ einzeln zu beweisen. Außerdem dürfen wir $X,\, Y,\, Z,\, W \in \big\{\frac{\partial}{\partial\varphi^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial\varphi^n}\big\}$ annehmen, da sich alle anderen Vektorfelder aus diesen linear kombinieren lassen. Insbesondere verschwinden dann alle Lie-Klammern gemäß Beispiel 1.28, was die Rechnungen etwas vereinfacht.

Behauptung (1) ist offensichtlich. Behauptung (2) folgt aus der Torsionsfreiheit von ∇:

$$\begin{aligned} R_{X,Y}Z + R_{Y,Z}X + R_{Z,X}Y &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y \\ &= \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y] + \nabla_X[Y,Z] = 0 \end{aligned}$$

nach Wahl der Vektorfelder $X,\, Y,\, Z$.

Behauptung (3) folgt, da ∇ metrisch ist:

$$\begin{aligned} g(R_{X,Y}Z,Z) &= g(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z, Z) \\ &= X\big(g(\nabla_Y Z,Z)\big) - g(\nabla_Y Z,\nabla_X Z) - Y\big(g(\nabla_X Z,Z)\big) + g(\nabla_X Z,\nabla_Y Z) \\ &= \frac{1}{2}\Big(X\big(Y(g(Z,Z))\big) - Y\big(X(g(Z,Z))\big)\Big) = [X,Y](g(Z,Z)) = 0\;. \end{aligned}$$

Schließlich folgt Behauptung (4) rein algebraisch aus (1)–(3), denn

$$\begin{aligned}
2g(R_{X,Y}Z,W) &= -g(R_{Y,Z}X,W) - g(R_{Z,X}Y,W) + g(R_{X,Y}Z,W)\\
&= g(R_{Y,Z}W,X) + g(R_{Z,X}W,Y) - g(R_{X,Y}W,Z)\\
&= -g(R_{Z,W}Y,X) - g(R_{W,Y}Z,X) - g(R_{X,W}Z,Y) - g(R_{W,Z}X,Y) - g(R_{X,Y}W,Z)\\
&= 2g(R_{Z,W}X,Y) + \underbrace{g(R_{W,Y}X,Z) + g(R_{X,W}Y,Z) + g(R_{Y,X}W,Z)}_{=0}\;. \qquad \square
\end{aligned}$$

1.52. Proposition. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei φ eine Karte von M. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g_\varphi^{kl}\left(\frac{\partial g_{jl}^\varphi}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}^\varphi}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}^\varphi}{\partial x^l}\right)\\
\textit{und}\qquad {}^{\varphi}R_{ijk}^l &= \frac{\partial\,{}^{\varphi}\Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial\,{}^{\varphi}\Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \sum_{m=1}^n\left({}^{\varphi}\Gamma_{im}^l\,{}^{\varphi}\Gamma_{jk}^m - {}^{\varphi}\Gamma_{jm}^l\,{}^{\varphi}\Gamma_{ik}^m\right)\;.
\end{aligned}$$

Beweis. Wir benutzen die Formel im Beweis von Lemma 1.40, um die erste Gleichung aus der Koszul-Formel in Satz 1.41 herzuleiten. Die zweite Formel ist dann eine einfache Konsequenz aus der Definition von R und Bemerkung 1.44. Bei beiden Rechnungen nutzen wir wieder aus, dass die Lie-Klammern der Koordinatenfelder verschwinden. $\square$

Nachdem wir den Krümmungstensor definiert haben, wollen wir aus ihm drei weitere Krümmungsgrößen ableiten.

1.53. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Krümmungstensor R, und sei $p\in M$.

(1) Für jeden zweidimensionalen Unterraum $E\subset T_pM$ mit Basis (v,w) ist die *Schnittkrümmung* definiert als
$$K_p(E) = \frac{g(R_{v,w}w,v)}{g(v,v)g(w,w)-g(v,w)^2}\in\mathbb{R}\;.$$
(2) Sei $e_1,\dots,e_n$ eine Orthonormalbasis von T_pM, dann ist die *Ricci-Krümmung* auf T_pM definiert als
$$\mathrm{ric}_p(v,w) = \mathrm{tr}(R_{\,\cdot\,,v}w) = \sum_{i=1}^n g(R_{v,e_i}e_i,w)\in\mathbb{R}\;.$$
(3) Die *Skalarkrümmung* von M ist definiert als
$$\mathrm{scal}(p) = \sum_{i=1}^n \mathrm{ric}(e_i,e_i) = \sum_{i,j=1}^n g(R_{e_i,e_j}e_j,e_i)\in\mathbb{R}\;.$$

1.54. Bemerkung. (1) Wir müssen zeigen, dass die Schnittkrümmung wohldefiniert, das heißt unabhängig von der Basis ist. Man kann das durch Nachrechnen einsehen, oder aber wie folgt: Nach Satz 1.51 (1) und (3) sind für alle v, $w\in E$ die $(2,0)$-Tensoren
$$g(R_{\,\cdot\,,\,\cdot\,}w,v)\qquad\text{und}\qquad g(R_{v,w}\,\cdot\,,\,\cdot\,)\colon E\times E\to\mathbb{R}$$
Determinantenfunktionen (alternierende Formen maximalen Grades) auf E. Sei also $A\in GL(E)$, dann gilt für die Basis (Av,Aw), dass
$$g(R_{Av,Aw}Aw,Av) = \det A\,g(R_{Av,Aw}w,v) = (\det A)^2\;g(R_{v,w}w,v)\;.$$

Eine entsprechende Formel gilt für den Nenner

$$|v|^2\,|w|^2 - \langle v,w\rangle^2 = \big(\langle\,\cdot\,,v\rangle\langle\,\cdot\,,w\rangle - \langle\,\cdot\,,w\rangle\langle\,\cdot\,,v\rangle\big)(v,w)\;,$$

also ist $K_p(E)$ von der Wahl der Basis unabhängig.

(2) Man kann den Krümmungstensor aus der Schnittkrümmung zurückgewinnen (Übung).

(3) Auch Ricci- und Skalarkrümmung sind wohldefiniert, wie man (etwa für die Ricci-Krümmung) leicht überprüft: Sei etwa $f_1, \dots, f_n$ eine weitere Orthonormalbasis von T_pM, dann existiert eine Matrix $A \in O(n)$ mit

$$f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\, e_i \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}\;,$$

da $A \cdot A^t$ die Einheitsmatrix ergibt. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n g(R_{v,f_k} f_k, w) &= \sum_{i,j,k=1}^n g(R_{v,a_{ik}e_i} a_{jk} e_j, w)\\ &= \sum_{i,j,k=1}^n a_{ik}a_{jk}\, g(R_{v,e_i} e_j, w) = \sum_{i=1}^n g(R_{v,e_i}, e_i, w) \in \mathbb{R}\;.\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung liefert die Wohldefiniertheit der Skalarkrümmung.

(4) Wegen Satz 1.51 ist ric ein symmetrischer $(2,0)$-Tensor.

Wir werden der Schnitt- und Riccikrümmung im Laufe der Vorlesung im Zusammenhang mit dem Verhalten von Geodätischen und Volumina von Bällen gelegentlich begegnen. Die Skalarkrümmung wird nicht auftauchen; sie spielt aber eine gewisse Rolle beim Studium von Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten.

1.3. Bogenlänge und Geodätische

In diesem Kapitel definieren wir die Bogenlänge von Kurven und den Riemannschen Abstandsbegriff auf Mannigfaltigkeiten. Wir sehen, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten einer bestimmten Differentialgleichung genügen, und nennen solche Kurven geodätische Linien.

Wir werden ab jetzt keinen Wert mehr auf die genaue Differenzierbarkeitsordnung legen. Außerdem werden wir die Abkürzungen

$$\langle v,w\rangle = g_p(v,w) \qquad \text{und} \qquad \|v\| = \sqrt{g_p(v,v)}$$

für alle $p \in M$ und alle $v, w \in T_pM$ verwenden, so lange Fußpunkt p und Metrik g aus dem Kontext klar sind. Wir erinnern uns an den Geschwindigkeitsvektor $\dot\gamma(t) = [\gamma(\,\cdot\, - t)] \in T_{\gamma(t)}M$ einer Kurve.

1.55. Definition. Eine (parametrisierte) Kurve $\gamma\colon I \to M$ heißt *regulär,* wenn $\dot\gamma(t) \neq 0 \in T_{\gamma(t)}M$ für alle $t \in I$. Eine *Parametertransformation* für γ ist ein Diffeomorphismus $\vartheta\colon J \to I$ mit $J \subset \mathbb{R}$, in diesem Fall heißt $\gamma \circ \vartheta\colon J \to M$ eine *Umparametrisierung* von M.

Im Gegensatz zur elementaren Differentialgeometrie betrachten wir hier parametrisierte Kurven, nicht parametrisierte Kurven bis auf Umparametrisierung.

1.56. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\gamma\colon I \to M$ eine Kurve, und sei $[a,b] \subset I$. Dann ist die *Bogenlänge* von $\gamma|_{[a,b]}$ definiert als

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\;dt = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))}\,dt\;.$$

Die Kurve γ heißt *nach Bogenlänge parametrisiert,* wenn $\|\dot\gamma(t)\| = 1$ für alle $t \in I$.

1.57. Bemerkung. Im Euklidischen Raum hatten wir die Bogenlänge einer Kurve als das Supremum aller Längen von approximierenden Polygonzügen definiert. Anschließend haben wir gezeigt, dass für (stückweise) differenzierbare Kurven die Bogenlänge durch obiges Integral berechnet werden kann, siehe Abschnitt 2.1 der Vorlesung vom letzten Semester. Da die ursprüngliche Definition auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten nicht sinnvoll ist, verwenden wir hier den Integralausdruck.

Die folgenden Eigenschaften der Bogenlänge gelten auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit denselben Beweisen wie in der elementaren Differentialgeometrie.

(1) Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierungen, also

$$L\big((\gamma \circ \vartheta)|_{[a,b]}\big) = L(\gamma|_{[\vartheta(a),\vartheta(b)]}) .$$

Wie in der elementaren Differentialgeometrie folgt das unmittelbar aus der Integraltransformationsformel.

(2) Eine Kurve $\gamma\colon I \to M$ ist genau dann nach Bogenlänge parametrisiert, wenn für alle a, $b \in I$ mit $a < b$ gilt, dass

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = \int_a^b 1\,dt = b - a .$$

(3) Jede reguläre Kurve lässt sich nach Bogenlänge umparametrisieren. Dazu wählen wir eine Umparametrisierung $\vartheta\colon J \to I$ mit

$$\vartheta^{-1}(t) = \int_{t_0}^t \|\dot\gamma(s)\|\,ds ,$$

dann ist $\varphi \circ \vartheta\colon J \to I$ nach Bogenlänge parametrisiert. Sei umgekehrt $\vartheta'\colon J' \to I$ eine weitere Umparametrisierung, so dass auch $\varphi \circ \vartheta'$ nach Bogenlänge parametrisiert ist, dann existiert eine Konstante c, so dass $\vartheta'(s) = \vartheta(c \pm s)$ für alle $s \in J'$.

Wir wollen als nächstes die „erste Variation“ der Bogenlänge berechnen. Gemeint ist dabei die erste Ableitung der Bogenlänge einer differenzierbaren Familie von Kurven. Um die zugehörige Rechnung durchzuführen, brauchen wir Vektorfelder und Zusammenhänge längs Abbildungen.

1.58. Definition. Sei $F\colon M \to N$ eine differenzierbare Abbildung, und sei $\pi\colon TN \to N$ das Tangentialbündel von N. Ein *Vektorfeld längs F* ist eine differenzierbare Abbildung $X\colon M \to TN$ mit $\pi \circ X = F$. Wir bezeichnen den Raum dieser Vektorfelder mit $\mathfrak{X}(F)$.

1.59. Bemerkung. Vektorfelder längs $F\colon M \to N$ haben ähnliche Eigenschaften wie gewöhnliche Vektorfelder, siehe Bemerkung 1.20.

(1) Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $Y \in \mathfrak{X}(N)$, dann sind $dF \circ X$ und $Y \circ F\colon M \to TN$ Vektorfelder längs F.

(2) Der Raum $\mathfrak{X}(F)$ bildet ein $\mathcal{C}(M)$-Modul mit

$$(fX)_p = f(p)\,X_p \in T_{F(p)}N$$

für alle $f \in \mathcal{C}(M)$, $X \in \mathfrak{X}(F)$ und alle $p \in M$.

(3) Ableiten liefert eine Abbildung $\mathfrak{X}(F) \times \mathcal{C}^1(N) \to \mathcal{C}(M)$ mit

$$(X(f))_p = X_p(f) = df_{F(p)}(X_p)$$

für alle $f \in \mathcal{C}^1(N)$, $X \in \mathfrak{X}(F)$ und alle $p \in M$. Für alle f, $h \in \mathcal{C}^1(N)$ und $\mathfrak{X}(F)$ gilt die Produktregel

$$X(fh) = X(f) \cdot (h \circ F) + (f \circ F) \cdot X(h) \in C(M) .$$

(4) Sei ψ eine Karte von N, dann ist $U := F^{-1}(U^\psi)$ offen in M, da F als differenzierbare Abbildung insbesondere stetig ist. Wie in Bemerkung 1.22 sehen wir für alle $X \in \mathfrak{X}(F)$, dass

$$X|_U = \sum_{i=1}^n \underbrace{X(\psi^i)}_{\in \mathcal{C}(U)} \cdot \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right)}_{\in \mathfrak{X}(F|_U)} .$$

1.60. Definition. Ein *Zusammenhang längs F* ist eine Abbildung $\nabla\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^1(F) \to \mathfrak{X}(F)$ mit den Eigenschaften

(1) $\mathcal{C}(M)$-Linearität im ersten Argument,
(2) $\mathbb{R}$-Linearität im zweiten Argument,
(3) $\mathcal{C}^1(M)$-Derivativität im zweiten Argument:

$$\nabla_X(fY) = X(f) \cdot Y + f\,\nabla_X Y \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}(M),\ Y \in \mathfrak{X}^1(F) \text{ und alle } f \in \mathcal{C}^1(M) .$$

Die *Krümmung* eines Zusammenhangs ∇ längs F ist definiert als

$$R_{X,Y}Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \in \mathfrak{X}(F) \qquad \text{für alle } X,\, Y \in \mathfrak{X}^1(M) \text{ und alle } Z \in \mathfrak{X}^2(F) .$$

1.61. Proposition und Definition. *Sei ∇^{TN} ein Zusammenhang auf TN, und sei $F\colon M \to N$ differenzierbar, dann existiert genau ein Zusammenhang ∇^F längs F, so dass*

$$\nabla^F_X(Y \circ F) = \nabla^{TN}_{dF\circ X} Y \in \mathfrak{X}(F) \tag{1}$$

für alle $X \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Er heißt der von ∇^{TN} induzierte Zusammenhang längs F. *Sei R^{TN} die Krümmung von ∇^{TN}, dann hat ∇^F für alle $X,\, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, $Z \in \mathfrak{X}^2(F)$ und alle $p \in M$ die Krümmung*

$$R^F_{X,Y}Z|_p = R^{TN}_{dF_p(X_p),dF_p(Y_p)} Z_p \in T_{F(p)}N . \tag{2}$$

Beweis. Wir beweisen zunächst Eindeutigkeit. Sei $p \in M$, sei ψ eine Karte von N um $F(p)$, und sei $U = F^{-1}(U^\psi)$. Mit Hilfe von Abschneidefunktionen auf M sehen wir, dass $\nabla^F_X Y|_p$ für alle $Y \in \mathfrak{X}(F)$ nur von $Y|_U$ abhängt. Aus Bemerkung 1.59 (4) und Definition 1.60 (3) folgt

$$\begin{aligned} \nabla^F_X Y|_U &= \nabla^F_X \sum_{i=1}^n Y(\psi^i) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(X\bigl(Y(\psi^i)\bigr) \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) + Y(\psi^i)\, \nabla^{TN}_{dF\circ X} \frac{\partial}{\partial \psi^i} \right) . \end{aligned} \tag{*}$$

Also ist ∇^F eindeutig.

Zur Existenz überprüfen wir zuerst, dass obige Formel (*) für jede Karte ψ von N einen lokalen Zusammenhang längs $F|_{F^{-1}(U^\psi)}$ mit der geforderten Eigenschaft definiert. Sei dann φ eine weitere Karte von N, dann stimmen aufgrund der obigen Eindeutigkeitsaussage die mit Hilfe von φ und ψ konstruierten Zusammenhänge auf $F^{-1}(U^\varphi \cap U^\psi)$ überein. Also erhalten wir eine Abbildung $\nabla^F\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(F) \to \mathfrak{X}(F)$ durch Zusammensetzen der lokalen Definitionen. Wir müssen überprüfen, dass ∇^F einen Zusammenhang längs F mit der Eigenschaft (1) definiert, aber diese Rechnungen wollen wir hier nicht durchführen.

Behauptung (2) rechnet man am einfachsten in lokalen Koordinaten nach. Sei dazu φ eine Karte von M um p und ψ eine Karte von N um $F(p)$. Schreibe

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi^a} = \sum_{i=1}^n \left(dF \circ \frac{\partial}{\partial \varphi^a}\right)(\psi^i) \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i \circ F)}{\partial \varphi^a} \left(\frac{\partial}{\partial \psi^i} \circ F\right) ,$$

dann gilt

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^a}}\Bigl(\frac{\partial}{\partial\psi^j}\circ F\Bigr) = \nabla^{TN}_{\frac{\partial F}{\partial\varphi^a}}\frac{\partial}{\partial\psi^j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi^i\circ F)}{\partial\varphi^a}\Bigl(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i}}\frac{\partial}{\partial\psi^j}\Bigr)\circ F\;.$$

Wir können jetzt die Krümmung berechnen und erhalten

$$\begin{aligned}
&R^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^a},\frac{\partial}{\partial\varphi^b}}\Bigl(\frac{\partial}{\partial\psi^k}\circ F\Bigr)\\
&\qquad= \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^a}}\sum_{j=1}^n\frac{\partial(\psi^j\circ F)}{\partial\varphi^b}\Bigl(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^j}}\frac{\partial}{\partial\psi^k}\circ F\Bigr) - \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^b}}\sum_{i=1}^n\frac{\partial(\psi^i\circ F)}{\partial\varphi^a}\Bigl(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i}}\frac{\partial}{\partial\psi^k}\circ F\Bigr)\\
&\qquad= \sum_{j=1}^n\frac{\partial^2(\psi^j\circ F)}{\partial\varphi^a\,\partial\varphi^b}\Bigl(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^j}}\frac{\partial}{\partial\psi^k}\circ F\Bigr) - \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2(\psi^i\circ F)}{\partial\varphi^a\,\partial\varphi^b}\Bigl(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i}}\frac{\partial}{\partial\psi^k}\circ F\Bigr)\\
&\qquad\quad+\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial(\psi^i\circ F)}{\partial\varphi^a}\,\frac{\partial(\psi^j\circ F)}{\partial\varphi^b}\biggl(\Bigl(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i}}\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^j}}\frac{\partial}{\partial\psi^k} - \nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^j}}\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i}}\frac{\partial}{\partial\psi^k}\Bigr)\circ F\biggr)\\
&\qquad= \sum_{i,j,l=1}^n\frac{\partial(\psi^i\circ F)}{\partial\varphi^a}\,\frac{\partial(\psi^j\circ F)}{\partial\varphi^b}\Bigl(R^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i},\frac{\partial}{\partial\psi^j}}\frac{\partial}{\partial\psi^k}\circ F\Bigr) = R^{TN}_{\frac{\partial F}{\partial\varphi^a},\frac{\partial F}{\partial\varphi^b}}\frac{\partial}{\partial\psi^k}\;. \qquad\square
\end{aligned}$$

1.62. Bemerkung. Ab sofort sei stets ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang und ∇^F der dadurch induzierte Zusammenhang längs einer Abbildung F. Wir haben die folgenden Eigenschaften.

(1) *Torsionsfreiheit:* es gilt

$$\nabla^F_X(dF\circ Y) - \nabla^F_Y(dF\circ X) = dF\circ[X,Y]\in\mathfrak{X}(F)$$

für alle X, $Y\in\mathfrak{X}(M)$. Seien dazu φ und ψ Karten von M bzw. N, dann ist ${}^\psi\Gamma^k_{ij}$ symmetrisch in i, j wegen der Torsionsfreiheit von ∇. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^a}}\frac{\partial F}{\partial\varphi^b} &= \sum_{k=1}^n\frac{\partial^2(\psi^k\circ F)}{\partial\varphi^a\,\partial\varphi^b}\Bigl(\frac{\partial}{\partial\psi^k}\circ F\Bigr) + \sum_{i,j=1}^n\frac{\partial(\psi^i\circ F)}{\partial\varphi^a}\,\frac{\partial(\psi^j\circ F)}{\partial\varphi^b}\Bigl(\nabla^{TN}_{\frac{\partial}{\partial\psi^i}}\frac{\partial}{\partial\psi^j}\circ F\Bigr)\\
&= \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial\varphi^b}}\frac{\partial F}{\partial\varphi^a}\;,
\end{aligned}$$

da der obige Ausdruck symmetrisch in a und b ist. Hieraus folgt die allgemeine Formel leicht mit der Produktregel für die Lie-Klammer aus Bemerkung 1.29.

(2) Der Zusammenhang ist auch *metrisch:*

$$X(\langle Y,Z\rangle) = \langle\nabla^F_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla^F_X Z\rangle$$

für alle $X\in\mathfrak{X}(M)$ und alle Y, $Z\in\mathfrak{X}(F)$. Falls $Y=V\circ F$ und $Z=W\circ F$ mit V, $W\in\mathfrak{X}(N)$ gilt, folgt das sofort aus

$$X(\langle Y,Z\rangle) = X(\langle V,W\rangle\circ F) = \langle\nabla_{dF\circ X}V,Z\rangle + \langle Y,\nabla_{dF\circ X}W\rangle = \langle\nabla^F_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla^F_X Z\rangle\;.$$

Für beliebige Vektorfelder gehen wir vor wie bei der Konstruktion von ∇^F im Beweis von Proposition 1.61.

Im Falle einer Kurve $F=\gamma$ sei stets

$$\dot\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial t} \qquad\text{und}\qquad \ddot\gamma = \nabla^\gamma_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\in\mathfrak{X}(\gamma)\;.$$

Wir kommen nun zur ersten Variationsformel der Bogenlänge. Wir erinnern uns dazu an die Definition von Produktmannigfaltigkeiten aus den Übungen, mit

$$T(M \times N) = TM \times TN \;.$$

1.63. Definition. Sei $F\colon M \to N$ eine Abbildung. Eine *Variation von* F ist eine Abbildung $\bar F\colon M \times I \to N$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ ist, so dass

$$\bar F(p,0) = F(p) \qquad \text{für alle } p \in M \;.$$

Wir schreiben $F_s(p) = \bar F(p,s)$ für alle $p \in M$ und $s \in I$. Das *Variationsvektorfeld* von $\bar F$ ist definiert als

$$V = \frac{\partial \bar F}{\partial s} = d\bar F \circ \frac{\partial}{\partial s} \in \mathfrak{X}(\bar F) \;.$$

1.64. Satz (Erste Variation der Bogenlänge). *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\gamma\colon I \to M$ nach Bogenlänge parametrisiert, und sei $\bar\gamma\colon I \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ eine Variation von γ. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s|_{[a,b]}) = \langle \dot\gamma(t), V(t)\rangle\Big|_{t=a}^b - \int_a^b \langle \ddot\gamma(t), V(t)\rangle \, dt \;.$$

Der erste Ausdruck gibt an, wie sehr sich die Kurve dadurch verkürzt oder verlängert, dass man Anfangs- und Endpunkt in Richtung der Kurve bewegt. Der zweite kommt daher, dass sich die Kurve bei Variation in Richtung ihres Krümmungsvektors $\ddot\gamma$ verkürzt. Eine ähnliche (und kompliziertere) Rechnung haben wir im letzten Semester in Lemma 3.47 bei der Charakterisierung von Minimalflächen durchgeführt.

Beweis. Wir benutzen die Rechenregeln aus Bemerkung 1.62. Wenn $\bar\gamma$ von der Klasse $\mathcal{C}^2$ ist, dürfen wir in das Integral hinein differenzieren, und erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(\gamma_s|_{[a,b]}) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \sqrt{\langle \dot\gamma(t,s), \dot\gamma(t,s)\rangle}\, dt \\
&= \int_a^b \frac{2\Big\langle \nabla^{\bar\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}, \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\Big\rangle}{2\langle \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0), \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\rangle}\, dt = \int_a^b \Big\langle \nabla^{\bar\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial\bar\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\Big\rangle\, dt \\
&= \int_a^b \bigg(\frac{\partial}{\partial t}\Big\langle \frac{\partial\bar\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}(t,0)\Big\rangle - \Big\langle \frac{\partial\bar\gamma}{\partial s}(t,0), \nabla^{\bar\gamma}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial\bar\gamma}{\partial t}\Big\rangle\bigg)\, dt \\
&= \langle \dot\gamma(t), V(t)\rangle\Big|_{t=a}^b - \int_a^b \langle \ddot\gamma(t), V(t)\rangle\, dt \;.
\end{aligned}$$

□

Wenn wir also Anfangs- und Endpunkt festhalten, verschwindet die erste Ableitung genau dann für alle Variationen von γ, wenn bereits die Differentialgleichung $\ddot\gamma = 0$ gilt. Sollte es also eine kürzeste Verbindung von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ geben, so müsste sie diese Differentialgleichung erfüllen.

1.65. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine *geodätische Linie* oder kurz *Geodätische* auf (M,g) ist eine Kurve $c\colon I \to M$, die der Differentialgleichung $\ddot c = 0$ genügt.

1.66. Bemerkung. Man beachte, dass wir nun nicht mehr fordern, dass eine Geodätische c nach Bogenlänge parametrisiert ist. Es gilt aber immerhin

$$\frac{\partial}{\partial t}\, \|\dot c(t)\|^2 = 2\langle \ddot c(t), \dot c(t)\rangle = 0 \;,$$

d.h., Geodätische sind *proportional zur Bogenlänge* parametrisiert.

1.67. Beispiel. Sei $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ Geodätische bezüglich der Euklidischen Standardmetrik, dann ist $\ddot{c} = 0$, somit $\dot{c}$ konstant. Also existieren x_0, $v \in \mathbb{R}^n$ mit

$$c(t) = x_0 + tv \; .$$

1.68. Folgerung. *Es sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p, q \in M$. Wenn es eine kürzeste $\mathcal{C}^2$-Kurve $\gamma\colon [a, b] \to M$ mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$ gibt, dann ist γ bis auf Umparametrisierung eine Geodätische.*

Beweis. Sei γ eine Kurve in M mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = q$. Da die Bogenlänge von γ nach Bemerkung 1.57 (1) nicht von der Parametrisierung abhängt, dürfen wir annehmen, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist.

Wir nehmen an, dass $\ddot{\gamma}(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in [a, b]$. Aufgrund der Stetigkeit von $\ddot{\gamma}$ dürfen wir $t_0 \in (a, b)$ annehmen. Wähle eine Karte $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ um $\gamma(t_0)$, ein Intervall $I \subset (a, b) \cap \gamma^{-1}(U^\varphi)$ um t_0 und eine Abschneidefunktion $\rho\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ um t_0 mit $\operatorname{supp} \rho \subset I$. Dann können wir für $\varepsilon > 0$ hinreichend klein eine Variation $\overline{\gamma}\colon [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ von γ konstruieren, so dass $\gamma_s(t) = \gamma(t)$ für alle $t \in [a, b] \setminus I$ und

$$\varphi(\gamma_s(t)) = \varphi(\gamma(t)) + s \cdot \rho(t) \cdot \big(\ddot{\gamma}(t)\big)_\varphi$$

für alle $t \in I$. Es gilt also insbesondere $\gamma_s(a) = p$, $\gamma_s(b) = q$ für alle s, das Variationsfeld ist $V = \rho \cdot \ddot{\gamma}$, und

$$\int_a^b \langle \ddot{\gamma}(t), V(t) \rangle \, dt = \int_I \rho(t) \langle \ddot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle \, dt > 0 \; .$$

Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64 folgt

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\gamma_s) < 0 \; ,$$

und daher $L(\gamma_s) < L(\gamma)$ für alle hinreichend kleinen $s > 0$. Also ist eine Kurve γ mit $\ddot{\gamma}(t_0) \neq 0$ niemals kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte. □

1.69. Bemerkung. Die Existenz einer kürzesten Verbindung zwischen p und q in M ist nicht selbstverständlich. Sei beispielsweise $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht konvex, dann gibt es Punkte, die sich nicht durch eine kürzeste Kurve verbinden lassen. Etwa gibt es in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ keine kürzeste Kurve von p nach $-p$, wobei $p \neq 0$.

1.4. Exponentialabbildung und Jacobifelder

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es durch jeden Punkt auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit in jeder Richtung eine maximale Geodätische gibt. Diese Tatsache benutzen wir, um die Exponentialabbildung zu konstruieren. Anschließend betrachten wir ihre Ableitung.

Wir beginnen mit der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen und der differenzierbaren Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen.

1.70. Definition. Es seien (M, d_M), (N, d_N) metrische Räume. Eine Abbildung $F\colon M \to N$ heißt *Lipschitz-stetig* mit *Lipschitz-Konstante* Λ (kurz Λ-*Lipschitz*), wenn

$$d_N(F(p), F(q)) \leq \Lambda \cdot d_M(p, q)$$

für alle $p, q \in M$ gilt. Sei X ein topologischer Raum, dann heißt $F\colon M \times X \to N$ *Lipschitz-stetig in Richtung von M* mit Lipschitz-Konstante Λ, wenn für alle $x \in X$ die Abbildung $F(\,\cdot\,, x)\colon M \to N$ Λ-Lipschitz ist.

Wir nennen $F\colon M \to N$ *lokal Lipschitz* (bzw. $F\colon M \times X \to N$ *lokal Lipschitz* in Richtung von M), wenn für jeden Punkt $p \in M$ ($p \in M \times X$) eine Umgebung U von p und eine Konstante Λ existiert, so dass $F|_U$ die entsprechende Eigenschaft besitzt.

1.71. Bemerkung. (1) Lokal Lipschitz-stetige Funktionen sind insbesondere stetig.

(2) Seien $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F \in \mathcal{C}^1(U;V)$; dann ist F lokal Lipschitz. Wenn

$$\Lambda = \sup_{p \in U} \|dF_p\|_{\mathrm{op}} < \infty ,$$

existiert und U konvex ist, ist Λ eine globale Lipschitz-Konstante für F.

1.72. Satz (Picard-Lindelöf). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset U \times \mathbb{R}$ offen mit $U \times \{0\} \subset V$, und $X \colon V \to \mathbb{R}^n$ sei stetig.*

(1) *Wenn jeder Punkt $(p,t) \in V$ eine Umgebung in V besitzt, auf der $X(q,\tau)$ in q gleichmäßig Lipschitz-stetig ist, dann existieren Funktionen $t_-, t_+ \colon U \to \mathbb{R} \cup \{\pm, \infty\}$ und eine stetige Abbildung*

$$F \colon W = \bigl\{\, (p,t) \bigm| p \in U, t \in (t_-(p), t_+(p)) \,\bigr\} \to U$$

mit $F(\,\cdot\,,0) = \mathrm{id_U}$, $(F(p,t),t) \in V$ und

$$\frac{\partial F}{\partial t}(p,t) = X(F(p,t),t) \tag{*}$$

auf ganz W, und wenn t'_-, t'_+ und $F' \colon W' \to U$ Abbildungen mit den gleichen Eigenschaften sind, gilt $t_- \le t'_-$, $t'_+ \le t_+$ und $F' = F|_{W'}$.

(2) *Wenn $X \in \mathcal{C}^k(V)$ für $1 \le k \le \infty$ gilt, dann gilt auch $F \in \mathcal{C}^k(W)$ für die Abbildung aus* (1).

Beweis. Wir zeigen zunächst lokale Existenz und Eindeutigkeit. Globale Existenz und Eindeutigkeit lassen sich daraus leicht ableiten.

Sei zunächst $p \in U$, dann existieren $r > 0$, $0 < C < \infty$ und $0 < t_0 \le \min\bigl\{\frac{r}{C}, \frac{1}{C}\bigr\}$, so dass

(1) $\overline{B_{2r}(p)} \times [-t_0, t_0] \subset V$,
(2) $\bigl|X|_{\overline{B_{2r}(p)} \times (-t_0,t_0)}\bigr| < C$, und
(3) $\frac{C}{2}$ ist Lipschitz-Konstante für $X|_{\overline{B_{2r}(p)} \times \{t\}}$ für alle $t \in [-t_0, t_0]$.

Aufgrund der Voraussetzungen in Aussage (1) des Satzes lassen sich die Annahmen (1) und (3) leicht erfüllen. Annahme (2) folgt aus der Stetigkeit von X. Wir betrachten den Raum

$$\mathcal{C} = \bigl\{ F \in \mathcal{C}^0\bigl(B_r(p) \times (-t_0,t_0); \overline{B_{2r}(p)}\bigr) \bigm| F(q,0) = q \text{ für alle } q \in B_r(p) \bigr\}$$

mit der Supremumsmetrik. Für $F \in \mathcal{C}$, $q \in B_r(p)$ und $t \in (-t_0, t_0)$ definiere

$$TF(q,t) = q + \int_0^t X(F(q,\tau),\tau)\, d\tau .$$

Dann ist $TF \colon B_r(p) \times (-t_0, t) \to \mathbb{R}^n$ stetig mit $TF(q,0) = q$, und aus (1) und (2) oben folgt

$$d(TF(q,t),p) \le d(q,p) + t_0 \cdot C < 2r$$

für alle $q \in B_r(p)$, $t \in (-t_0, t_0)$, so dass $TF \in \mathcal{C}$.

Der Operator T wirkt außerdem kontrahierend auf $\mathcal{C}$ wegen (3), denn

$$\begin{aligned} \bigl|(TF_1) - TF_0)(q,t)\bigr| &\le \int_0^t \bigl|X(F_1(q,\tau),\tau) - X(F_0(q,\tau),\tau)\bigr|\, d\tau \\ &< t_0 \cdot \frac{C}{2} \cdot |F_1 - F_0|_{\mathcal{C}} \le \frac{1}{1}|F_1 - F_0|_{\mathcal{C}} . \end{aligned}$$

Da $\overline{B_{2r}(p)}$ vollständig ist, ist auch $\mathcal{C}$ mit der Supremumsmetrik vollständig. Nach dem Fixpunktsatz von Banach existiert also ein eindeutiger Fixpunkt F von T auf $\mathcal{C}$. Für alle $q \in B_r(p)$, $t \in (-t_0, t_0)$

folgt

$$\frac{\partial F}{\partial t}(q,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t X(F(q,\tau),\tau)\,d\tau = X(F(q,t))\;.$$

Sei umgekehrt $F'\colon B_r(p)\times(-t_0,t_0)\to V$ eine Abbildung mit $\frac{\partial F'}{\partial t}(q,t) = X(F'(q,t),t)$ für alle (q,t). Aus (2) oben folgt $\operatorname{im} F' \subset \overline{B_{2r}(p)}$, somit $F'\in\mathcal{C}$. Außerdem gilt

$$TF'(q,t) = q + \int_0^t X(F'(q,\tau),\tau)\,d\tau = F'(q,0) + \int_0^t \frac{\partial F'}{\partial \tau}(q,\tau)\,d\tau = F'(q,t)\;,$$

also ist F' ein Fixpunkt von T und somit $F'=F$. Also ist der obige Fixpunkt F die einzige Lösung der Differentialgleichung (*) auf dem Definitionsbereich $B_r(p)\times(-t_0,t_0)$.

Wir kommen zur Aussage (2), wieder zunächst lokal und nur für $k=1$. Wir kennen bereits die eindeutige Lösung F. Die partielle Ableitung $\frac{\partial F}{\partial t}$ existiert und ist stetig wegen (*). Es reicht also, die Existenz und Stetigkeit von $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ für $i=1,\dots,n$ zu überprüfen.

Für $q\in B_r(p)$ bestimmen wir zunächst $G_q\colon \mathbb{R}^n\times(-t_0,t_0)\to\mathbb{R}^n$ mit $G_q(v,0)=v$ und

$$\frac{\partial G_q}{\partial t}(v,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,t),t)\cdot G_q^j(v,t)\;, \tag{**}$$

denn die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t)$ erfüllen (**), wenn F stetig differenzierbar ist. Die Funktion $(v,t)\mapsto dX_{(F(g,t),t)}(v,0)$ ist Lipschitz-stetig in v mit Lipschitz-Konstante $\|dX_{(F(q,t),t)}\|_{\mathrm{op}}$, die stetig von q und t abhängt, da $X\in\mathcal{C}^1(V,\mathbb{R}^n)$. Gegebenenfalls nach Verkleinern von t_0 existieren daher für alle $q\in B_r(p)$ Funktionen $G_{q,i}\colon(-t_0,t_0)\to\mathbb{R}^n$, die (**) mit Anfangswert $G_{q,i}(0)=e_i\in\mathbb{R}^n$ lösen.

Wir wollen zeigen, dass $\frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t) = G_{q,i}(t)$ für alle $(q,t)\in B_r(p)\times(-t_0,t_0)$, und dass $\frac{\partial F}{\partial x^i}$ stetig ist. Sei dazu T wie im ersten Teil des Beweises, und $F_0(q,t)=q$, insbesondere ist $F_0\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}^1(B_r(p)\times(-t_0,t_0);\overline{B_{2r}(p)})$. Wie im Banachschen Fixpunktsatz ist der Fixpunkt F von T gleichmäßiger Limes der „Picard-Iterierten“

$$F_\nu = T^\nu F_0\in\mathcal{C}\;.$$

Für die Ableitungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q,t) &= \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^i}\int_0^t X(F_\nu(q,\tau),\tau)\,d\tau\\ &= e_i + \int_0^t\sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q,\tau),\tau)\frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q,\tau)\,d\tau\;,\end{aligned}$$

so dass insbesondere

$$F_\nu\in\mathcal{C}\cap\mathcal{C}^1(B_r(p)\times(-t_0,t_0);\overline{B_{2r}(p)})$$

für alle n. Es gilt sogar $\left|\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q,t)\right|\le 2$ für $i=1,\dots,n$, denn für F_0 gilt $\frac{\partial F_0}{\partial x^i}(q,t) = \frac{\partial q}{\partial x^i} = e_i$. Dazu wählen wir r, t, C wie oben so, dass zusätzlich

(4) $\|dX_q\|_{\mathrm{op}} < \frac{1}{2nt_0}$ für alle $q\in\overline{B_{2r}(p)}$.

Dann ist $\frac{1}{2nt_0}$ Lipschitz-Konstante für dX_q auf ganz $\mathbb{R}^n$. Jetzt folgt durch Induktion über ν, dass

$$\left|\frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q,t)\right| \le |e_i| + \int_0^t\sum_{j=1}^n \underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q,\tau),\tau)\right|}_{<\frac{1}{2nt_0}}\cdot\underbrace{\left|\frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q,\tau)\right|}_{<2}\,d\tau < 1+1=2\;.$$

Analog dazu erfüllen die Lösungen $G_{q,i}$ von (**) die Gleichung

$$G_{q,i}(t) = G_{q,i}(0) + \int_0^t \frac{\partial G_{q,i}}{\partial \tau}(\tau)\,d\tau = e_i + \int_0^t \sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,\tau),\tau)\cdot G_{q,i}^j(\tau)\,d\tau\ .$$

Wir betrachten die Folge der Differenzen $\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q,t) - G_{q,i}(t)$, und erhalten

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial F_{\nu+1}}{\partial x^i}(q,t) - G_{q,i}(t)\right| \leq \int_0^t \sum_{j=1}^n \Bigg(&\left|\frac{\partial X}{\partial x^j}(F_\nu(q,\tau),\tau) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,\tau),\tau)\right| \cdot \underbrace{\left|\frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q,\tau)\right|}_{\leq 2} \\ &+ \underbrace{\left|\frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,\tau),\tau)\right|}_{<\frac{1}{2nt_0}} \cdot \left|\frac{\partial F_\nu^j}{\partial x^i}(q,\tau) - G_{q,i}(\tau)\right|\Bigg)\,d\tau\ .\end{aligned}$$

Für

$$d_\nu = \max\left\{\left|\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q,t) - G_{q,i}(t)\right| \,\middle|\, i = 1,\dots,n, q \in B_r(p), |t| \leq t_0\right\}$$

folgt daraus

$$d_{\nu+1} < 2nt_0 \cdot \sup_{(q,t)} \left|\partial X_{(F_\nu(q,t),t)} - \partial X_{(F(q,t),t)}\right| + \frac{d\nu}{2}\ .$$

Da dX stetig ist, ist dX auf dem Kompaktum $\overline{B_{2r}(p)} \times [-t_0, t_0]$ gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass

$$\left|\frac{\partial X}{\partial x^j}(x,t) - \frac{\partial X}{\partial x^j}(y,t)\right| < \frac{\varepsilon}{2nt_0}$$

für alle $x, y \in \overline{B_{2r}(p)}$ mit $|x - y| < \delta$ und alle $t \in [t_0, t_0]$. Da die Picard-Iterierten F_ν gleichmäßig gegen F konvergieren, gibt es ein N, so dass $|F_\nu(q,t) - F(q,t)| < \delta$ für alle q, t und alle $\nu \geq N$. Für $\nu \geq N$ gilt $0 \leq d_{\nu+1} < \varepsilon + \frac{d\nu}{2}$, also insbesondere

$$d_{\nu+1} - 2\varepsilon < \frac{d_\nu - 2\varepsilon}{2}\ .$$

Hieraus folgt sofort, dass $d_\nu < 3\varepsilon$ für alle hinreichend großen ν. Da das für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt schließlich

$$\lim_{\nu\to\infty} d_\nu = 0\ .$$

Wir haben also gezeigt, dass die stetigen Funktionen $\frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}$ gleichmäßig gegen $G_i(q,t) = G_{q,i}(t)$ konvergieren. Hieraus folgt zunächst die Stetigkeit der G_i. Für festes (q,t) gilt

$$\frac{d}{ds}F_\nu(q + se_i, t) = \frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q + se_i, t)\ .$$

Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Ableitungen folgt, dass die Grenzfunktion $s \mapsto F(q + se_i, t)$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\frac{d}{ds}F(q + se_i, t) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(q + se_i, t) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{\partial F_\nu}{\partial x^i}(q + se_i, t) = g(q + se_i, t)\ .$$

Also existieren die partiellen Ableitungen von $F(q,t)$ in Richtung q und sind stetig, so dass insgesamt $F \in \mathcal{C}^1(B_r(p) \times (-t_0, t_0); \overline{B_{2r}(p)})$.

Wir zeigen Aussage (2) für $k > 1$ durch vollständige Induktion. Sei also (2) für $k \geq 1$ bereits lokal wie oben bewiesen, sei $X \in \mathcal{C}^{k+1}(V, \mathbb{R}^n)$, und sei $F \in \mathcal{C}^k(B_r(p) \times (-t_0, t_0), U)$ eine Lösung von (*). Dann gilt zunächst

$$\frac{\partial F}{\partial t}(q,t) = X(F(q,t),t) ,$$

also $\frac{\partial F}{\partial t} \in \mathcal{C}^k(B_r(p) \times (-t_0, t_0), U)$.

Es bezeichne $G\colon B_r(p) \times \mathbb{R}^n \times (-t_0, t_0) \to \mathbb{R}^n$ die $\mathcal{C}^{k-1}$-Funktion mit

$$G(q,v,t) = dF_{(q,t)}(v,0) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t) ,$$

dann erfüllt das Paar $(F,G)\colon B_r(p) \times \mathbb{R}^n \times (-t_0, t) \to U \times \mathbb{R}^n$ eine Differentialgleichung ähnlich wie (**) mit $\mathcal{C}^k$-Koeffizienten, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial (F,G)}{\partial t}(q,v,t) &= \left(X(F(q,t),t), \sum_{i,j=1}^n v^i \cdot \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,t),t) \cdot \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(q,t) \right) \\ &= \left(X(F(q,t),t), \sum_{i=1}^n \frac{\partial X}{\partial x^j}(F(q,t),t) \cdot G^j(q,v,t) \right) . \end{aligned}$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist (F,G) eine $\mathcal{C}^k$-Funktion, insbesondere also auch die Funktionen

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(q,t) = G(q, e_i, t) ,$$

eventuell nach Verkleinern von r und t. Alle partiellen Ableitungen von F sind demnach $\mathcal{C}^k$-Funktionen, also ist F selbst eine $\mathcal{C}^{k+1}$-Funktion.

Es bleibt die globale Existenz und Eindeutigkeit sowohl in (1) als auch in (2) zu zeigen. Seien dazu zunächst für $p \in U$ die Funktionen $f_i\colon (t_{i-}, t_{i+}) \to U$ mit $t_{i-} < 0 < t_{i+}$ für $i = 1, 2$ Lösungen von (*), also

$$f_i'(t) = X(f_i(t), t)$$

mit Anfangswerten $f_1(0) = f_2(0) = p$. Angenommen, es gebe $t \in (t_{1-}, t_{1+}) \cap (t_{2-}, t_{2+})$ mit $f_1(t) \neq f_2(t)$, ohne Einschränkung $t > 0$, dann sei

$$t_0 = \inf\{ t \in (0, t_{1+}) \cap (0, t_{2+}) \mid f_1(t) \neq f_2(t) \} .$$

Wegen Stetigkeit gilt $f_1(t_0) = f_2(t_0)$. Wir betrachten das „verschobene Problem"

$$\frac{\partial}{\partial s} f_i(t_0 + s) = X(f_i(t_0 + s), t_0 + s)$$

mit Anfangswert $f_1(t_0) = f_2(t_0)$ bei $s = 0$. Wegen der lokalen Existenz und Eindeutigkeit existiert $\varepsilon > 0$, so dass die Lösungen für $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eindeutig sind, also $f_1(t_0 + s) = f_2(t_0 + s)$ für alle hinreichend kleinen $s > 0$, im Widerspruch zur Konstruktion von t_0. Folglich sind einzelne Lösungen eindeutig. Wir erhalten eine maximale Lösung $f_{\max}$ auf der Vereinigung (t_-, t_+) aller Intervalle, auf denen eine Lösung f mit $f(0) = p$ existiert, indem wir für jedes $t \in (t_-, t_+)$ den Wert einer solchen Lösung, die bei t definiert ist, auswählen. Dafür schreiben wir

$$f_{\max} = \bigcup \left\{ f\colon (t_-, t_+) \to V \;\middle|\; t_- < 0 < t_+,\ f(0) = p \text{ und } f'(t) = X(f(t), t) \right\} .$$

Indem wir dieses Argument für alle $p \in U$ durchführen, bestimmen wir $t_-, t_+ \colon U \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, die Menge $W \subset U \times \mathbb{R}$ und $F = F_{\max}\colon W \to U$. $\square$

1.73. BEMERKUNG. (1) Wenn die maximale Lösung bei $(p,t) \in W$ existiert, existiert sie auch in einer kleinen Umgebung. Also ist die Menge $W \subset U \times \mathbb{R}$ offen, und die Funktionen t_-, t_+ sind ober- bzw. unterhalbstetig auf U. Mehr Regularität können wir auch im $\mathcal{C}^\infty$-Fall nicht erwarten.

(2) Wenn $(t_-(p), t_+(p))$ das maximale Definitionsintervall der Lösung $f_p(t) = F(p,t)$ ist und $t_-(p) > -\infty$ bzw. $t_+(p) < \infty$, dann existieren die Grenzwerte

$$\lim_{t \searrow t_-(p)} (F(p,t), t) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \nearrow t_+(p)} (F(p,t), t)$$

nicht in V, denn andernfalls könnten wir die Lösung vom Grenzwert als neuem Anfangswert zur Zeit $t_\pm(p)$ aus noch ein Stück fortsetzen, im Widerspruch zur Maximalität des Intervalls $(t_-(p), t_+(p))$.

(3) Die Existenz und Eindeutigkeit einer globalen $\mathcal{C}^k$-Lösung $F\colon W \to U$ impliziert, dass die einzelnen Lösungen $f_p\colon (t_-(p), t_+(p)) \to U$ eindeutig sind und $\mathcal{C}^k$-differenzierbar vom Anfangswert p abhängen. Mit einem kleinen Trick kann man auch zeigen, dass die Lösungen $\mathcal{C}^k$-differenzierbar von den Koeffizienten X abhängen. Der Fall $k = 0$ ist ein Sonderfall, da wir eine Lipschitz-Bedingung an X stellen müssen — für $k \geq 1$ ist keine Lipschitz-Bedingung an die k-fachen Ableitungen $\frac{\partial^{|\alpha|} X}{\partial X^\alpha}$ mit $|\alpha| = k$ nötig.

(4) Wenn die Koeffizienten X von (*) nur stetig, aber nicht Lipschitz-stetig in Richtung von U sind, existieren nach dem Satz von Peano zwar immer noch Lösungen $f\colon (t_-, t_+) \to U$ mit vorgegebenem Anfangswert $f(0) = p$; diese sind jedoch im allgemeinen nicht eindeutig. Dementsprechend können wir keine stetige globale Lösung $F\colon W \to U$ erwarten (Übung).

1.74. SATZ. *Sei (M,g) eine Riemannsche $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit mit $k \geq 3$. Dann existiert zu jedem $p \in M$ und jedem Vektor $v \in T_pM$ eine eindeutige Geodätische $c = c_v\colon I \to M$ mit maximalem Definitionsbereich $I \subset \mathbb{R}$, so dass $c_v(0) = p$ und $\dot c_v(0) = v$.*

BEWEIS. Dieser Satz folgt aus dem Satz von Picard-Lindelöf. Um das einzusehen, schreiben wir die Geodätischengleichung in lokalen Koordinaten φ von M um $p = \pi(v)$. Wie in Bemerkung 1.62 (1) erhalten wir

$$\ddot c(t) = \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2(\varphi^i \circ c)}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \circ c \right) + \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial(\varphi^i \circ c)}{\partial t} \frac{\partial(\varphi^j \circ c)}{\partial t} \left(({}^\varphi\Gamma^k_{ij} \circ \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \right) \circ c\,.$$

Wenn wir ${}^\varphi c = \varphi \circ c\colon I \to V^\varphi$ schreiben, ist lokal also das nichtlineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$${}^\varphi\ddot c^k(t) = -\sum_{i,j=1}^n {}^\varphi\Gamma^k_{ij}({}^\varphi c(t))\, {}^\varphi\dot c^i(t)\, {}^\varphi\dot c^j(t) \quad \text{für alle } k = 1, \dots, n$$

mit den Anfangsbedingungen ${}^\varphi c(0) = \varphi(p)$ und ${}^\varphi\dot c(0) = v_\varphi$ zu lösen. Wir schreiben es als ein System von Gleichungen erster Ordnung

$$\frac{d}{dt}\big({}^\varphi c(t), {}^\varphi\dot c(t)\big) = \left({}^\varphi\dot c(t), -\sum_{i,j=1}^n {}^\varphi\Gamma^k_{ij}\big({}^\varphi c(t)\big)\, {}^\varphi\dot c^i(t)\, {}^\varphi\dot c^j(t)\, e_k \right).$$

Dieses System hat eine eindeutige maximale lokale Lösung mit Definitionsintervall I_φ, denn da $k \geq 3$, sind die Christoffelsymbole stetig differenzierbar.

Wir wollen aber eine maximale globale Lösung konstruieren. Dazu betrachten wir alle Kurven $c\colon I \to M$, die der Gleichung $\ddot c = 0$ mit der Anfangsbedingung $\gamma(0) = p$ und $\dot\gamma(0) = v$ genügen. Wie im letzten Schritt des Beweis von Satz 1.72 sieht man leicht, dass je zwei solche

Lösungen $c_i\colon I_i \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2$ auf $I_1 \cap I_2$ übereinstimmen. Wir erhalten also eine eindeutige maximale Lösung

$$c_v = \bigcup \bigl\{\, c\colon I \to M \bigm| 0 \in I \subset \mathbb{R} \text{ offenes Intervall, } c(0) = p,\ \dot c(0) = v \text{ und } \ddot c = 0 \,\bigr\} . \qquad \square$$

Wir können alle Geodätischen simultan betrachten. Sei dazu wieder c_v die eindeutige maximale Geodätische mit Startvektor $\dot c_v(0) = v$.

1.75. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Setze

$$D_{\exp} = \bigl\{\, v \in TM \bigm| c_v(t) \text{ ist für } t = 1 \text{ definiert} \,\bigr\} \subset TM$$

und definiere die (*Riemannsche*) *Exponentialabbildung* $\exp\colon D_{\exp} \to M$ durch

$$\exp(v) = c_v(1) .$$

Für $p \in M$ schreibe $\exp_p = \exp|_{T_pM}\colon T_pM \to M$.

Zunächst müssen wir damit leben, dass eventuell $D_{\exp} \neq TM$ gilt, später werden wir nur noch Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit $D_{\exp} = TM$ betrachten. Als Beispiel betrachte eine kleine konvexe offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$, etwa $U = B_1(0)$, mit der Euklidischen Standardmetrik g^{eukl}. Geodätische werden offenbar gegeben durch

$$c_{(p,v)}(t) = p + tv$$

für alle $p \in U$ und alle $v \in T_pU = \mathbb{R}^n$. Da $U = B_1(0)$ konvex ist, erhalten wir

$$D_{\exp} = \bigl\{\, (p, v) \bigm| p, p + v \in U \,\bigr\} \subsetneq TU = U \times \mathbb{R}^n \qquad \text{und} \qquad \exp_p(v) = p + v .$$

1.76. Bemerkung. Es sei $v \in T_pM$, dann gilt $c_v(t) = \exp(tv)$ auf dem Definitionsintervall

$$I = \bigl\{\, t \in \mathbb{R} \bigm| tv \in D_{\exp} \,\bigr\} .$$

Da $\exp(tv) = c_{tv}(1)$, reicht es zu zeigen, dass $c_{tv}(s) = c_v(st)$, dass also $s \mapsto \gamma(s) = c_v(st)$ eine Geodätische mit Startvektor tv ist. Das gilt, denn $\dot\gamma(0) = t\,\dot c_v(0) = tv$ und

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot\gamma = \nabla^{c_v(\,\cdot\,t)}_{\frac{\partial}{\partial s}} \bigl(t\,\dot c_v(\,\cdot\,t)\bigr)\big|_s = t\,\nabla^{c_v}_{t\frac{\partial}{\partial s}} \dot c_v\big|_{st} = t^2\,\ddot c_v(st) = 0 .$$

1.77. Bemerkung. Wir wollen die Ableitung der Exponentialabbildung bei $0_p = (p, 0) \in T_pM$ betrachten; dazu benötigen wir den Tangentialraum $T_{0_p}TM$. Sei also M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann ist TM eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit nach Proposition 1.16. Wir betrachten die Inklusionsabbildung $\iota\colon T_pM \to TM$ und die Projektion $\pi\colon TM \to M$ aus Proposition 1.16. Da $\pi \circ \iota$ die konstante Abbildung auf den Punkt $p \in M$ darstellt, folgt $d\pi \circ d\iota = 0$. Aus Dimensionsgründen ist die Sequenz

$$0 \longrightarrow \underbrace{T_0T_pM}_{\cong T_pM} \xrightarrow{d\iota} T_{0_p}TM \xrightarrow{d\pi} T_pM \longrightarrow 0$$

exakt, und da T_pM ein Vektorraum ist, folgt $T_0T_pM \cong T_pM$.

Wir können diese Sequenz sogar natürlich spalten. Dazu betrachten wir zu $v \in T_pM$ eine Kurve γ in M mit $[v] = \gamma$, dann ist die dazugehörige Kurve $\bar\gamma(t) = 0_{\gamma(t)}$ von Nullvektoren eine Kurve in TM mit $\pi \circ \bar\gamma = \gamma$, somit $d\pi[\bar\gamma] = [\gamma] = v$. Es gilt also in natürlicher Weise

$$T_{0_p}TM = T_pM \oplus T_pM .$$

1.78. Satz. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann hat die Riemannsche Exponentialabbildung die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Ist M von der Klasse $\mathcal{C}^k$ mit $k \geq 3$, so ist* exp *von der Klasse $\mathcal{C}^{k-2}$.*

(2) *Für alle $p \in M$ ist $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung $V_p \subset T_pM$ von $0_p \in T_pM$ mit Differential*

$$d_{0_p}(\exp_p)(v) = v \qquad \textit{für alle } v \in T_pM \ .$$

(3) *Für alle $p \in M$ ist $(\pi \times \exp)\colon D_{\exp} \to M \times M$ ein lokaler Diffeomorphismus in einer Umgebung $V \subset D_{\exp}$ von $0_p \in T_pM$ mit Differential*

$$d_{0_p}(\pi \times \exp) = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ \mathrm{id} & \mathrm{id} \end{pmatrix} : T_{0_p}TM \cong T_pM \oplus T_pM \to T_pM \oplus T_pM \ .$$

Beweis. Da die Koeffizienten des Differentialgleichungssystems im Beweis von Satz 1.74 von der Klasse $\mathcal{C}^{k-2}$ sind, folgt das gleiche für die Gesamtheit aller Lösungen mit variablen Anfangsbedingungen, und wir erhalten (1).

Zu (2) benutzen wir Bemerkung 1.76. Mit $T_0T_pM \cong T_pM$ wie oben folgt

$$d_0(\exp_p)(v) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \exp_p(tv) = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} c_v(t) = \dot c_v(0) = v \ .$$

Aus dem Umkehrsatz folgt die lokale Umkehrbarkeit in einer Umgebung von 0_p in T_pM, auf der $d\exp_p$ invertierbar ist.

Zu (3) benutzen wir Bemerkung 1.77 und identifizieren $T_{0_p}TM$ mit $(T_pM)^2$. Für eine Kurve $\bar\gamma(t) = 0_{\gamma(t)}$ von Nullvektoren folgt

$$\exp(\bar\gamma(t)) = \exp(0_{\gamma(t)}) = \gamma(t) = \pi(\bar\gamma(t)) \ ,$$

also $d\pi\big(\dot{\bar\gamma}(0)\big) = d\exp\big(\dot{\bar\gamma}(0)\big) = \dot\gamma(0)$. Das liefert die erste Spalte des Differentials, die zweite ergibt sich aus (2). Die lokale Invertierbarkeit folgt wieder aus dem Umkehrsatz. □

Um das Differential der Exponentialabbildungen besser zu verstehen, betrachten wir jetzt geodätische Variationen.

1.79. Definition. Sei c Geodätische auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g). Ein Vektorfeld V längs c heißt *Jacobifeld,* wenn es die Differentialgleichung

$$\nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} V + R_{V,\dot c}\dot c = 0$$

erfüllt. Eine Variation $\bar c\colon I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ von c heißt *geodätisch,* wenn alle Kurven $c_s = \bar c(\,\cdot\,, s)$ Geodätische sind.

1.80. Bemerkung. (1) Der Krümmungstensor R ist für $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten mit $k \geq 3$ definiert und stetig. In Koordinaten ist die Jacobigleichung ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, erfüllt in diesem Fall also automatisch die lokale Lipschitz-Bedingung aus dem Satz 1.72 von Picard-Lindelöf.

(2) Zu jeder Geodätischen c und a, $b \in \mathbb{R}$ können wir die geodätische Variation

$$\bar c(t,s) = c\big(as + b(1+s)t\big)$$

mit Variationsfeld

$$V = \frac{\partial \bar c}{\partial s} = a\dot c(t) + bt\,\dot c(t)$$

betrachten. Insbesondere sind also $\dot c$ und $t \cdot \dot c$ nach dem folgenden Satz Jacobifelder.

Wir schreiben

$$\ddot V = \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial t}} V \ ,$$

und die Jacobi-Gleichung schreiben wir kürzer als

$$\ddot V + R_{V,\dot c}\dot c = 0 \ .$$

1.81. SATZ. *Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $c\colon I \to M$ eine Geodätische, und sei $[a, b] \subset I$. Ein Vektorfeld V längs $c|_{[a,b]}$ ist genau dann Jacobifeld, wenn es eine geodätische Variation $\bar{c}\colon I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ von c gibt, so dass V das Variationsfeld von $\bar{c}$ ist.*

BEWEIS. Zu „$\Leftarrow$“ sei $\bar{c}$ eine geodätische Variation von c. Dann gilt $\nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \ddot{\bar{c}}(t, s) = 0$ für alle $(t, s) \in I \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir leiten nach s ab und erhalten

$$0 = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + R^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} + R^{TM}_{\frac{\partial \bar{c}}{\partial s}, \frac{\partial \bar{c}}{\partial t}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \ddot{V} + R_{V, \dot{c}} \dot{c} \,,$$

wobei wir zunächst die Definition 1.60 von $R^{\bar{c}}$ und dann die Torsionsfreiheit von $\nabla^{\bar{c}}$ in Bemerkung 1.62 ausgenutzt haben. Somit ist das Variationsvektorfeld einer geodätischen Variation ein Jacobi-Feld.

Sei nun umgekehrt V ein Jacobifeld, und sei $t_0 \in [a, b]$. Realisiere zunächst $V(t_0)$ durch eine Kurve γ in M mit $\dot{\gamma} = V(t_0)$. Im Folgenden sei s der Parameter von γ. Bestimme dann ein differenzierbares Vektorfeld W längs γ mit

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} W = \dot{V}(t_0) \,.$$

Das ist möglich, da die obige Bedingung in Koordinaten gerade die erste Ableitung von W bestimmt.

Nach Satz 1.74 existiert zu jedem s eine maximale Geodätische $c_s\colon I_s \to M$ mit $c_s(t_0) = \gamma(s)$ und $\dot{c}_s(t_0) = W(s)$, und $c_s(t)$ hängt $\mathcal{C}^2$ von s und t ab. Da $[a, b] \subset I$ kompakt ist und da c_s differenzierbar in s ist, können wir $\varepsilon > 0$ so wählen, dass $[a, b] \subset I_s$ für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Wir erhalten also eine Geodätische Variation $\bar{c}(t, s) = c_s(t)$ für alle $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Das Variationsfeld $\frac{\partial \bar{c}}{\partial s}$ ist nach dem ersten Teil des Beweises ein Jacobi-Feld, uns es gilt

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial s}(t_0) = \dot{\gamma}(0) = V(t_0) \qquad \text{und} \qquad \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}|_{(t_0,0)}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial s}|_{(t_0,0)}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial s}|_{s=0}} W = \dot{V}(t_0) \,.$$

In Koordinaten ist die Jacobigleichung ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung, also hat es nach Picard-Lindelöf zu jedem Paar von Anfangswerten $V(t_0), \dot{V}(t_0) \in T_{c(t_0)}M$ eine eindeutige Lösung. Daher folgt $V = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s}$, also leistet die geodätische Variation $\bar{c}$ das gewünschte. $\square$

1.82. BEMERKUNG. Wir können das Differential der Exponentialabbildung jetzt (etwas) besser verstehen. Seien dazu $p \in M$ und $v \in T_pM$ beliebig, dann können wir einen Vektor $w \in T_vTM$ wie oben geometrisch durch ein Vektorfeld W längs einer Kurve γ auf M mit $\gamma(0) = p$, $W(0) = v$ realisieren. Wir schreiben wieder

$$w = \big((\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} W)(0), \dot{\gamma}(0)\big) \in T_pM \times T_pM \cong T_vTM \,.$$

Betrachte wieder die geodätische Variation

$$\bar{c}(t, s) = c_{W(s)}(t) = \exp_{\gamma(s)}(t \cdot W(s))$$

mit Variationsfeld V längs $c_0 = c_v$. Dann ist V das Jacobifeld längs c_v mit den Anfangsbedingungen

$$V(0) = \dot{\gamma}(0) \in T_pM \qquad \text{und} \qquad \dot{V}(0) = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial s} = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = (\nabla^{\gamma}_{\frac{\partial}{\partial s}} W)(0) \,.$$

Wir erhalten also

$$(d_v \exp)(w) = \frac{\partial}{\partial s}\big(\exp_{\gamma(s)} W(s)\big) = \frac{\partial \bar{c}}{\partial s}(1, 0) = V(1) \,.$$

Um das Differential von exp zu verstehen, müssen wir also nur die Jacobigleichung mit den oben angegebenen Anfangsbedingungen lösen. Da die Jacobi-Gleichung im Gegensatz zur Geodätischen-Gleichung linear ist, stellt das eine gewisse Vereinfachung dar.

Wir wollen jetzt geodätische Normalkoordinaten definieren. Nach Satz 1.78 (2) ist $\exp_p$ nahe des Nullvektors $0_p \in T_pM$ ein lokaler Diffeomorphismus.

1.83. Definition. Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$. Sei $V \subset T_pM$ eine Umgebung des Nullvektors $0_p = (p,0)$ in T_pM, so dass $\exp_p \colon V \to U := \exp_p V$ ein Diffeomorphismus ist, und sei $A \colon (T_pM, g_p) \to (\mathbb{R}^n, \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle)$ eine lineare Isometrie, dann nennt man eine Karte der Form $\varphi = A \circ \exp_p^{-1} \colon U \to V^\varphi = A(V)$ *Riemannsche Normalkoordinaten* von M um p.

Für Rechnungen am Punkt p haben Normalkoordinaten um p sehr schöne Eigenschaften.

1.84. Proposition. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$. In Riemannschen Normalkoordinaten $\varphi \colon U \to V$ um p gilt*

$$g^\varphi_{ij}(0_p) = \delta_{ij}\ , \qquad \frac{\partial g^\varphi_{ij}}{\partial x^k}(0_p) = 0 \qquad \textit{und} \qquad {}^\varphi\Gamma^k_{ij}(0_p) = 0 \qquad \textit{für alle } i,\ j,\ k = 1,\ \dots,\ n\ .$$

Insbesondere folgt $\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi^i}} \frac{\partial}{\partial\varphi^j}|_p = 0$ für alle i, j.

Man beachte, dass diese Aussagen in der Regel nur am Punkt p gelten. Wären sie auch in einer Umgebung richtig, so wäre die Umgebung lokal isometrisch zum Euklidischen $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Die erste Aussage folgt aus Satz 1.78 (2), da $d_{0_p}(\exp_p) = \mathrm{id}_{T_pM}$ genau wie A eine lineare Isometrie ist. Die zweite Aussage folgt aus der dritten, da

$$\frac{\partial g^\varphi_{ij}}{\partial x^k} = e_k\bigl({}^\varphi g(e_i, e_j)\bigr) = \sum_{l=1}^n \bigl({}^\varphi g(\Gamma^l_{ki} e_l, e_j) + {}^\varphi g(e_i, \Gamma^l_{kj} e_l)\bigr) = 0\ .$$

Zur dritten beachten wir, dass Γ^k_{ij} wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ für alle k in i und j symmetrisch ist. Da außerdem radiale Geraden $c^\varphi_v(t) = tv \in V^\varphi$ für alle $v \in T_pM$ Geodätische bezüglich der Metrik ${}^\varphi g$ auf V^φ sind, folgt

$$0 = \ddot c^\varphi_v(0) = \frac{\partial^2(tv)}{\partial t^2} + \sum_{i,j,k=1}^n v^i\, v^j\ {}^\varphi\Gamma^k_{ij}(0_p)\, e_k = \sum_{i,j,k=1}^n v^i\, v^j\ {}^\varphi\Gamma^k_{ij}(0_p)\, e_k\ ,$$

also ${}^\varphi\Gamma^k_{ij}(0_p) = 0$ für alle i, j, k durch Koeffizientenvergleich. □

1.85. Bemerkung. Man kann g^φ_{ij} und ${}^\varphi\Gamma^k_{ij}$ um 0_p nach Taylor entwickeln. Die nächsten interessanten Koeffizienten $\frac{\partial\, {}^\varphi\Gamma^l_{ij}}{\partial x^k}(0_p)$ und $\frac{\partial^2 g^\varphi_{ij}}{\partial x^k\, \partial x^l}(0_p)$ hängen nur von den Koeffizienten $R^l_{ijk}(0_p)$ der Krümmung ab (Übung), für die höheren Terme benötigt man außerdem auch die höheren kovarianten Ableitungen des Krümmungstensors.

1.86. Satz (Zweite Variation der Bogenlänge). *Sei $c \colon I \to M$ eine Geodätische mit $\|\dot c\| = 1$ auf einer Riemmanschen Mannigfaltigkeit (M,g), und sei $\bar c \colon I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ eine Variation von c mit Variationsvektorfeld V. Setze*

$$\tilde V = V - \langle V, \dot c\rangle\, \dot c\ ,$$

dann gilt

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(c_s|_{[a,b]}) = \Bigl\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot c\Bigr\rangle\Big|_{t=a}^b + \int_a^b \bigl(\bigl\langle \dot{\tilde V}, \dot{\tilde V}\bigr\rangle - \langle R_{V,\dot c}\, \dot c, V\rangle\bigr)\, dt\ .$$

Für geodätische Variationen vereinfacht sich der obige Ausdruck weiter.

Beweis. Da c eine Geodätische mit $\|\dot c\| = 1$ ist, gilt

$$\dot{\tilde V} = \dot V - \langle \dot V, \dot c\rangle \dot c - \langle V, \ddot c\rangle \dot c - \langle V, \dot c\rangle \ddot c = \dot V - \langle \dot V, \dot c\rangle \dot c$$

und

$$\big\langle \dot{\tilde V}, \dot{\tilde V}\big\rangle = \big\langle \dot V - \langle \dot V, \dot c\rangle \dot c, \dot V - \langle \dot V, \dot c\rangle \dot c\big\rangle = \langle \dot V, \dot V\rangle\langle \dot c, \dot c\rangle - \langle \dot V, \dot c\rangle^2 \;.$$

Wir gehen wie im Beweis von Satz 1.64 vor und berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(c_s|_{[a,b]}) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_a^b \frac{\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \dot c_s, \dot c_s\rangle}{\|\dot c_s\|}\,dt = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\int_a^b \frac{\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \dot c_s\rangle}{\|\dot c_s\|}\,dt \\
&= \int_a^b \frac{\big(\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \dot c\rangle + \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V\rangle\big)\,\langle \dot c_s, \dot c_s\rangle - \langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} V, \dot c_s\rangle^2}{\|\dot c_s\|^3}\bigg|_{s=0} dt \\
&= \int_a^b \Big(\Big\langle R^{\bar c}_{\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}} V, \dot c\Big\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot c\Big\rangle + \big\langle \dot{\tilde V}, \dot{\tilde V}\big\rangle\Big)\,dt \\
&= \Big\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot c\Big\rangle\Big|_{t=a}^b + \int_a^b \big(\big\langle \dot{\tilde V}, \dot{\tilde V}\big\rangle - \langle R_{V,\dot c}\,\dot c, V\rangle\big)\,dt \;.
\end{aligned}$$

□

1.5. Riemannsche Mannigfaltigkeiten als Metrische Räume

In diesem Kapitel betrachten wir Riemannsche Mannigfaltigkeiten (M, g) als metrische Räume. Wir zeigen, dass kurze Teilstücke von Geodätischen den Abstand zwischen ihren Punkten realisieren. Auf diese Weise liefert uns die Exponentialabbildung spezielle Karten von (M, g) um p, die geodätischen Normalkoordinaten, die sehr gut an die lokale Geometrie von M angepasst sind.

Wir definieren zunächst den Abstand d zwischen zwei Punkten auf M und ziehen einige elementare Schlussfolgerungen. Anschließend beweisen wir das Gauß-Lemma, was uns lokale Information über den metrischen Raum (M, d) gibt.

1.87. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die *Riemannsche Abstandsfunktion* $d\colon M \times M \to [0, \infty]$ ist definiert als

$$d(p, q) = \inf\big\{\, L(\gamma|_{[a,b]}) \;\big|\; \gamma\colon I \to M \text{ Kurve mit } \gamma(a) = p \text{ und } \gamma(b) = q \text{ für } a < b \,\big\}$$

für alle p, $q \in M$. Für einen festen Punkt $p \in M$ schreiben wir $d_p = d(p, \,\cdot\,)\colon M \to [0, \infty]$.

Nach Definition des Infimums ist der Abstand $d(p, q)$ genau dann unendlich, wenn es keine differenzierbaren Kurven von p nach q gibt, das heißt, wenn p und q in verschiedenen Wegzusammenhangskomponenten von M liegen.

1.88. Bemerkung. Nach Definition ist die Funktion d

(1) *nicht negativ:* $d(p, q) \ge 0$ für alle p, $q \in M$, wobei $d(p, p) = 0$ für alle $p \in M$;
(2) *symmetrisch:* $d(p, q) = d(q, p)$ für alle p, $q \in M$, denn zu jeder Kurve γ mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ für $a < b$ ist $\gamma' = \gamma(-\,\cdot\,)$ eine Kurve mit $\gamma'(a') = q$ und $\gamma'(b') = p$ für $a' = -b < b' = -a$;
(3) und erfüllt die Dreiecksungleichung

$$d(p, r) \le d(p, q) + d(q, r)$$

für alle p, q, $r \in M$, denn je zwei Kurven γ_1 von p nach q und γ_2 von q nach r lassen sich zu einer Kurve γ von p nach r verketten, und nach glätten gilt für beliebige $\varepsilon > 0$, dass

$$L(\gamma) < L(\gamma_1) + L(\gamma_2) + \varepsilon \;,$$

und Bilden des Infimums auf beiden Seiten liefert die Behauptung.

(4) Wenn es eine reguläre Kurve γ von $p = \gamma(a)$ nach $q = \gamma(b)$ mit

$$L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p,q)$$

gibt, dann ist γ nach Folgerung 1.68 bis auf Umparametrisierung eine Geodätische.

Sobald wir gezeigt haben, dass $d(p,q) > 0$ für $p \neq q$, wissen wir, dass d tatsächlich eine Metrik auf M definiert.

Der folgende Satz ist der erste Schritt zum Verständnis des Abstandsbegriffs auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

1.89. Satz (Gauß-Lemma). *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und seien v, $w \in T_pM$. Wenn wir v, w als Vektoren in $T_vT_pM \cong T_pM$ auffassen, dann gilt*

$$\big\langle d_v(\exp_p)(v), d_v(\exp_p)(w)\big\rangle_{\exp_p v} = \langle v, w\rangle_p \ .$$

Beweis. Es sei c die Geodätische durch p mit Startvektor v, dann gilt $c(0) = p$, $\dot c(0) = v$, $c(1) = \exp_p v$ und $\dot c(1) = d_v(\exp_p)(v)$. Definiere eine Variation von c durch

$$\bar c(t,s) = c_s(t) = \exp_p\big(t \cdot (v + sw)\big) \ ,$$

dann folgt

$$d_v(\exp_p)(w) = \frac{\partial}{\partial s}\exp_p\big(t\cdot(v+sw)\big) = \frac{\partial \bar c}{\partial s}\Big|_{(1,0)} = V(1) \ ,$$

hierbei ist das Jacobi-Feld V eindeutig durch die Anfangswerte

$$V(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot V(0) = \frac{\partial^2 \bar c}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}\underbrace{(v + sw)}_{\in T_pM} = w$$

bestimmt.

Aus der Jacobi-Gleichung folgt

$$\frac{d}{dt}\langle \dot V(t), \dot c(t)\rangle = \langle \ddot V(t), \dot c(t)\rangle = -\langle R_{V(t),\dot c(t)}\,\dot c(t), \dot c(t)\rangle = 0$$

wegen Satz 1.51 (3). Aufgrund unser Anfangsbedingungen gilt also

$$\langle \dot V(t), \dot c(t)\rangle = \langle \dot V(0), \dot c(0)\rangle = \langle v, w\rangle_p \ .$$

Desweiteren gilt $\langle V(0), \dot c(0)\rangle = 0$ und

$$\frac{d}{dt}\langle V(t), \dot c(t)\rangle = \langle \dot V(t), \dot c(t)\rangle = \langle v, w\rangle_p \ ,$$

also

$$\langle V(t), \dot c(t)\rangle = \int_0^t \langle \dot V(\tau), \dot c(\tau)\rangle\, d\tau = t\,\langle v, w\rangle_p \ .$$

Daraus folgt wie behauptet, dass

$$\big\langle d_v(\exp_p)(v), d_v(\exp_p)(w)\big\rangle_{\exp_p v} = \langle V(1), \dot c(1)\rangle = \langle v, w\rangle_p \ . \qquad \square$$

1.90. Folgerung. *Sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu jedem $p \in M$ existiert eine Radius $r > 0$, so dass die Exponentialabbildung $\exp_p$ auf $B_r(0_p) \subset T_pM$ definiert und injektiv ist, und für alle $v \in B_r(0_p)$ gilt*

$$d(p, \exp_p v) = \|v\| \ .$$

Für alle $q \in M \setminus \exp_p(B_r(0_p))$ gilt $d(p,q) \geq r$.

Beweis. Die Existenz von r folgt bereits aus Satz 1.78 (2) über die lokale Umkehrbarkeit von $\exp_p$ nahe $0_p \in T_pM$. Sei jetzt $v \in B_r(0_p)$. Dann ist c_v nach Voraussetzung auf $[0,1]$ definiert, und es gilt

$$L(c_v|_{[0,1]}) = \int_0^1 \|\dot{c}_v(t)\| \, dt = \|v\|$$

nach Bemerkung 1.66, folglich

$$d(p, \exp_p v) \leq L(c_v|_{[0,1]}) = \|v\| \ .$$

Für die umgekehrte Abschätzung sei $\gamma\colon I \to M$ eine Kurve mit $\gamma(a) = p$ und $\gamma(b) = \exp_p v$. Wir wollen $L(\gamma|_{[a,b]}) \geq \|v\|$ beweisen, dazu unterscheiden wir zwei Fälle.

Falls $\gamma([a,b])$ in $\exp_p(B_r(0_p))$ verläuft, bilden wir das Urbild unter exp und erhalten eine Kurve

$$\tilde{\gamma} = \exp_p^{-1} \circ \gamma\colon [a,b] \to B_r(0_p) \subset T_pM \ .$$

Definiere eine Funktion $f\colon [a,b] \to [0,r)$ durch

$$f(s) = \|\tilde{\gamma}(s)\| \ ,$$

dann ist f differenzierbar auf der Menge

$$I' = \bigl\{\, t \in [a,b] \bigm| \tilde{\gamma}(t) \neq 0 \,\bigr\} = \bigl\{\, t \in [a,b] \bigm| \gamma(t) \neq p \,\bigr\} \ .$$

Sei $s \in I'$, und sei $c_s\colon (-r,r) \to M$ die Geodätische mit Anfangsbedingungen

$$c_s(0) = p \qquad \text{und} \qquad \dot{c}_s(0) = \frac{\tilde{\gamma}(s)}{\|\tilde{\gamma}(s)\|} =: v_s \ .$$

Aus dem Gauß-Lemma und der Cauchy-Schwartz-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned}\left(\frac{df(s)}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\,\|\tilde{\gamma}(s)\|}{ds}\right)^2 &= \frac{\bigl\langle \dot{\tilde{\gamma}}(s), \tilde{\gamma}(s)\bigr\rangle_p^2}{\|\tilde{\gamma}(s)\|_p^2} = \bigl\langle \dot{\tilde{\gamma}}(s), v_s\bigr\rangle_p^2 \\ &= \bigl\langle \dot{\gamma}(s), \dot{c}_v(f(s))\bigr\rangle_{\gamma(s)}^2 \leq \|\dot{\gamma}(s)\|^2 \ .\end{aligned}$$

Für die Länge von γ erhalten wir somit

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq \int_{I'} \|\dot{\gamma}(s)\| \, ds \geq \int_{I'} \left|\frac{df(s)}{ds}\right| \, ds \geq \|v\| \ ,$$

da $f(a) = 0$ und $f(b) = \|v\|$.

Im zweiten Fall gilt $\gamma([a,b]) \not\subset \exp_p(B_r(0_p))$. Folglich existiert

$$c = \inf\bigl\{\, s \in [a,b] \bigm| \gamma(s) \notin \exp_p(B_r(0_p)) \,\bigr\} \in (a,b) \ .$$

Die obige Abschätzung liefert jetzt

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq L(\gamma|_{[a,c]}) \geq r > \|v\| \ .$$

In jedem Fall folgt also

$$L(\gamma|_{[a,b]}) \geq L(c_v|_{[0,1]}) = \|v\| \ ,$$

also realisiert c_v den Abstand $d(p, \exp_p v) = \|v\|$ wie behauptet.

Die zweite Aussage folgt mit dem Argument zum zweiten Fall oben. □

1.91. Bemerkung. Wenn man diesen Beweis genauer anschaut, kann man auch noch folgendes zeigen (Übung). Sei $p \in M$ und $r > 0$ wie oben, sei $q \in \exp_p(B_r(0_p))$, und sei $\gamma\colon I \to M$ eine (nicht notwendig reguläre und eventuell nur stückweise differenzierbare) Kurve mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ und $L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p,q)$. Dann existiert $v \in T_pM$ mit $\|v\| = 1$ und eine streng monoton steigende Funktion $f\colon [a,b] \to [0, d(p,q)]$, so dass $\gamma(t) = c_v(f(t))$ für alle $t \in [a,b]$.

Analog gilt allgemein (Übung): Seien $p\,q \in M$, und sei $\gamma\colon I \to M$ eine (nicht notwendig reguläre und eventuell nur stückweise differenzierbare) Kurve mit $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$ und $L(\gamma|_{[a,b]}) = d(p,q)$. Dann existiert eine Geodätische c und eine streng monoton steigende Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass $\gamma(t) = c(f(t))$ für alle $t \in [a,b]$. Dazu überlegt man sich, dass die entsprechende Aussage zumindest auf hinreichend kurzen Teilintervallen $[a_i,b_i] \subset [a,b]$ gelten, die ganz in einem Ball $\exp_{p_i}(B_{r_i}(p_i))$ verlaufen.

1.92. Folgerung. *Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann definiert die Riemannsche Abstandsfunktion d eine Metrik auf M. Die metrische Topologie auf M stimmt mit der zugrundeliegenden Topologie der Mannigfaltigkeit überein.*

Beweis. Aus der vorigen Folgerung 1.90 ergibt sich, dass $d(p,q) > 0$ falls $p \neq q$. Nach Bemerkung 1.88 ist (M,d) also metrischer Raum.

Nun zu den Topologien. Sei $U \subset M$ offen in der zugrundeliegenden Topologie von M, und sei $p \in U$. Sei r wie in Folgerung 1.90 gewählt. In geodätischen Normalkoordinaten φ um p ist $\varphi^{-1}(U)$ offen, denn $\exp_p$ ist nach dem Satz 1.72 von Picard-Lindelöf stetig. Es folgt $B_\varepsilon(0_p) \subset \varphi^{-1}(U)$ für ein $\varepsilon \in (0,r)$, und nach Folgerung 1.90 gilt also auch $B_\varepsilon(p) = \exp_p(B_\varepsilon(0_p)) \subset U$. Somit ist U offen in der metrischen Topologie.

Sei andererseits U in der metrischen Topologie offen. Zu $p \in U$ existiert dann ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subset U$. Wenn ε klein genug ist, liegt $B_\varepsilon(p)$ im Kartengebiet von geodätischen Normalkoordinaten um p. Dann ist $B_\varepsilon(p)$ in der zugrundeliegenden Topologie von M offen. Mithin ist U eine Vereinigung offener Teilmengen von M, also ebenfalls offen. $\square$

1.93. Bemerkung. Wir schreiben für $p \in M$ ab sofort

$$B_r(p) := d_p^{-1}[0,r)$$

und sprechen vom (*metrischen*) *Ball* um p mit Radius r. Falls $\exp_p$ auf ganz $B_r(0_p)$ definiert ist und Diffeomorphismus auf das Bild ist, gilt

$$B_r(p) = \exp_p(B_r(0_p))$$

nach Folgerung 1.90. Den allgemeinen Fall behandeln wir in Proposition 1.94.

Es folgt

$$\overline{B_r(p)} = d_p^{-1}[0,r]\ .$$

Genauer gesagt gilt „$\subset$“, da d_p stetig ist, und „$\supset$“ gilt, da für $q \in M$ mit $d(p,q) = r$ und eine Folge von nach Bogenlänge parametrisierter Kurven γ_i mit $\gamma_i(0) = p$, $\gamma_i(r_i) = q$ und $r_i \searrow r$ gilt, dass:

$$\lim_{i\to\infty} d\biggl(\gamma_i\Bigl(r - \frac{1}{i}\Bigr), q\biggr) \le \lim_{i\to\infty}\Bigl(r_i - r + \frac{1}{i}\Bigr) = 0\ .$$

In geodätischen Normalkoordinaten um q sieht man, dass $\gamma_i\bigl(r-\frac{1}{i}\bigr)$ gegen q konvergiert, aber $d(\gamma_i\bigl(r-\frac{1}{i}\bigr), p) < r$ für alle i, also $\gamma_i\bigl(r-\frac{1}{i}\bigr) \in B_r(p)$ für alle i und daher $q \in \overline{B_r(p)}$.

1.94. Proposition. *Es sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $r \in (0,\infty]$. Falls die Exponentialabbildung auf ganz $\overline{B_r(0)} \subset T_pM$ definiert ist, gilt*

$$\overline{B_r(p)} = \exp\bigl(\overline{B_r(0)}\bigr) \subset M\ ,$$

und zu jedem $q \in \overline{B_r(p)}$ existiert $v \in T_pM$ mit $q = \exp_p v$ und $\|v\| = d(p,q)$.

Wir werden die Existenz von Geodätischen von p nach $q \in \overline{B_r(p)}$ dadurch zeigen, dass wir kürzeste Verbindungen konstruieren.

Beweis. Zunächst überlegen wir uns, dass für alle $s \le r$ die Menge

$$A_s := \bigl\{\, q \in \overline{B_s(p)} \bigm| q = \exp_p v \text{ für ein } v \in TM \text{ mit } \|v\| = d(p,q) \,\bigr\} \subset M$$

derjenigen Punkte in $\overline{B_s(p)}$, die mit p durch eine kürzeste Geodätische verbunden werden können, kompakt ist. Die Menge A_s ist Bild der offensichtlich beschränkten Teilmenge

$$V_s := \bigl\{\, v \in \overline{B}_s(0_p) \bigm| d(p, \exp_p v) = \|v\| \,\bigr\} \subset TM$$

unter exp. Diese Menge ist aber auch abgeschlossen, denn sei $v \in \overline{B_s(0_p)}$ Grenzwert einer Folge (v_i) in V_s, dann folgt

$$d(p, \exp_p v) = \lim_{i\to\infty} d(p, \exp_p v_i) = \lim_{i\to\infty} \|v_i\| = \|v\|$$

aus der Stetigkeit der Exponentialabbildung und der Abstandsfunktion. Folglich ist V_s kompakt, und als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung ist auch $A_s = \exp(V_s)$ kompakt.

Es sei $J \subset [0,r)$ die Menge derjenigen Zahlen s, so dass $A_s = \overline{B_s(p)}$. Nach Folgerung 1.90 enthält J ein Intervall $[0,\delta]$. Nach Definition von A_s liegt mit s bereits ganz $[0,s]$ in J. Aus $[0,s) \in J$ folgt auch $s \in J$, denn jeder Punkt q mit $d(p,q) = s$ lässt sich durch eine Folge (q_i) von Punkten in $d(p,q_i) < s$ approximieren, also gilt $q_i = \exp_p v_i$ für Vektoren $v_i \in T_pM$ mit $\|v_i\| = d(p,q_i)$. Da $\overline{B_s(0_p)}$ kompakt ist, existiert ein Grenzwert $v \in T_pM$ der Folge (v_i) nach Übergang zu einer Teilfolge. Es folgt $\exp_p v = q$ und $\|v\| = s = d(p,q)$. Mithin ist J ein abgeschlossenes Teilintervall von $[0,r)$.

Es sei also $r_0 = \sup J$, und wir wollen $r_0 = r$ beweisen. Falls $r_0 < r$ ist, ist insbesondere $r_0 < \infty$, und $\overline{B_{r_0}(p)}$ ist kompakt. Wir behaupten, dass es ein $\varepsilon \in (0, r - r_0)$ gibt, so dass $\exp_q|_{B_\varepsilon(0_q)}$ für alle $q \in \overline{B_{r_0}(p)}$ injektiv ist. Wäre das nicht der Fall, so existierten Folgen von Vektoren (v_i), (w_i) in $TM|_{\overline{B_{r_0}(p)}}$ mit

$$v_i \ne w_i\,, \qquad \pi(v_i) = \pi(w_i)\,, \qquad \exp v_i = \exp w_i \qquad \text{und} \qquad \lim_{i\to\infty} \|v_i\| = \lim_{i\to\infty} \|w_i\| = 0\,.$$

Die Folge $\pi(v_i)$ besitzt einen Häufungspunkt q_0, da $\overline{B_{r_0}(p)}$ kompakt ist. Nach Satz 1.78 ist $\pi \times \exp$ in einer Umgebung von 0_{q_0} in TM ein Diffeomorphismus, was der Existenz obiger Folgen widerspricht.

Falls $r_0 = \sup J < r$ gilt, wähle also $\varepsilon > 0$ wie oben und $q \in B_{r_0+\varepsilon}(p) \setminus \overline{B}_{r_0}(p)$. Dann existiert eine Folge nach Bogenlänge parametrisierter Kurven γ_i mit $\gamma_i(0) = p$ und $\gamma_i(t_i) = q$, wobei $t_i \searrow d(p,q)$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Folge von Punkten q_i im Bild von γ_i mit $d(p,q_i) = r_0$. Wegen Kompaktheit konvergiert eine Teilfolge dieser Punkte gegen einen Punkt q_0 mit $d(p,q_0) = r_0$. Aus der Dreiecksungleichung folgt sofort

$$d(p,q_0) + d(q_0,q) = d(p,q)\,. \tag{*}$$

Nach Wahl von $\varepsilon > 0$ und der Folgerung 1.90 aus dem Gauß-Lemma existiert eine kürzeste Geodätische c_2 von q_0 nach q, und nach Wahl von r_0 auch eine kürzeste Geodätische c_1 von p nach q_0. Ohne Einschränkung gelte $c_1(0) = q_0 = c_2(0)$, dann betrachten wir (bei $t = 0$ nicht notwendig differenzierbare) Kurve

$$c(t) = \begin{cases} c_1(t) & \text{für } t \le 0, \text{ und} \\ c_2(t) & \text{für } t \ge 0. \end{cases}$$

Wegen (*) ist c eine kürzeste Kurve von p nach q, nach Bemerkung 1.91 also eine Geodätische. Insbesondere ist c auch bei $t = 0$ differenzierbar, das heißt, es gilt $\dot c_1(0) = \dot c_2(0)$.

Es folgt $q \in A_{r_0+\varepsilon}$ für alle $q \in B_{r_0+\varepsilon}(p)$, mithin $[0, r_0+\varepsilon) \subset J$ im Widerspruch zur Wahl von r_0. Hieraus folgt aber letztendlich, dass sich jeder Punkt in $\overline{B_r(p)}$ mit p durch eine kürzeste Geodätische verbinden lässt, und insbesondere gilt

$$\overline{B_r(p)} = \exp\bigl(\overline{B_r(0)}\bigr) \subset M\,. \qquad \square$$

Wir haben also einen metrischen Raum (M, d) definiert, und fragen uns als nächstes, ob er vollständig ist. Zur Erinnerung: Eine Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ von Punkten in M heißt *Cauchy-Folge,* wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $d(p_i, p_j) < \varepsilon$ für alle i, $j \geq n_0$. Eine metrischer Raum (M, d) heißt *vollständig,* wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

1.95. Satz (Hopf-Rinow). *Sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *(M, d) ist vollständig;*
(2) *die Exponentialabbildung* $\exp$ *ist auf ganz TM definiert;*
(3) *für ein $p \in M$ ist* $\exp_p$ *auf ganz T_pM definiert;*
(4) *für alle $p \in M$ und alle $r > 0$ ist $\overline{B_r(p)}$ kompakt;*
(5) *für ein $p \in M$ und alle $r > 0$ ist $\overline{B_r(p)}$ kompakt.*

Falls diese Aussagen gelten, folgt

(6) *zu je zwei Punkten p, $q \in M$ existiert eine Geodätische der Länge $d(p, q)$ von p nach q.*

Dass (6) zu den anderen Aussagen nicht äquivalent ist, sieht man einfachsten anhand eines metrischen Balles $U = B_r(0) \subset (\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$, der zwar (6), aber nicht (1)–(5) erfüllt.

Beweis. Die Implikationen (2) $\Rightarrow$ (3) und (4) $\Rightarrow$ (5) sind trivial. Zu (2) $\Rightarrow$ (4) und (3) $\Rightarrow$ (5) benutzen wir Folgerung 1.94, wonach

$$\overline{B_r(p)} = \exp_p\bigl(\overline{B_r(0_p)}\bigr) .$$

Als Bild einer kompakten Menge unter der stetigen Exponentialabbildung ist $\overline{B_r(p)}$ dann ebenfalls kompakt.

Nun zu (1) $\Rightarrow$ (2). Wir fixieren $p \in M$ und $v \in T_pM$. Wir nehmen

$$t_0 := \sup\bigl\{\, t > 0 \bigm| tv \in D_{\exp} \,\bigr\} < \infty$$

an und wählen eine Folge $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ positiver Zahlen mit $t_i \nearrow t_0$. Dann bilden die Punkte $p_i = c_v(t_i)$ eine Cauchy-Folge in M; sei $q \in M$ ihr Grenzwert. In Normalkoordinaten φ um q ist c_v eine Geodätische, die für $t \nearrow t_0$ gegen 0_q konvergiert. Mithin lässt sich c zu einer radialen Geodätischen durch q fortsetzen, und somit lässt sich $c(tv) = \exp_p(tv)$ auch für ein $t > t_0$ definieren, im Widerspruch zur Wahl von t. Also gilt $t_0 = \infty$, und $\exp_p(tv)$ ist für alle t definiert, also auch für $t = 1$. Insgesamt folgt $D_{\exp} = TM$.

Zu (5) $\Rightarrow$ (1) sei $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge. Da M zusammenhängend ist, existiert eine Kurve von p zu jedem q_i, also sind alle $d(q_i, p)$ endlich. Da (q_i) Cauchy-Folge ist, existiert $r > 0$ mit $d(q_i, p) < r$ für alle i. Da $\overline{B_r(p)}$ kompakt ist, hat die Folge (q_i) einen Häufungspunkt, der dann auch Grenzwert sein muss. Hieraus folgt die metrische Vollständigkeit.

Schließlich zu (2) $\Rightarrow$ (6). Es seien p, $q \in M$ und $r = d(p, q) < \infty$. Nach Folgerung 1.94 gilt $q \in \overline{B_r(p)} = \exp_p(\overline{B_r(0_p)})$. Sei also $v \in \exp_p^{-1}(q)$ mit $\|v\| \leq r$, dann ist c_v die gesuchte Geodätische. □

1.96. Definition. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit Abstandsfunktion d heißt *vollständig,* wenn der metrische Raum (M, d) vollständig ist.

1.97. Beispiel. Der euklidische Raum (R^n, g^{eukl}), die Sphäre (S^n, g^{sph}), und der hyperbolische Raum $(H, g^{\mathrm{hyp}}) := (B_1^n(0), g^{\mathrm{hyp}})$ aus den Beispielen 1.31, 1.35 und 1.36 sind vollständig (Übung).

Wenn wir das globale Verhalten einer Riemannschen Mannigfaltigkeit studieren wollen, werden wir fast immer annehmen, dass (M, g) vollständig und zusammenhängend ist. Ansonsten werden viele Argumente nicht funktionieren. Als Beispiel erinnern wir uns an die Aussage, dass alle (metrisch) beschränkte Mengen in M präkompakt sind, die wegen Satz 1.95 zur Vollständigkeit äquivalent sind. Wir wollen das präzisieren.

1.98. Definition. Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion d, dann ist der *Durchmesser* von (M,g) definiert als

$$\operatorname{diam}(M,g) = \sup\bigl\{\, d(p,q) \bigm| p,q \in M \,\bigr\} .$$

1.99. Beispiel. Während der euklidische und der hyperbolische Raum unendlichen Durchmesser haben, gilt

$$\operatorname{diam}(S^n, g^{\mathrm{sph}}) = \pi$$

für alle $n \geq 1$.

Zur Begründung wählen wir p, $q \in S^n$, dann liegen p und q auf einem Großkreis c, also einer Geodätischen in S^n. Sei c nach Bogenlänge parametrisiert, dann gilt $c(t) = c(t+2\pi n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. O.B.d.A. sei also $c(0) = p$, $c(r) = q$ für $r \in [0, 2\pi)$. Es folgt

$$d(p,q) \leq \min\bigl(L(c|_{[0,r]}), L(c|_{[r,2\pi]})\bigr) \leq \min(r, 2\pi - r) \leq r .$$

Auf der anderen Seite sieht man leicht, dass Antipoden p und $-p$ genau den Abstand π haben.

Das bedeutet dann aber auch, dass jeder parametrisierte Großkreis der Länge $l > \pi$ nicht mehr die kürzeste Verbindung zwischen seinen Endpunkten ist. Um dieses Phänomen werden wir uns im nächsten Abschnitt kümmern.

Hier noch eine schöne Folgerung aus dem Satz von Hopf-Rinow.

1.100. Folgerung. *Sei (M,g) eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist M genau dann kompakt, wenn* $\operatorname{diam}(M)$ *endlich ist.* □

1.101. Beispiel. Also sind euklidische und hyperbolische Räume nicht kompakt, wohl aber die Sphären.

1.6. Kürzeste Geodätische, Schnittort und konjugierter Ort

Wir wissen, dass kürzeste Kurven zwischen zwei Punkten Geodätische sind, aber die Umkehrung ist nicht immer richtig, wie wir anhand der Sphäre in Beispiel 1.99 gesehen haben.

Sei (M,g) wie immer eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir betrachten auf TM die Funktion $v \mapsto \|v\|^2$, die genau so oft differenzierbar ist wie TM selbst. Da 1 ein regulärer Wert ist, ist

$$SM = \bigl\{\, v \in TM \bigm| \|v\|^2 = 1 \,\bigr\}$$

eine Untermannigfaltigkeit von TM, das *Einheitstangentialbündel* oder auch *Einheitssphärenbündel* von M. Wir schreiben $S_pM = SM \cap T_pM$, dann ist S_pM eine runde Sphäre im euklidischen Vektorraum (T_pM, g_p).

1.102. Definition. Sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Zu jedem $v \in SM$ definieren wir

$$s(v) := \sup\bigl\{\, t > 0 \bigm| d\bigl(c_v(t), c_v(0)\bigr) = t \,\bigr\} \in (0, \infty] ,$$

dann heißt die Menge

$$C := \bigl\{\, s(v) \cdot v \bigm| v \in SM \text{ mit } s(v) < \infty \,\bigr\} \subset TM$$

der *tangentiale Schnittort* von (M,g). Für alle $p \in M$ heißt $C_p := C \cap T_pM$ der *tangentiale Schnittort* von p und

$$C(p) = \exp_p(C_p) \subset M$$

der *Schnittort* von p in M. Schließlich heißt

$$\rho(p) = \inf_{v \in S_pM} s(v) = \inf_{q \in C(p)} d(p,q) \in (0,\infty]$$

der *Injektivitätsradius* von p und

$$\rho = \inf_{p \in M} \rho(p) = \inf_{v \in SM} s(v) \in [0,\infty]$$

der *Injektivitätsradius* von M.

1.103. Bemerkung. Wenn wir $r > 0$ wie in Folgerung 1.90 wählen, sehen wir sofort, dass der Injektivitätsradius von p mindestens r beträgt, insbesondere gilt $\rho(p) > 0$ für alle $p \in M$ wie in der Definition behauptet. Es gibt allerdings durchaus Beispiele von Mannigfaltigkeiten mit $\rho(M) = 0$.

1.104. Beispiel. Auf dem Einheitstangentialbündel der runden Sphäre (S^n, g^{sph}) ist die obige Funktion $s \equiv \pi$ konstant nach Beispiel 1.99. Es folgt $C(p) = \{-p\}$ für alle $p \in S^n$, und der Injektivitätsradius ist $\rho(p) = \pi = \rho(M)$.

Im euklidischen wie im hyperbolischen Raum ist jede Geodätische (also jede euklidische bzw. hyperbolische Gerade) die kürzeste Verbindung zwischen je zwei ihrer Punkte. In diesem Fall gilt also $s \equiv \infty$ und $C_p = \emptyset = C(p)$ für alle Punkte p, und wir haben $\rho(p) = \infty = \rho(M)$.

Im allgemeinen ist die Funktion s nicht konstant, oft ist sie nicht einmal differenzierbar. Wir wollen jetzt den Namen „Injektivitätsradius“ näher beleuchten.

1.105. Proposition. *Sei (M,g) eine zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $s\colon SM \to (0,\infty]$ die Funktion aus Definition 1.102. Dann sind die folgenden Abbildungen injektiv:*

$$\begin{aligned} &\exp_p\colon \bigl\{\, tv \bigm| v \in S_pM, 0 \le t < s(v) \,\bigr\} \to M && \textit{für alle } p \in M \\ \textit{und} \qquad &\exp \times\pi\colon \bigl\{\, tv \bigm| v \in SM, 0 \le t < s(v) \,\bigr\} \to M \times M\;. \end{aligned}$$

Später werden wir sehen, dass die obigen Abbildungen sogar Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, aber dazu brauchen wir etwas mehr Technik.

Beweis. Die zweite Aussage folgt sofort aus der ersten, denn aus $(\exp \times\pi)(v) = (\exp \times\pi)(w)$ folgt sofort, dass v und $w \in TM$ den gleichen Fußpunkt haben.

Wir nehmen jetzt an, dass v, $w \in SM$ und $t < s(v)$, $u < s(w)$ mit $\exp_p(tv) = \exp_p(uw) =: q \in M$ gegeben sind. Aus der Definition von s folgt, dass sowohl c_v als auch c_w kürzeste Verbindungen sind, also

$$t = L(c_v|_{[0,t]}) = d(p,q) = L(c_w|_{[0,u]}) = u\;.$$

Für jedes $t' > t$ betrachten wir den Punkt $q' = \exp_p(t'v)$. Wir erhalten zwei Verbindungen der Länge t' von p nach q', nämlich c_v und die nicht differenzierbare Kurve

$$\gamma : r \mapsto \begin{cases} c_w(r) & \text{für } r \le t, \text{ und} \\ c_v(r) & \text{für } r \ge t\;. \end{cases}$$

In Normalkoordinaten $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi$ um q sind sowohl c_v als auch c_w radiale Geodätische, die sich unter einem Winkel α treffen. Für jedes hinreichend kleine $0 < \varepsilon < t' - t$ ersetzen wir jetzt γ durch die (ebenfalls nicht differenzierbare) Kurve γ_ε, die außerhalb von $(t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ mit γ übereinstimmt, und auf $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ in Normalkoordinaten eine gerade Strecke beschreibt. Nach dem Gauß-Lemma sind $\varphi \circ c_v$ und $\varphi \circ c_w$ euklidische Geraden in V^φ. Es ist jetzt leicht zu sehen, dass die Kurven γ_ε in der euklischen Metrik auf V^φ um $c\varepsilon$ kürzer als γ sind, wobei

$$c = 2\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right) > 0\;.$$

Nach Proposition 1.84 stimmt g^φ in 0_q mit der euklidischen Metrik g_q auf T_qM überein, und die ersten Ableitungen von g^φ bei 0_q verschwinden, also fällt auch die Länge der Kurven γ_ε in M bezüglich g noch streng monoton für hinreichend kleine ε. Aber damit sind weder c_v noch γ kürzeste Verbindungen von p nach q', es folgt $s(v) \le t'$ für alle $t' > t$, und somit $t \ge s(v)$ im Widerspruch zur Annahme. Ein ähnliches Argument beweist auch $t = u \ge s(w)$. □

1.106. Bemerkung. Sei v in SM, dann folgt

$$d(c_v(t), c_v(0)) < t \qquad \text{für alle } t > s(v) \; .$$

Insbesondere ist $c_v|_{[0,t]}$ nicht mehr die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte für $t > s(v)$.

Zur Begründung sei $t > s(v)$. Nach Definition von $s(v)$ existiert eine Zahl $t_0 \in (s(v), t)$, so dass

$$t_0 = L(c_v|_{[0,t_0]}) > d\big(c_v(0), c_v(t_0)\big) =: r_0 \; ,$$

also existiert eine kürzere Verbindung $\gamma_0 \colon [0, r_0] \to M$ von $p := c_v(0)$ nach $q := c_v(t_0) = \gamma_0(r_0)$. Aber dann ist die zusammengesetzte Kurve γ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_0(t) & \text{falls } t \le r_0\text{, und} \\ c_v(t + t_0 - r_0) & \text{falls } t \ge r_0 \end{cases}$$

eine kürzere Verbindung von p nach $c_v(t)$ als c_v (und sie lässt sich zu einer Kurve glätten, die immer noch kürzer als c_v ist). Ein genaues Studium der Funktion $s \colon SM \to (0, \infty]$ verrät uns also viel über die kürzesten Geodätischen auf einer Mannigfaltigkeit.

Bevor wir weitere Aussagen zur Funktion s und zum Injektivitätsradius machen können, definieren wir den verwandten Begriff des konjugierten Ortes und des konjugierten Punktes.

1.107. Definition. Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und seien $p \in M$ und $v \in S_pM$. Ein Vektor $tv \in T_pM$ für $t > 0$ heißt *zu p konjugiert,* wenn es ein Jacobifeld $Y \ne 0$ längs c_v mit $Y(0) = Y(t) = 0$ gibt. Die Menge aller zu p konjugierten Vektoren in T_pM heißt der *tangentiale konjugierte Ort* von p. Das Infimum der Beträge von zu p konjugierten Vektoren heißt der *konjugierte Radius* von p.

Das Bild des tangentialen konjugierten Ortes von p unter $\exp_p$ heißt der *konjugierte Ort* von p in M, seine Elemente heißen *zu p konjugierte Punkte,* und q heißt zu p konjugiert *längs c,* wenn c eine Geodätische durch $p = c(a)$ und $q = c(b)$ ist, entlang der ein Jacobifeld $Y \ne 0$ mit $Y(a) = Y(b) = 0$ existiert.

Aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen folgt leicht, dass die $t > 0$, für die tv zu p konjugiert sind, diskret in $\mathbb{R}$ liegen.

1.108. Bemerkung. Nach Bemerkung 1.82 wird das Differential von $\exp_p$ bei $v \in TM$ genau durch Lösung der Jacobi-Feld-Gleichung für Vektorfelder Y längs c_v mit $Y(0) = 0$ gegeben. Insbesondere beschreibt der konjugierte Ort zu p in T_pM genau die kritischen Punkte von $\exp_p$, somit ist $\exp_p$ außerhalb des konjugierten Ortes ein lokaler Diffeomorphismus.

1.109. Beispiel. Nach Übung 1 von Blatt 5 gibt es keine konjugierten Punkte auf $(\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$ und (H^n, g^{hyp}). Somit ist der konjugierte Radius hier ∞, genau wie der Injektivitätsradius nach Beispiel 1.104.

Auf der Sphäre (S^n, g^{sph}) hingegen werden Jacobifelder Y längs c_v mit $Y(0) = 0$ für $v \in SM$ gegeben durch $Y(t) = \sin(t)\, W$ für ein zu $\dot c_v$ senkrechtes, längs c_v paralleles Vektorfeld W. Somit sind genau die Vektoren $\pi n v$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $v \in S_pM$ zu p konjugiert. Mithin ist π der konjugierte Radius, und auch der Injektivitätsradius nach Beispiel 1.104.

Wir wollen jetzt den konjugierten Radius mit dem Injektivitätsradius in Beziehung setzen.

1.110. Proposition. *Sei (M,g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei die Funktion $s\colon S \to (0,\infty]$ wie in Definition 1.102 gegeben. Sei $p \in M$, dann ist kein Vektor tv mit $v \in S_pM$ und $0 < t < s(v)$ zu p konjugiert.*

Beweis. Dieser Beweis verläuft ähnlich wie der von Proposition 1.105. Wir nehmen an, dass $t_0 v$ zu p konjugiert sei für ein $t_0 \in (0, s(v))$, und wollen zeigen, dass dann $c = c_v$ für kein $t_1 \in (t_0, s(v))$ mehr kürzeste Geodätische zwischen p und $c(t_1)$ ist, im Widerspruch zur Definition von $s(v)$.

Sei dazu $Y \neq 0$ ein Jacobifeld längs c mit $Y(0) = Y(t_0) = 0$. Dann folgt $Y'(t_0) \neq 0$, denn sonst wäre ja $Y \equiv 0$ nach Picard-Lindelöf. Aus der Jacobigleichung folgt $Y \perp \dot c$ auf ganz $[0,t_1]$. Sei W ein beliebiges glattes Vektorfeld längs c mit $W \perp \dot c$ auf ganz $[0,t_1]$, und mit $W(t_0) = -Y'(t_0)$ und $W(0) = W(t_1) = 0$. Wir fixieren $\eta > 0$ und konstruieren eine stetige Variation $c_s\colon [0,t_1] \times (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ von c, so dass

(1) die Einschränkungen $c_s|_{[0,t_0]\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ und $c_s|_{[t_0,t_1]\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$ glatt sind;
(2) das Variationsfeld V die folgende Gestalt hat:
$$V(t) = \begin{cases} Y(t) + \eta\, W(t) & \text{für } t \in [0,t_0], \text{ und} \\ \eta\, W(t) & \text{für } t \in [t_0,t_1]; \end{cases}$$
(3) $c_s(0) = c(0)$ und $c_s(t_1) = c(t_1)$ für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ gilt.

Da $c = c_0$ eine Geodätische ist, folgt
$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\bigl(c_s|_{[0,t_1]}\bigr) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\bigl(c_s|_{[0,t_0]}\bigr) + \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L\bigl(c_s|_{[t_0,t_1]}\bigr) = \langle \dot c, V\rangle|_{[0,t_0]} + \langle \dot c, V\rangle|_{[t_0,t_1]} = 0$$
aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64. Wir benutzen jetzt die zweite Variationsformel aus Satz 1.86. Da $V \perp \dot c$ auf ganz $[0,t_1]$, erhalten wir auf $[0,t_0]$ zunächst
$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L\bigl(c_s|_{[0,t_0]}\bigr) &= \Bigl\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V, \dot c \Bigr\rangle\Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} \bigl(\bigl\|\dot Y + \eta\,\dot W\bigr\|^2 - \langle R_{Y+\eta W,\dot c}\dot c, Y + \eta\, W\rangle\bigr)\, dt \\ &= \Bigl\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot c(t_0) \Bigr\rangle + \langle \dot Y, \underbrace{Y + 2\eta W}_{=0 \text{ für } t=0}\rangle\big|_0^{t_0} \\ &\qquad + \int_0^{t_0} (\eta^2 \langle \dot W, \dot W\rangle - \langle \underbrace{\ddot Y + R_{Y,\dot c}\dot c}_{=0}, Y + 2\eta W\rangle - \eta^2 \langle R_{W,\dot c}\dot c, W\rangle)\, dt \\ &= \Bigl\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot c(t_0) \Bigr\rangle - 2\eta \bigl\|\dot Y(t_0)\bigr\|^2 + \eta^2 \int_0^{t_0} (\langle \dot W, \dot W\rangle - \langle R_{W,\dot c}\dot c, W\rangle)\, dt \end{aligned}$$
wegen der Jacobifeld-Gleichung, und da $W(t_0) = -\dot Y(t_0)$. Auf dem Teilintervall $[t_0,t_1]$ gilt $V = \eta W$, und wir erhalten analog
$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L\bigl(c_s|_{[t_0,t_1]}\bigr) = -\Bigl\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} V(t_0), \dot c(t_0) \Bigr\rangle + \eta^2 \int_{t_0}^{t_1} (\langle \dot W, \dot W\rangle - \langle R_{W,\dot c}\dot c, W\rangle)\, dt\ .$$
Addieren liefert
$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L\bigl(c_s|_{[0,t_1]}\bigr) = -2\eta \bigl\|\dot Y(t_0)\bigr\|^2 + \eta^2 \int_0^{t_1} (\langle \dot W, \dot W\rangle - \langle R_{W,\dot c}\dot c, W\rangle)\, dt\ .$$
Für $\eta > 0$ hinreichend klein ist dieser Ausdruck negativ, folglich ist $c|_{[0,t_1]}$ nicht die kürzeste Verbindung von p nach $c(t_1)$. $\square$

Wir wollen jetzt zeigen, dass die Funktion s aus Definition 1.102 stetig ist. Dazu benötigen wir ein topologisches Lemma.

1.111. Lemma. *Es seien M, N lokalkompakte metrische Räume, $A \subset M$ kompakt, und $F\colon M \to N$ ein lokaler Homöomorphismus, so dass $F|_A$ injektiv ist. Dann existiert eine offene Umgebung U von A in M, so dass $F|_U$ ebenfalls injektiv ist.*

Dann ist $F|_A$ insbesondere ein Homöomorphismus auf sein Bild.

Beweis. Andernfalls wäre $F|_{U_i}$ für kein $i \in \mathbb{N}$ injektiv, wobei

$$U_i = \left\{ p \in M \;\middle|\; \text{es gibt } x \in A \text{ mit } d(p,x) < \frac{1}{i} \right\} .$$

Also finden wir $p_i \neq q_i \in U_i$ mit $F(p_i) = F(q_i)$ und x_i, $y_i \in A$ mit $d(p_i, x_i)$, $d(q_i, y_i) < \frac{1}{i}$. Da A kompakt ist, konvergieren x_i und y_i nach Übergang zu einer Teilfolge gegen p bzw. $q \in A$. Dann folgt aber auch $p = \lim_{i\to\infty} p_i$, $q = \lim_{i\to\infty} q_i$, und

$$F(p) = \lim_{i\to\infty} F(p_i) = \lim_{i\to\infty} F(q_i) = F(q) ,$$

also $p = q$ wegen der Injektivität von $F|_A$. Da F lokaler Homöomorphismus ist, existiert eine Umgebung V von $p = q$ in M, auf der F umkehrbar, insbesondere injektiv ist. Da fast alle p_i, q_i in V liegen, folgt $p_i = q_i$ aus $F(p_i) = F(q_i)$ für fast alle i, im Widerspruch zur Annahme $p_i \neq q_i$. Also muss die gesuchte Umgebung U von A existieren. □

Für den folgenden Beweis wählen wir beliebige Riemannsche Metriken auf den Mannigfaltigkeiten SM und TM — da die Aussagen, die uns interessieren, topologischer Natur sind, ist es wegen Folgerung 1.92 egal, welche Metriken wir benutzen.

1.112. Lemma. *Sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist die Funktion $s\colon SM \to (0, \infty]$ aus Definition 1.102 stetig.*

Beweis. Wir beweisen Folgenstetigkeit, die für metrische Räume zur Stetigkeit äquivalent ist. Sei also $(v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in SM mit Grenzwert v, dann folgt $\lim_{i\to\infty} \pi(v_i) = p := \pi(v)$. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $s_i := s(v_i)$ gegen $s_\infty \in [0, \infty]$.

Falls $s(v) < s_\infty$, wähle $t_0 \in (s(v), s_\infty)$, dann sind die Geodätischen $c_{v_i}|_{[0,t_0]}$ für fast alle i kürzeste. Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion d ist dann auch $c_v|_{[0,t_0]}$ kürzeste im Widerspruch zu Bemerkung 1.106 und $t_0 > s(v)$. Es folgt also bereits $s(v) \geq s_\infty$.

Falls $s(v) > s_\infty$, wähle $t_0 \in (s_\infty, s(v))$. Dann sind die Geodätischen $c_{v_i}|_{[0,t_0]}$ für fast alle i keine Kürzesten, und es gibt $w_i \in SM$ und kürzere nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische c_{w_i} mit $c_{w_i}(0) = c_{v_i}(0) = \pi(v_i)$ und $c_{w_i}(t_i) = c_{v_i}(t_0)$, wobei $t_i < t_0$. Sei $K \subset M$ eine kompakte Umgebung von $\pi(v)$, dann ist $\pi^{-1}K \subset SM$ ebenfalls kompakt. Insbesondere existiert ein Grenzwert $w = \lim_{i\to\infty} w_i \in SM$ nach Übergang zu einer Teilfolge, und es gilt $\pi(w) = \pi(v)$. Nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge konvergiert t_i gegen $t' \in [0, t_0]$.

Auf der anderen Seite ist nach Annahme $c_v|_{[0,t_0]}$ Kürzeste, also ist insbesondere die Abbildung $\pi \times \exp$ auf $A = [0, t_0] \cdot v$ injektiv. Wegen Proposition 1.110 hat $\exp_p$ entlang von $A = [0, t_0] \cdot v$ invertierbares Differential, und wie im Beweis von Satz 1.78 (2) hat dann auch $\pi \times \exp$ entlang von $A = [0, t_0] \cdot v$ invertierbares Differential, ist also insbesondere ein lokaler Homöomorphismus nach dem Umkehrsatz. Nach Lemma 1.111 existiert eine offene Umgebung $U \subset TM$ von A, so dass $(\pi \times \exp)|_U$ injektiv ist. Da fast alle Vektoren $t_0 v_i$ in U liegen, liegen also fast alle $t_i w_i$ außerhalb von U. Da $TM \setminus U$ abgeschlossen ist, liegt dann auch ihr Grenzwert $t'w \in M \setminus U$.

Somit existieren zwei kürzeste Geodätische $c_v|_{[0,t_0]}$ und $c_w|_{[0,t']}$ von p nach $c_v(t_0)$, was wegen Proposition 1.105 im Widerspruch zu $t_0 < s(v)$ steht. Es folgt $s(v) \geq s_\infty$, was die Stetigkeit von $s\colon SM \to (0, \infty)$ beweist. □

1.113. Folgerung. *Der Injektivitätsradius wird durch eine stetige Funktion $\rho\colon M \to (0, \infty)$ gegeben.* □

1.114. Folgerung. *Sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$. Dann sind die Abbildungen*

$$\exp_p \colon \big\{\, tv \bigm| v \in S_pM, 0 \le t < s(v) \,\big\} \to M \qquad \textit{für alle } p \in M \tag{1}$$

$$\textit{und} \qquad \exp \times \pi \colon \big\{\, tv \bigm| v \in SM, 0 \le t < s(v) \,\big\} \to M \times M \tag{2}$$

auf offenen Teilmengen von T_pM bzw. von TM definiert und Diffeomorphismen auf ihre Bilder; diese sind offen und dicht in M beziehungsweise $M \times M$.

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung 1.108, den Propositionen 1.105 und 1.110, sowie Lemma 1.112. □

1.7. Riemannsche Überlagerungen und Quotienten

In diesem Kapitel geben wir einige wichtige Konstruktionen von Mannigfaltigkeiten an. Die meisten der folgenden Konstruktionen sind für weitaus allgemeinere Klassen topologischer Räume sinnvoll, uns interessieren hier aber nur Mannigfaltigkeiten. Wir werden in diesem Abschnitt ausnahmsweise keine Beweise führen, sondern nur die wichtigsten Ideen skizzieren. **Achtung:** Wir werden aus diesem Kapitel nur einige wenige Definitionen und Resultate brauchen und es daher überspringen. Sie können alles nötige bei Bedarf hier nachschlagen.

1.115. Definition. Eine Abbildung $\pi \colon N \to M$ zwischen topologischen Mannigfaltigkeiten heißt *Überlagerung,* wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ von p, ein diskreter topologischer Raum F und ein Homöomorphismus $\Phi \colon \pi^{-1}U \to U \times F$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "\pi"'] & \supset & \pi^{-1}U \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[d, "\pi_U"'] \\
M & \supset & U \arrow[r, equal] & U
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Eine Überlagerung zwischen $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeiten heißt *differenzierbare Überlagerung,* wenn sie von Klasse $\mathcal{C}^k$ ist und $d\pi_q \colon T_qN \to T_{\pi(q)}M$ für alle q ein Isomorphismus ist. Eine differenzierbare Überlagerung zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten $p \colon (N, \bar g) \to (M, g)$ heißt *Riemannsch,* wenn $\bar g = \pi^* g$, d.h., wenn für alle $q \in N$ und alle v, $w \in T_qM$ gilt, dass

$$\bar g_q(v, w) = g_{\pi(q)}(d\pi_q v, d\pi_q w) .$$

1.116. Beispiel. Betrachte $S^1 \subset \mathbb{C}$, dann ist die Abbildung $p \colon \mathbb{R} \to S^1$ mit $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$ eine Überlagerung. Sei etwa $z = e^{i\varphi} \in S^1$ der Punkt mit dem Winkel φ zur positiven reellen Achse, dann ist $p^{-1}(z) = \varphi + 2\pi\mathbb{Z}$. Wähle als Umgebung $U = S^1 \setminus \{-z\} \cong (\varphi - \pi, \varphi + \pi)$, als Faser $F = 2\pi\mathbb{Z}$, dann existiert eine Abbildung $\Phi \colon p^{-1}U \to (\varphi - \pi, \varphi + \pi) \times \mathbb{Z}$ mit $\Phi^{-1}(\psi, n) = \psi + 2\pi\, n$, so dass obiges Diagramm kommutiert. Wenn wir S^1 und $\mathbb{R}$ mit den Standardmetriken versehen, ist diese Überlagerung Riemannsch.

1.117. Bemerkung. Sei $\pi \colon N \to M$ eine differenzierbare Überlagerung.

(1) Dann ist auch $d\pi \colon TN \to TM$ wieder eine Überlagerung.
(2) Sei g eine Riemannsche Metrik auf M, dann existiert genau eine Metrik $\bar g = \pi^* g$ auf N, die π zu einer Riemannschen Überlagerung macht.

Mit der folgenden Überlegung können wir später zeigen, dass bestimmte Abbildungen Riemannsche Überlagerungen sind. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $F \colon N \to M$ glatt, dann bezeichne $F^* g$ die faserweise Bilinearform mit

$$(F^* g)_q(v, w) = g(dF_q(v), dF_q(w)) .$$

Wenn F eine Immersion ist, also $dF_q\colon T_qN \to T_{F(q)}M$ für alle $q \in N$ injektiv ist, dann ist F^*g eine Riemannsche Metrik auf N.

1.118. Lemma. *Es seien (M, g) und $(N, \overline{g})$ zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeiten und $F\colon N \to M$ eine lokale Isometrie, für alle $q \in N$ ist also $dF_q\colon T_qN \to T_{F(q)}M$ ein linearer Isomorphismus mit $F^*g = \overline{g}$. Wenn N vollständig ist, dann auch M, und F ist eine Riemannsche Überlagerung.*

Beweis. Da F eine lokale Isometrie ist, bildet F Geodätische in N auf Geodätische in M ab. Insbesondere gilt

$$F \circ \exp = \exp \circ\, dF\colon TN \to M\ .$$

Sei jetzt $q \in N$ und $p = F(q) \in M$, dann ist

$$\exp_p = F \circ \exp_q \circ (dF_q)^{-1}\colon T_pM \to M$$

aufgrund der Vollständigkeit von N nach dem Satz 1.95 (3) von Hopf-Rinow auf ganz T_pM definiert, also ist M ebenfalls vollständig.

Es sei $p \in M$ und $0 < r < \rho(p)$. Setze $U = B_r(p) = \exp_p(B_r(0_p))$. Wir wollen zeigen, dass

$$F^{-1}(U) = \bigcup_{q\in F^{-1}(\{p\})} B_r(q)\ , \tag{*}$$

und dass die obige Vereinigung disjunkt ist.

Zu „$\supset$“ sei $q \in F^{-1}(\{p\})$ und $y \in B_r(q)$. Wegen Vollständigkeit von N existiert $w \in B_r(o_q) \subset T_qN$ mit $y = \exp_q w$. Sei $v = dF_q(w)$, dann gilt

$$F(y) = F(\exp_q w) = \exp_p(v) \in U\ ,$$

da $\|v\| = \|w\| < r$.

Zu „$\subset$“ sei $y \in F^{-1}(U)$ mit $x = F(y) \in U$. Es sei c die kürzeste Geodätische von $p = c(0)$ nach $x = c(1)$. Setze $w = (dF_y)^{-1}(-\dot c(1))$ und $q = \exp_y w$, dann folgt

$$F(q) = F(\exp_y w) = \exp_x(-\dot c(1)) = p$$

und $d(q, y) \le \|w\| = d(p, x) < r$, also $y \in B_r(q)$ mit $q \in F^{-1}(\{p\})$. Somit gilt (*) für alle $p \in M$, und F ist eine Überlagerung. □

1.119. Bemerkung. Die Vollständigkeit von N im obigen Lemma ist eine notwendige Voraussetzung, insbesondere handelt es sich um ein metrisches, nicht um ein rein differentialtopologisches Resultat. Betrachte etwa die Inklusion ι einer offenen Teilmenge $\emptyset \ne N \subset \mathbb{R}^n$ mit $N \ne \mathbb{R}^n$, versehen mit der euklidischen Metrik. Sie ist keine Überlagerung, denn sei $p \in \overline{N} \setminus N$ ein Randpunkt, dann liegt jede Umgebung U teilweise, aber nicht ganz im Bild von ι.

Um mehr Beispiele für Überlagerungen zu erhalten, brauchen wir eine Quotientenkonstruktion für Mannigfaltigkeiten.

1.120. Definition. Sei Γ eine Gruppe mit neutralem Element e, und sei M eine Mannigfaltigkeit.

(1) Eine *Operation* von Γ auf M ist ein Gruppenhomomorphismus von Γ in die Gruppe der Homöomorphismen von M in sich; für $\gamma \in \Gamma$ schreiben wir oft nur kurz $\gamma\colon M \to M$.

(2) Der *Quotient* M/Γ von M nach Γ ist die Menge der *Orbiten*

$$[p] = \{\, \gamma(p) \mid \gamma \in \Gamma \,\}$$

für alle $p \in M$, und die Abbildung $\pi\colon M \mapsto M/\Gamma$ mit $p \mapsto [p]$ heißt *Quotientenabbildung.*

(3) Eine Operation heißt *frei,* wenn $\gamma(p) \ne p$ für alle $p \in M$ und alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$.

(4) Eine Operation heißt *eigentlich diskontinuierlich,* wenn für alle p, $q \in M$ Umgebungen U von p und V von q in M existieren, so dass $\gamma(U) \cap V = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) \neq q$.
(5) Sei M Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Operation heißt *isometrisch* oder *Riemannsch,* wenn alle $\gamma \in \Gamma$ durch Isometrien operieren.

Man beachte, dass es für den Begriff „eigentlich diskontinuierlich“ auch andere, aber äquivalente Beschreibungen in der Literatur gibt.

1.121. Beispiel. Wir betrachten den euklidischen Raum $M = \mathbb{R}^n$ mit der Standardmetrik. Jede Untergruppe $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$ operiert frei auf $\mathbb{R}^n$ durch Addition $\gamma(p) = p + \gamma$ für alle $\gamma \in \Gamma$. Genau dann, wenn Γ diskret ist, d.h., wenn jedes Element $\gamma \in \Gamma$ eine Umgebung U besitzt, die $\Gamma \setminus \{\gamma\}$ nicht trifft, ist diese Operation eigentlich diskontinuierlich. Denn falls

$$r := \inf\left\{ d(p+\gamma, q) \;\middle|\; \gamma \in \Gamma, p + \gamma \neq q \right\} > 0$$

für je zwei p, $q \in \mathbb{R}^n$ gilt, wähle $U = B_{\frac{r}{2}}(p)$ und $V = B_{\frac{r}{2}}(q)$, und Γ operiert eigentlich diskontinuierlich. Ansonsten existiert eine Folge $(\gamma_i) \in \Gamma$ mit

$$\lim_{i\to\infty} d(p + \gamma_i, q) = 0 .$$

Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\lim_{i\to\infty} d(\gamma_i, \gamma_{i+1}) = \lim_{i\to\infty} d(p+\gamma_i, p+\gamma_{i+1}) \leq \lim_{i\to\infty} d(p+\gamma_i, q) + \lim_{i\to\infty} d(q, p+\gamma_{i+1}) = 0 ,$$

im Widerspruch zur obigen Annahme.

Man kann zeigen, dass jede diskrete Untergruppe $\Gamma \subset (\mathbb{R}^n, +)$ isomorph zu $\mathbb{Z}^k$ ist, wobei freie Erzeuger $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ in $\mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren sind, insbesondere folgt $k \leq n$. Der Quotient von $M = \mathbb{R}^n$ ist diffeomorph zu $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Für $k = n$ erhalten wir Tori $T^n = (S^1)^n$. Ein Spezialfall hiervon ist die Überlagerung der S^1 in Beispiel 1.116. Allerdings sind die Quotienten nach verschiedenen isomorphen Untergruppen von $(\mathbb{R}^n, +)$ im allgemeinen nicht paarweise isometrisch.

1.122. Proposition. *Es sei M eine (differenzierbare) Mannigfaltigkeit und Γ eine Gruppe, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf M operiert. Dann trägt der Quotient M/Γ die Struktur einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit, so dass die Quotientenabbildung $\pi\colon M \to M/\Gamma$ eine Überlagerung ist.*

Falls (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit ist, so existiert genau dann eine Metrik $\bar g$ auf M/Γ, die π zu einer Riemannschen Überlagerung macht, wenn Γ isometrisch auf (M, g) operiert.

Beweis. Zunächst definieren wir die *Quotiententopologie* auf M/Γ: eine Menge $\bar U \subset M/\Gamma$ sei genau dann offen, wenn $\pi^{-1}\bar U \subset M$ offen ist. Wenn M eigentlich diskontinuierlich operiert, folgt sofort, dass M/Γ wieder ein Hausdorff-Raum ist. Und sei $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbare Basis von M, dann überprüft man leicht, dass $(\pi(U_i))_{i\in\mathbb{N}}$ eine abzählbaere Basis von M/Γ ist.

Sei jetzt $[p] \in M/\Gamma$, dann wählen wir U, V wie in der Definition von „eigentlich diskontinuierlich“ zu $p = q$. Anschließend wählen wir eine Karte φ um p mit $U^\varphi \subset U \cap V$. Nach Konstruktion gilt $g(U^\varphi) \cap U^\varphi = \emptyset$ für alle $\gamma \in \Gamma$ mit $\gamma(p) \neq p$, d.h., für alle $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$, da Γ frei operiert. Insbesondere trifft jeder Γ-Orbit $[q]$ die Menge U^φ höchstens einmal. Wir definieren

$$\bar\varphi\colon U^{\bar\varphi} = \pi(U^\varphi) \to V^{\bar\varphi} = V^\varphi$$

durch $\bar\varphi([q]) = \varphi(q)$ für alle $q \in U^\varphi$. Damit ist $\bar\varphi$ bijektiv. Sei $\bar W \subset U^{\bar\varphi}$, und sei $W = \varphi^{-1}(\bar\varphi(W))$. Dann folgt

$$\pi^{-1}(\bar W) = \dot{\bigcup_{\gamma\in\Gamma}} \gamma(W) ,$$

und $\bar W$ ist genau dann offen, wenn W und damit $\varphi(W)$ offen ist. Also ist $\bar\varphi$ eine Karte von M/Γ um $[p]$, und M/Γ ist eine topologische Mannigfaltigkeit.

Sei jetzt M differenzierbar, dann konstruieren wir wie oben Karten $\bar{\varphi}$ zu differenzierbaren Karten von M. Die Kartenwechsel von M/Γ kommen dann von Kartenwechseln von M, sind also differenzierbar. Also ist M/Γ eine differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Wir zeigen, dass π eine Überlagerung ist. Zu $[p] \in M/\Gamma$ wählen wir eine Karte $\bar{\varphi}$ wie oben. Es folgt

$$\begin{tikzcd}
\dot{\bigcup}_{\gamma\in\Gamma} \gamma(U^{\varphi})=\pi^{-1}(U^{\bar{\varphi}}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\pi"'] & U^{\bar{\varphi}} \times \Gamma \arrow[d, "\pi_{U^{\bar{\varphi}}}"] \\
U^{\bar{\varphi}} \arrow[r, equal] & U^{\bar{\varphi}}
\end{tikzcd},$$

also ist π eine Überlagerung.

Sei schließlich g eine Riemannsche Metrik auf M, und sei $p \in M$. Dann haben wir kommutative Diagramme von Isomorphismen

$$\begin{tikzcd}
T_pM \arrow[r, "d\gamma_p"] \arrow[d, "d\pi_{\gamma(p)}"'] & T_{\gamma(p)}M \arrow[d, "d\pi_{\gamma(p)}"'] \\
T_{[p]}(M/\Gamma) \arrow[r, equal] & T_{[p]}(M/\Gamma)
\end{tikzcd}$$

für alle $\gamma \in \Gamma$. Falls eine Metrik $\bar{g}$ auf M/Γ existiert, so dass π Riemannsche Überlagerung wird, dann müssen insbesondere alle Elemente von Γ Isometrien sein. Falls das so ist, liefert jeder Isomorphismus $T_{\gamma(p)}M \to T_{[p]}(M/\Gamma)$ die gleiche Metrik $\bar{g}_{[p]}$ auf $T_{[p]}(M/\Gamma)$, und in Karten wie oben sieht man leicht, dass so eine differenzierbare Riemannsche Metrik auf M/Γ gegeben wird. $\square$

Nicht jede Überlagerung $\pi\colon \tilde{M} \to M$ kommt von einer Gruppenoperation auf $\tilde{M}$ her, aber die maximale zusammenhängende Überlagerung von M ist immerhin von diesem Typ. Um das besser zu verstehen, benötigen wir auch noch den Begriff der Fundamentalgruppe.

1.123. Definition. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit, und sei $p \in M$.

(1) Eine *Schleife* in M am Punkt p ist eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p$.
(2) Zwei Schleifen γ_0, γ_1 am Punkt p heißen *homotop relativ zu p*, kurz $\gamma_0 \sim \gamma_1$, wenn es eine stetige Abbildung $h\colon [0,1] \times [0,1] \to M$ mit
$$h(t,i) = \gamma_i(t) \qquad \text{und} \qquad h(i,s) = p$$
für alle s, $t \in [0,1]$ und alle $i \in \{0,1\}$ gibt.
(3) Die Verkettung zweier Schleifen γ_0, γ_1 am Punkt p ist die Schleife $\gamma_0\gamma_1$ mit
$$(\gamma_0\gamma_1)(t) = \begin{cases} \gamma_0(2t) & \text{für } s \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \text{ und} \\ \gamma_1(2t-1) & \text{für } s \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$
(4) Die *Fundamentalgruppe* $\pi_1(M,p)$ ist die Menge aller Schleifen in M am Punkt p bis auf Homotopie, mit der Verkettung als Verknüpfung.

1.124. Bemerkung. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(M,p)$ ist tatsächlich wohldefiniert, und zwar nicht nur für Mannigfaltigkeiten, sondern genauso für beliebige topologische Räume. Das folgende lässt sich leicht überprüfen.

(1) Seien $\gamma_0 \sim \gamma_0'$ und $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ Paare homotoper Schleifen am Punkt $p \in M$, dann folgt $\gamma_0\gamma_1 \sim \gamma_0'\gamma_1'$. Insbesondere ist die Verknüpfung auf $\pi_1(M,p)$ wohldefiniert.
(2) Die Verkettung ist assoziativ bis auf Homotopie, denn die Schleifen $(\gamma_0\gamma_1)\gamma_2$ und $\gamma_0(\gamma_1\gamma_2)$ sind bis auf Umparametrisierung gleich, und diese Umkehrung lässt sich durch eine Homotopie realisieren.

(3) Das neutrale Element ist die konstante Kurve $[0,1] \to \{p\} \subset M$, und das Inverse zu $[\gamma]$ ist die Homotopieklasse der rückwärts durchlaufenen Kurve $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$.

1.125. Beispiel. Betrachte den Einheitskreis $S^1 \subset \mathbb{C}$. Es gibt einen Gruppenhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, 1)$ mit

$$n \mapsto \gamma_n \qquad \text{mit} \qquad \gamma_n(t) = e^{2\pi int} \in S^1$$

für alle $t \in [0,1]$. Somit ist γ_n eine Kurve, die den Kreis n-mal in positiver Richtung durchläuft. Man überzeugt sich leicht, dass es sich tatsächlich um einen Gruppenhomomorphismus handelt. Nicht ganz so einzusehen ist, dass es sogar ein Isomorphismus ist, es gilt also

$$\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} .$$

1.126. Beispiel. Es sei $n \geq 2$, dann gilt $\pi_1(S^n, p) \cong \{e\}$. Sei etwa p der Nordpol. Falls γ eine Schleife am Punkt p ist, die den Südpol $-p$ nicht passiert, können wir die Schleife mittels stereographischer Projektion in den $\mathbb{R}^n$ überführen und dort auf den Nullpunkt zusammenziehen, der ja dem Nordpol entspricht. Ein kleines topologisches Argument zeigt, dass jede Schleife am Punkt p homotop zu einer Schleife ist, die den Südpol nicht trifft.

1.127. Bemerkung. Sei $F\colon M \to N$ eine stetige Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, und seien $p \in M$, $q \in N$ gegeben mit $q = F(p)$. Sei $\gamma\colon [0,1] \to M$ eine Schleife in M am Punkt p, dann ist $F \circ \gamma$ eine Schleife in N am Punkt q. Sei $h\colon [0,1]^2 \to M$ Homotopie zwischen γ und γ', dann ist $F \circ h$ eine Homotopie zwischen $F \circ \gamma$ und $F \circ \gamma'$. Schließlich gilt $F \circ (\gamma_0\gamma_1) = (F \circ \gamma_0) \cdot (F \circ \gamma_1)$. Also existiert ein Gruppenhomomorphismus $\pi_1 F\colon \pi_1(M,p) \to \pi_1(N,q)$ mit

$$[\gamma] \mapsto [F \circ \gamma] .$$

Sei $G \circ L \to M$ eine weitere Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten, so folgt $\pi_1(F \circ G) = \pi_1 F \circ \pi_1 G$. Somit ist π_1 ein Funktor von der Kategorie der *punktierten Mannigfaltigkeiten* (M,p) in die Kategorie der Gruppen. Man kann zeigen: jede endlich präsentierte Gruppe ist Fundamentalgruppe einer kompakten punktierten Mannigfaltigkeit.

Außerdem überlegt man sich leicht, dass $\pi_1 F$ nur von der Homotopieklasse von F unter allen Abbildungen von M nach N abhängt, die p auf q abbilden.

1.128. Bemerkung. Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit, dann ist M insbesondere wegzusammenhängend. Seien p, $q \in M$, dann existiert also ein Weg $\rho\colon [0,1] \to M$ mit $\rho(0) = p$ und $\rho(1) = q$. Sei γ eine Schleife an q, dann ist die Verkettung $\rho \circ \gamma \circ \rho^{-1}$ von Wegen eine Schleife an p. Ähnlich wie bei der Konstruktion des Inversen in $\pi_1(M,p)$ überlegt man sich, dass

$$(\rho\gamma_0\rho^{-1}) \cdot (\rho\gamma_1\rho^{-1}) = \rho \cdot (\gamma_0\gamma_1) \cdot \rho^{-1}$$

gilt, somit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus $\pi_1(M,p) \to \pi_1(M,q)$, der allerdings von der Homotopieklasse des Weges ρ abhängt. Den inversen Homomorphismus liefert der umgekehrte Weg ρ^{-1}. Wenn uns also die Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit M nur bis auf Isomorphie interessiert, dürfen wir $\pi_1(M)$ schreiben — immer vorausgesetzt, dass M zusammenhängend ist. Allerdings können wir jetzt nicht mehr über Elemente von $\pi_1(M)$ sprechen.

1.129. Definition. Eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit M heißt *einfach zusammenhängend,* wenn $\pi_1(M) \cong \{e\}$.

Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Eine Überlagerung $\pi\colon \tilde{M} \to M$ heißt *universell,* wenn $\tilde{M}$ zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist. Wenn M und $\tilde{M}$ außerdem noch Riemannsche Metriken tragen und π Riemannsch ist, heißt π *universelle Riemannsche Überlagerung.*

Wegen Bemerkung 1.128 ist diese Definition sinnvoll. Woher der Begriff „universelle Überlagerung“ kommt, wird im folgenden Satz klar.

1.130. Satz. *Sei M eine zusammenhängende (differenzierbare) Mannigfaltigkeit, sei $p \in M$, und sei $\Gamma = \pi_1(M,p)$ die Fundamentalgruppe.*

(1) *Dann besitzt M eine universelle Überlagerung $\pi\colon \tilde M \to M$. Die Gruppe Γ operiert frei und eigentlich diskontinuierlich auf $\tilde M$, und es existiert genau ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $\tilde M/\Gamma \to M$, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \tilde M \arrow[r, equal] \arrow[d, "\pi"'] & \tilde M \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\sim"] & \tilde M/\Gamma \end{tikzcd}$$

kommutiert. Im folgenden sei $\tilde p \in \pi^{-1}(p)$ fest gewählt.

(2) *Sei $F\colon M_1 \to M$ eine weitere Überlagerung mit zusammenhängendem Totalraum M_1, sei $p_1 \in F^{-1}(p)$, und sei $\Gamma_1 = \pi_1 F(\pi_1(M_1,p_1))$. Dann existiert genau eine Überlagerung $\bar F\colon \tilde M \to M_1$ mit $\pi = F \circ \bar F$ und $\bar F(\tilde p) = p_1$ und genau ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $\tilde M/\Gamma_1 \to M_1$, so dass das folgende Diagramm kommutiert.*

$$\begin{tikzcd} \tilde M \arrow[r, equal] \arrow[d] & \tilde M \arrow[d, "\bar F"] & \\ \tilde M/\Gamma_1 \arrow[r, "\sim"] & M_1 \arrow[r, "F"] & M\,. \end{tikzcd}$$

(3) *Es existieren Überlagerungen $F_1\colon \tilde M/\Gamma_1 \to M$ und $\bar F_1\colon \tilde M \to\colon \tilde M/\Gamma_1$ mit $\pi = F_1 \circ \bar F_1$ zu jeder Untergruppe $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Wenn Γ_1 Normalteiler von Γ ist, operiert Γ/Γ_1 auf $\tilde M/\Gamma_1$, und es existiert ein Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $(\tilde M/\Gamma_1)/(\Gamma/\Gamma_1) \to M$.*

Beweis. Wir geben hier nur eine kurze Beweisskizze. Ein ausführlicher Beweis findet sich in (fast) jeder Einführung in die algebraische Topologie unter den Stichworten „Fundamentalgruppe“ und „Überlagerungen“. Wir definieren $\tilde M$ als Menge der Äquivalenzklassen $[\sigma]$ von Kurven $\sigma\colon [0,1] \to M$ mit $\sigma(0)$ bis auf Homotopie relativ zu den Endpunkten $\sigma(0)$ und $\sigma(1) =\colon \pi([\sigma])$.

Sei $q = \pi([\sigma])$, und sei $\varphi\colon U^\varphi \to V^\varphi \cong B_1(0)$ eine Karte um q mit $\varphi(q) = 0$. Dann erhalten wir eine Karte $\tilde\varphi_{[\sigma]}$ um $[\sigma]$ wie folgt. Zu $r \in U^\varphi$ betrachten wir den Weg $\rho(t) = \varphi^{-1}(t \cdot \varphi(r))$ von q nach r, und damit einen Punkt $[\sigma\rho] \in \pi^{-1}(r) \subset \tilde M$. Es sei $U^{\tilde\varphi_{[\sigma]}}$ die Menge aller dieser Punkte, dann definieren wir

$$\tilde\varphi_{[\sigma]}\colon U^{\tilde\varphi_{[\sigma]}} \to V^{\tilde\varphi_{[\sigma]}} = V^\varphi \qquad \text{durch} \qquad \tilde\varphi_{[\sigma]}([\sigma\rho]) = (\varphi\circ\pi)([\sigma\rho]) = \varphi(\rho(1))\,.$$

Man kann eine Topologie auf $\tilde M$ konstruieren, so dass alle wie oben konstruierten Karten einen (differenzierbaren) Atlas auf $\tilde M$ bilden. Ähnlich wie im Beweis von Proposition 1.122 sieht man auch, dass $\pi\colon \tilde M \to M$ eine Überlagerung ist.

Die Mannigfaltigkeit $\tilde M$ ist zusammenhängend, denn jeder Punkt $[\sigma] \in \tilde M$ ist durch die Kurve $t \mapsto [\sigma|_{[0,t]}]$ mit dem Ursprung $\tilde p := [e]$ verbunden, wobei e die konstante Schleife am Punkt p bezeichne. Wir betrachten jetzt eine Schleife κ in $\tilde M$ am Punkt p. Es sei $\sigma = \pi\circ\kappa$ die entsprechende Schleife in M. Für alle t gilt

$$\kappa(t) = [(\pi\circ\kappa)|_{[0,t]}] = [\sigma|_{[0,t]}] \in \tilde M\,.$$

Da κ eine Schleife ist, folgt $[\sigma] = \kappa(1) = \tilde p = [e]$, mithin existiert lässt sich σ in M durch eine Homotopie $h\colon [0,1]^2 \to M$ zusammenziehen mit

$$h(0,s) = h(1,s) = h(t,0) = p \qquad \text{und} \qquad h(t,1) = \sigma(t)\,.$$

Wir erhalten eine Homotopie $\tilde h\colon [0,1]^2 \to \tilde M$ mit

$$\tilde h(0,s) = \tilde h(1,s) = \tilde h(t,0) = \tilde p \qquad \text{und} \qquad \tilde h(t,1) = \kappa(t)$$

durch $\tilde h(t,s) = [h(t,\,\cdot\,)|_{[0,s]}]$. Also ist jede Schleife in $\tilde M$ am Punkt $\tilde p$ zusammenziehbar.

Die Fundamentalgruppe Γ operiert auf $\tilde M$ wie folgt. Sei $\sigma\colon [0,1] \to M$ ein Weg von p nach q, und sei γ Schleife in M am Punkt p, dann ist $\gamma\sigma$ ein weiterer Weg von p nach q. Dann hängt $[\gamma\sigma]$ offensichtlich nur von den Homotopieklassen von γ und σ (jeweils mit festgehaltenem Endpunkt) ab, und wir erhalten eine Operation von $\Gamma = \pi_1(M,p)$ auf $\tilde M$. Zwei Wege $\gamma\sigma$ und $\gamma'\sigma$ sind genau dann homotop relativ zu ihren Endpunkten, wenn $\gamma \sim \gamma'$, mithin ist diese Operation frei. Mit ein bisschen mehr Arbeit sieht man, dass sie auch eigentlich diskontinuierlich ist.

Für alle $[\gamma] \in \Gamma$ gilt $\pi \circ [\gamma] = \pi\colon \tilde M \to M$. Sei umgekehrt $\pi([\sigma]) = \pi([\tau])$, dann existiert eine Schleife $\gamma = \tau\sigma^{-1}$ am Punkt p, so dass $[\gamma]([\sigma]) = [\tau]$, es folgt $\pi^{-1}(q) = \Gamma \cdot [\sigma]$. Also lassen sich die Γ-Orbiten auf $\tilde M$ bijektiv den Punkten in M zuordnen, und man sieht leicht, dass das den gesuchten Homöomorphismus $\tilde M/\Gamma \to M$ liefert (bzw. Diffeomorphismus, falls M differenzierbare Mannigfaltigkeit ist). Damit ist (1) gezeigt.

Zu (2) benutzen wir die sogenannte „eindeutige Liftungseigenschaft“ von Überlagerungen, wonach sich jeder Pfad σ in M von p nach q zu einem Pfad σ_1 in M_1 mit Startpunkt $p_1 \in M_1$ liften lässt, d.h., es gilt $\sigma = F \circ \sigma_1$. Die eindeutige Liftungseigenschaft impliziert auch, dass homotope Pfade homotope Lifts haben, mithin ist die Abbildung $\bar F\colon \tilde M \to M$ mit $\bar F([\sigma]) = \sigma_1(1) \in F^{-1}(q) \subset M_1$ wohldefiniert. Für eine Schleife γ in M am Punkt p haben die Lifts von σ und $\gamma\sigma$ nach M_1 genau dann denselben Endpunkt, wenn γ zu einer Schleife γ_1 in M_1 liftet, aber genau dann gilt $[\gamma] = \pi_1 F([\gamma_1]) \in \pi_1 F(\pi_1(M_1,p_1))$. Somit erhalten wir auch den gesuchten Homöomorphismus (Diffeomorphismus) $\tilde M/\Gamma_1 \cong M_1$, und (2) ist bewiesen.

Die Existenz von $\bar F_1\colon \tilde M_1 \to \tilde M/\Gamma_1$ folgt aus Proposition 1.122, und da jeder Γ_1-Orbit in einem Γ-Orbit enthalten ist, existiert auch die Abbildung $F_1\colon \tilde M/\Gamma_1 \to M$, und wieder kann man sich überzeugen, dass es sich um eine Überlagerung handelt. Wenn Γ_1 ein Normalteiler von Γ ist, dann bildet jedes $\gamma \in \Gamma$ jeden Γ_1-Orbit wieder auf einen Γ_1-Orbit ab, wir erhalten die gesuchte Γ/Γ_1-Operation auf $\tilde M/\Gamma_1$, und es gilt $(\tilde M/\Gamma_1)/(\Gamma/\Gamma_1) \cong \tilde M/\Gamma \cong M$ wie beim entsprechenden Isomorphiesatz in der Algebra. ☐

1.131. Bemerkung. Aus (2) in Satz 1.130 folgt mit den üblichen universellen Argumenten, dass die universelle Überlagerung $\pi\colon (\tilde M, \tilde p) \to (M,p)$ bis auf eindeutige Homöomorphismen (bzw. Diffeomorphismen) eindeutig bestimmt ist. Wir dürfen also in Zukunft von „der“ universellen Überlagerung von M reden.

Die Aussagen in (2) und (3) lassen sich wie folgt zusammenfassen: Die Kategorie der Untergruppen von $\pi_1(M,p)$ (mit den Inklusionen als Morphismen) ist äquivalent zur Kategorie der zusammenhängenden, punktierten Überlagerungen von (M,p), deren Morphismen durch kommutative Diagramme von Überlagerungen

$$\begin{tikzcd} (M_1,p_1) \arrow[r] \arrow[d] & (M_2,p_2) \arrow[d] \\ (M,p) \arrow[r, equal] & (M,p) \end{tikzcd}$$

gegeben werden. Die Bestimmung aller zusammenhängenden Überlagerungen von M ist jetzt zu einem rein algebraischen Problem geworden.

Zum Abschluss geben wir eine Beschreibung der zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung $\kappa \in \mathbb{R}$ an. Man beachte, dass die Schnittkrümmung für Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension ≤ 1 eine Funktion auf der leeren Menge ist.

1.132. Definition. Es sei $\kappa \in \mathbb{R}$ und $n \geq 2$, dann definieren wir den *Modellraum* (M^n_κ, g^κ) wie folgt.

(1) Falls $\kappa = 0$, sei $(M^n_\kappa, g^\kappa) = (\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$.
(2) Falls $\kappa > 0$, sei $(M^n_\kappa, g^\kappa) = (S^n_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die Sphäre vom Radius $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ mit der vom umgebenden Raum induzierten Metrik.
(3) Falls $\kappa < 0$, sei $(M^n_\kappa, g^\kappa) = (B_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}}(0), g^\kappa) \subset \mathbb{R}^n$ mit

$$g^\kappa_x(v, w) = \frac{4}{(1 + \kappa\, |x|^2)^2}\, \langle v, w \rangle\ .$$

1.133. Proposition. *Die Modellräume (M^n_κ, g^κ) sind zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung κ. Sie sind genau dann kompakt, wenn $\kappa > 0$ gilt. Durchmesser, konjugierter Radius und Injektivitätsradius sind gleich*

$$\operatorname{diam}(M^n_\kappa) = \rho(M^n_\kappa) = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{falls } \kappa > 0, \text{ und} \\ \infty & \text{falls } \kappa \leq 0. \end{cases}$$

Beweis. Für $\kappa \in \{0, 1, -1\}$ erhalten wir wohlbekannte Räume: den euklidischen Raum, die Sphäre und den hyperbolischen Raum, jeweils mit der Standardmetrik. Wir wissen aus den Beispielen 1.97, 1.99, 1.109, 1.104 und 1.126 bereits, dass diese Räume zusammenhängend, einfach zusammenhängend und vollständig sind und den angegebenen Durchmesser und Injektivitätsradius haben. Außerdem ist nach Beispiel 1.101 die Sphäre kompakt, die anderen beiden Räume jedoch nicht. Damit haben wir insbesondere den Fall $\kappa = 0$ bereits bewiesen.

Wir betrachten $\kappa > 0$. Mittels einer Streckung am Urpsrung in $\mathbb{R}^{n+1}$ mit Streckfaktor $\kappa^{-\frac{1}{2}}$ erhalten wir einen Diffeomorphismus $F\colon S^n \to S^n_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}$. Wir können die Metrik g^κ auf die Standardsphäre S^n zurückholen und erhalten

$$\begin{aligned}(F^*g^\kappa)_x(v, w) = g^\kappa_{F(x)}\big(d_xF(v), d_xF(w)\big) &= g^\kappa_{\kappa^{-\frac{1}{2}}x}\Big(\kappa^{-\frac{1}{2}}x, \kappa^{-\frac{1}{2}}y\Big) \\ &= \Big\langle \kappa^{-\frac{1}{2}}x, \kappa^{-\frac{1}{2}}y \Big\rangle = \frac{\langle x, y\rangle}{\kappa} = \frac{1}{\kappa}\, g^{\mathrm{sph}}_x(v, w)\ .\end{aligned}$$

Anhand der Koszul-Formel aus Satz 1.41 ist leicht zu sehen, dass F^*g^κ und g^{sph} denselben Levi-Civita-Zusammenhang ∇ haben. In Koordinaten gilt nämlich

$${}^\kappa\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n {}^\kappa g^{kl}\left(\frac{\partial g^\kappa_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^\kappa_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g^\kappa_{ij}}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n \big(\kappa\ {}^{\mathrm{sph}}g^{kl}\big)\,\frac{1}{\kappa}\left(\frac{\partial g^{\mathrm{sph}}_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g^{\mathrm{sph}}_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g^{\mathrm{sph}}_{ij}}{\partial x^l}\right) = {}^{\mathrm{sph}}\Gamma^k_{ij}\ .$$

Damit haben beide Metriken auch denselben Krümmungstensor R. Falls v, $w \in T_xS^n$ linear unabhängig sind, betrachte $E = \operatorname{span}(v, w) \subset T_xM$. Wir erhalten

$$(F^*K^\kappa)(E) = \frac{g^\kappa(R_{v,w}w, v)}{g^\kappa(v, v)\, g^\kappa(w, w) - g^\kappa(v, w)^2} = \kappa\, \frac{g^{\mathrm{sph}}(R_{v,w}w, v)}{g^\kappa(v, v)\, g^\kappa(w, w) - g^\kappa(v, w)^2} = \kappa\ .$$

Da g^κ und g^{sph} denselben Levi-Civita-Zusammenhang ∇ haben, haben sie auch dieselbe Exponentialabbildung. Nach dem Satz 1.95 von Hopf-Rinow ist S^n also mit der Metrik F^*g^κ ebenfalls vollständig. Beachte aber: wenn c eine bezüglich g^{sph} nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische ist, dann ist $t \mapsto c(\sqrt{\kappa}\, t)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische bezüglich F^*g^κ.

Da $F\colon (S^n, F^*g^\kappa) \to (S^n_{\kappa^{-\frac{1}{2}}}, g^\kappa)$ eine Isometrie ist, ist auch (M^n_κ, g^κ) eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ. Der Fall $\kappa > 0$ ist damit erledigt.

Im Fall $\kappa < 0$ verfahren wir analog. Wir betrachten die zentrische Streckung $F\colon B_1(0) \to B_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}}$ mit Streckfaktor $(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}$. Für die zurückgeholte Metrik erhalten wir

$$\begin{aligned}(F^*g^\kappa)_x(v,w) &= g^\kappa_{(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}x}\Big((-\kappa)^{-\frac{1}{2}}v, (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}w\Big)\\ &= \frac{4}{\big(1+\kappa\,\big|(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}x\big|^2\big)^2}\Big\langle(-\kappa)^{-\frac{1}{2}}v, (-\kappa)^{-\frac{1}{2}}w\Big\rangle = -\frac{1}{\kappa}\,\frac{4}{\big(1-|x|^2\big)^2}\,\langle v,w\rangle = -\frac{1}{\kappa}\,g^{\mathrm{hyp}}_x(v,w)\ .\end{aligned}$$

Wie oben folgt, dass $(B_1(0), F^*g^\kappa)$ eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende, vollständige, nicht kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung κ ist, und obendrein isometrisch zu (M^n_κ, g^κ). □

1.134. Bemerkung. Wenn wir die Metrik auf den Modellräumen für $\kappa > 0$ in der stereographischen Projektion $\varphi_\pm\colon M^n_\kappa \setminus \{\pm\kappa^{-\frac{1}{2}}\,e_{n+1}\}$ berechnen, erhalten wir ähnlich wie in Beispiel 1.35 die Metrik

$$g^{\kappa,\varphi_\pm}_x(v,w) = \frac{4}{(1+\kappa\,|x|^2)^2}\,\langle v,w\rangle\ .$$

Für $\kappa = 0$ liefert diese Formel eine reskalierte Euklidische Metrik. Wir sehen also, dass in geeigneten Karten die Metriken der Modellräume für alle κ durch die gleiche Formel dargestellt werden.

1.135. Bemerkung. Auf einer Mannigfaltigkeit konstanter Schnittkrümmung κ hat die Jacobigleichung eine besonders einfache Gestalt. Dazu bestimmen wir zunächst einmal einen Teil des Krümmungstensors R. Für einen Einheitsvektoren v, und $x \perp v$ folgt

$$\langle R_{x,v}v, x\rangle = \kappa(\|v\|^2\,\|x\|^2 - \langle v,x\rangle^2) = \kappa\,\|x\|^2\ .$$

Seien jetzt x, $y \perp v$, dann gilt

$$\langle R_{x,v}v, y\rangle = \frac{1}{4}\big(\langle R_{x+y,v}v, x+y\rangle - \langle R_{x-y,v}v, x-y\rangle\big) = \frac{\kappa}{4}\,(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = \kappa\,\langle x,y\rangle\ .$$

Schließlich gilt noch $\langle R_{x,v}v, v\rangle = 0$, und daraus folgt endlich

$$R_{x,v}v = \kappa\,x\ .$$

Allgemeiner kann beweisen, dass

$$R_{x,y}z = \kappa\,(\langle y,z\rangle x - \langle x,z\rangle y)\ .$$

Sei jetzt X ein Jacobifeld längs einer nach Bogenlänge parametrisierten Geodätischen c mit $X \perp \dot c$ und $\dot X \perp \dot c$, dann folgt aus obigem, dass

$$0 = \ddot X + R_{X,\dot c}\dot c = \ddot X + \kappa\,X\ .$$

Für $w \perp \dot c$ wollen wir jetzt die Jacobifelder X, Y längs c mit

$$X(0) = \dot Y(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot X(0) = Y(0) = w$$

bestimmen. Dazu sei W ein paralleles Vektorfeld längs c mit $W(0) = w$ gegeben, dann gilt

$$X(t) = s_\kappa(t)\,W(t) \qquad \text{und} \qquad Y(t) = c_\kappa(t)\,W(t)\ ,$$

wobei die „verallgemeinerten Sinus- und Cosinus-Funktionen“ definiert sind als

$$s_\kappa(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\sqrt{\kappa}\, t)}{\sqrt{\kappa}} & \text{für } \kappa > 0, \\ t & \text{für } \kappa = 0 \text{ und} \\ \dfrac{\sinh(\sqrt{-\kappa}\, t)}{\sqrt{-\kappa}} & \text{für } \kappa < 0, \text{ sowie} \end{cases}$$

$$c_\kappa(t) = \dot s_\kappa(t) = \begin{cases} \cos(\sqrt{\kappa}\, t) & \text{für } \kappa > 0, \\ 1 & \text{für } \kappa = 0 \text{ und} \\ \cosh(\sqrt{-\kappa}\, t) & \text{für } \kappa < 0. \end{cases}$$

Diese Funktionen erfüllen die Differentialgleichung

$$\ddot f + \kappa f = 0 \qquad \text{mit} \qquad c_\kappa(0) = \dot s_\kappa(0) = 1 \qquad \text{und} \qquad \dot c_\kappa(0) = s_\kappa(0) = 0 \; .$$

Wir können jetzt ein Beispiel für Satz 1.130 geben.

1.136. Satz. *Sei M eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n mit konstanter Schnittkrümmung κ. Dann ist die universelle Riemannsche Überlagerung von M isometrisch zu M^n_κ.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $\kappa \le 0$ und fixieren $o \in M^n_\kappa$ und $p \in M$. Da $\rho(M^n_\kappa) = \infty$, ist $\exp_o\colon T_oM^n_\kappa \to M^n_\kappa$ ein Diffeomorphismus nach Folgerung 1.114. Wir wählen eine lineare Isometrie $\Phi\colon (T_oM^n_\kappa, g^\kappa_o) \to (T_pM, g_p)$ und konstruieren eine Abbildung $\pi\colon M^n_\kappa \to M$ durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_oM^n_\kappa & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & T_pM \\ {\scriptstyle \exp_o}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} \\ M^n_\kappa & \xrightarrow{\pi} & M \end{array} \; .$$

Die zurückgezogenen Metriken $\exp_o^* g^\kappa$ und $\exp_p^* g$ auf $T_oM^n_\kappa$ bzw. T_pM haben die folgenden Eigenschaften.

(1) Am Nullpunkt gilt $(\exp_o^* g^\kappa)_{0_o} = g^\kappa_o$ bzw. $(\exp_p^* g)_{0_p} = g_p$.
(2) Sei v Einheitsvektor bezüglich g^κ_o bzw. g_p, dann ist $c_v(t) = tv$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische bezüglich $\exp_o^* g^\kappa$ bzw. $\exp_p^* g$.
(3) Vektorfelder der Form $X(t) = tw$ längs c_v sind Jacobifelder.

Aus diesen Eigenschaften lassen sich diese Metriken bereits vollständig rekonstruieren.

Seien etwa v, $w \in S_pM$, sei $c_v(t) = tv$ die radiale Geodätische mit Startvektor v, und sei W das parallele Vektorfeld längs c mit $W(0) = w$. Dann wird das Jacobifeld X längs c_v mit $X(0) = 0$ und $\dot X(0) = w$ nach Bemerkung 1.135 gegeben durch

$$tw = X(t) = s_\kappa(t)\, W(t) \; ,$$

es folgt

$$(\exp_p^* g)_{tv}(tw, tw) = s_\kappa(t)^2 \, \langle W(t), W(t)\rangle = s_\kappa(t)^2 \, \langle w, w\rangle \; ,$$

und allgemeiner für x, $y \perp v$, dass

$$(\exp_p^* g)_{tv}(x, y) = \frac{s_\kappa(t)^2}{t^2} \, \langle x, y\rangle \; .$$

Ferner gilt noch

$$(\exp_p^* g)_{tv}(v, v) = 1 \qquad \text{und} \qquad (\exp_p^* g)_{tv}(v, x) = 0 \; ,$$

wodurch die Metrik $\exp_p^* g$ auf T_pM bestimmt ist. Die entsprechenden Formeln gelten für $\exp_o^* g^\kappa$, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
(T_oM^n_\kappa, \exp_o^* g^\kappa) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & (T_pM, \exp_p^* g) \\
\scriptstyle\exp_o\downarrow & & \downarrow\scriptstyle\exp_p \\
(M^n_\kappa, g^\kappa) & \xrightarrow{\pi} & (M, g)
\end{array} \quad .$$

lokaler Isometrien, wobei $\exp_o$ und Φ sogar globale Isometrien sind.

Es bleibt zu zeigen, dass π eine Überlagerung ist. Sei also $q \in M$ beliebig, dann wählen wir $U = B_r(q)$ für ein $r \in (0, \rho(q))$. Es ist jetzt leicht zu sehen, dass

$$\pi^{-1}(U) = \dot{\bigcup_{\tilde q \in \pi^{-1}\{q\}}} B_r(\tilde q) \cong \pi^{-1}\{q\} \times B_r(q)$$

gilt, wobei der Isomorphismus passend zu Definition 1.115 gewählt werden kann.

Aus ähnlichen Argumenten wie oben (aber um $\tilde q \in \pi^{-1}(q)$) folgt sofort

$$\pi^{-1}(U) \supset \bigcup_{\tilde q \in \pi^{-1}\{q\}} B_r(\tilde q) \; .$$

Zu „$\subset$“ sei $s \in U$ und $\tilde s \in \pi^{-1}(U)$. Dann existiert $w \in T_sM$ mit $\|w\| < r$ und $\exp_s w = q$. Sei $\tilde w = (d_{\tilde s}\pi)^{-1}(w)$, und setze $\tilde q = \exp_{\tilde s} \tilde w \in M^n_\kappa$, dann folgt $\tilde q \in \pi^{-1}(q)$, mithin $s \in \bigcup_{\tilde q \in \pi^{-1}\{q\}} B_r(\tilde q)$.

Wäre schließlich die obige Vereinigung nicht disjunkt, dann würde ein Punkt $\tilde s$ im Durchschnitt zweier solcher Bälle um $\tilde q_1, \tilde q_2 \in \pi^{-1}(q)$ auf einen Punkt in M abgebildet, der durch zwei Geodätische der Länge $< r$ mit q verbunden werden könnte, im Widerspruch dazu, dass $r \le \rho(q)$. Damit ist der Fall $\kappa \le 0$ erledigt.

Im Fall $\kappa > 0$ verfahren wir ähnlich, betrachten jedoch jetzt das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
\Big(B_{\frac{\pi}{\sqrt\kappa}}(0_o), \exp_o^* g^\kappa\Big) & \xrightarrow[\sim]{\Phi} & \Big(B_{\frac{\pi}{\sqrt\kappa}}(0_p), \exp_p^* g\Big) \\
\scriptstyle\exp_o\downarrow & & \downarrow\scriptstyle\exp_p \\
M^n_\kappa & \xrightarrow{\pi} & M
\end{array}$$

lokaler Isometrien, dabei ist der Radius $\frac{\pi}{\sqrt\kappa}$ gerade der konjugierte Radius von M^n_κ und von M.

Für alle $v \in S_pM$ und alle $w \perp v$ folgt aus der Formel für die Jacobifelder tw in Bemerkung 1.135 wegen

$$s_\kappa\Big(\frac{\pi}{\sqrt\kappa}\Big) = \frac{1}{\sqrt\kappa} \sin(\pi) = 0 \; ,$$

dass

$$\Big(d_{\frac{\pi}{\sqrt\kappa} v} \exp_p\Big)(w) = 0 \; , \qquad \text{also} \qquad (d\exp_p)\Big(TS^{n-1}_{\pi\kappa^{-\frac12}}\Big) = \{0\} \; .$$

Somit bilden die obigen Exponentialabbildungen jeweils $\partial B_{\frac{\pi}{\sqrt\kappa}}(0)$ auf einen zu o bzw. p konjugierten Punkt ab. Etwa gilt

$$\exp_o\Big(S^{n-1}_{\frac{\pi}{\sqrt\kappa}}\Big) = \{-o\} \subset M^n_\kappa \subset \mathbb{R}^{n+1} \; .$$

Insbesondere lässt sich π so auf ganz M^n_κ definieren. Um zu zeigen, dass π auch am Punkt $-o$ glatt ist, können wir zum Beispiel Normalkoordinaten um $-o$ und $\pi(-o)$ wählen und mit den obigen Abbildungen vergleichen. Dass π eine Überlagerung ist, folgt jetzt mit dem gleichen Argument wie vorher. $\square$

1.137. Beispiel. Der reell projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ ist Quotient der $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nach $\Gamma = \{1, -1\} \in O(n+1)$. Falls n gerade ist, ist das der einzige Quotient der S^n nach einer freien, eigentlich diskontinuierlichen, isometrischen Gruppenoperation.

Falls $n = 2m-1$ ungerade ist, betrachte $S^{2m-1} \subset$
$mathcalC^m$. Sei p eine natürliche Zahl, und seien $q_1, \dots, q_m \in \{1, \dots, p-1\}$ teilerfremd zu p. Dann operiert die Gruppe

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} e^{2\pi i \frac{q_1 k}{p}} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{2\pi i \frac{q_m k}{p}} \end{pmatrix} \middle| \, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \subset \quad U(m)$$

frei und eigentlich diskontinuierlich auf S^{2m-1}. Der Quotient $L_{p;q_1,\dots,q_m} = S^{2m-1}/\Gamma$ heißt *Linsenraum.* Beispielsweise gilt $\mathbb{R}P^{2m-1} = L_{2;1,\dots,1}$. Darüberhinaus gibt es aber noch weitere Quotienten.

Den Torus als Beispiel einer flachen Mannigfaltigkeit haben wir bereits in Beispiel 1.121 kennengelernt.

1.138. Beispiel. Es gibt viele kompakte Flächen mit Schnittkrümmung $\kappa = -1$. Zur Konstruktion: zu je drei Zahlen a, c, $e \in (0, \infty)$ gibt es genau ein rechtwinkliges Sechseck in der hyperbolischen Ebene $(B_1(0), g^{\mathrm{hyp}})$ Wir verkleben zwei spiegelbildliche Sechsecke entlang der Seiten b, d und f und erhalten eine hyperbolische „Hose“, deren Rand aus drei Kreisen der Längen $2a$, $2c$ und $2e$ besteht.

Anschließend können wir $2k$ solcher Hosen mit passenden Maßen zu einer hyperbolischen Fläche mit Eulerzahl $2k$, das heißt, vom Geschlecht $g = k+1 \geq 2$ verkleben. Die Maße der Hose und die Drehwinkel beim Verkleben geben $6k$ unabhängige Parameter. Somit gibt es einen (mindestens) $6(g-1)$-dimensionalen Raum kompakter hyperbolischer Flächen vom Geschlecht g. Man kann umgekehrt zeigen, dass jede Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ eine solche Zerlegung in „Hosen“ zulässt. Da alle diese Flächen homöomorph sind, haben sie isomorphe Fundamentalgruppen. Somit enthält die Isometriegruppe $SO^0(2,1) \cong PSU(1,1)$ eine $6(g-1)$-Parameter-Familie isomorpher Untergruppen, die alle frei und eigentlich diskontinuierlich auf $B_1(0)$ operieren.

KAPITEL 2

Vergleichssätze in der Riemannschen Geometrie

In diesem Kapitel werden wir sehen, wie die Krümmung einer Mannigfaltigkeit ihre geometrische und topologische Gestalt bestimmt.

2.1. Der Vergleichssatz von Rauch und einige Folgerungen

Als erstes untersuchen wir, wie das Wachstum von Jacobi-Feldern von oberen oder unteren Schranken an die Schnittkrümmung abhängt. Außerdem sehen wir, dass Mannigfaltigkeiten nichtpositiver Schnittkrümmung universelle Überlagerungen haben, die diffeomorph zum $\mathbb{R}^n$ sind.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei die Indexform, die Bilinearisierung der rechten Seite der zweiten Variationsformel aus Satz 1.86.

2.1. Definition. Sei (M, g) Riemannsche Mannigfaltigkeit, und sei $c\colon [0, L] \to M$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische. Wir definieren Vektorräume

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}'(c) &= \big\{\, V \in \mathfrak{X}(c) \;\big|\; \langle V(t), \dot c(t)\rangle = 0 \text{ für alle } t \in [0, L] \,\big\} \\ \text{und}\qquad \mathfrak{X}''(c) &= \big\{\, V \in \mathfrak{X}'(c) \;\big|\; V(0) = V(L) = 0 \,\big\} \end{aligned}$$

Die *Indexform* $I_c\colon \mathfrak{X}'(c) \times \mathfrak{X}'(c) \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$I_c(V, W) = \int_0^L \big(\langle \dot V(t), \dot W(t)\rangle - \langle R_{V(t),\dot c(t)}\dot c(t), W(t)\rangle\big)\, dt\,.$$

2.2. Bemerkung. Aufgrund der Symmetrien des Krümmungstensors aus Satz 1.51 ist die Indexform eine symmetrische Bilinearform.

Die Indexform charakterisiert Jacobi-Felder.

2.3. Lemma. *Ein Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}'(c)$ längs c ist genau dann Jacobifeld, wenn es im Kern der Indexform $I_c|_{\mathfrak{X}'(c),\mathfrak{X}''(c)}$ liegt.*

Beweis. Für $V \in \mathfrak{X}'(c)$ und $W \in \mathfrak{X}''(c)$ schreibe

$$\begin{aligned} I_c(V, W) &= \int_0^L \big(\langle \dot V(t), \dot W(t)\rangle - \langle R_{V(t),\dot c(t)}\dot c(t), W(t)\rangle\big)\, dt \\ &= \underbrace{\langle \dot V(t), W(t)\rangle|_{t=0}^L}_{=0} - \int_0^L \big\langle \ddot V + R_{V(t),\dot c(t)}\dot c(t), W(t)\big\rangle\, dt\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Eine einfache Folgerung aus der zweiten Variationsformel gibt Auskunft über das Vorzeichen der Indexform.

2.4. Proposition. *Sei $c\colon [0, L]$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit M. Es ist genau dann kein Punkt $c(t)$ mit $t \in [0, L]$ längs c zu $c(0)$ konjugiert, wenn die Indexform positiv definit auf dem Raum $\mathfrak{X}''(c)$ ist.*

Beweis. Um die Richtung "$\Longleftarrow$" zu zeigen, nehmen wir an, dass $c(t)$ längs c zu $c(0)$ konjugiert ist für ein $t \in (0, L]$. Falls $t = L$, so sei $V \in \chi(c) \setminus \{0\}$ das zugehörige Jacobifeld, dann folgt $I_c(V, V) = 0$ nach Lemma 2.3. Falls $t < L$, so betrachte das Variationsfeld $V \in \chi''(c)$ aus dem Beweis von Proposition 1.110. Aus der dortigen Rechnung folgt $I_c(V, V) < 0$. In beiden Fällen ist also I_c nicht positiv definit.

Falls umgekehrt c keine konjugierten Punkte hat, setze $p = c(0)$ und $v = \dot{c}(0)$. Nach Annahme ist $d_{tv} \exp_p \colon T_pM \cong T_{tv}T_pM \to T_{c(t)}M$ invertierbar, also existiert zu jedem Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}''(c)$ ein Vektorfeld W längs der Geraden von 0_p nach Lv in T_pM mit $V(t) = (d_{tv} \exp_p)(W(t))$. Betrachte die Variation

$$c_s(t) = \exp_p(tv + s\,W(t))$$

mit Variationsvektorfeld

$$\frac{\partial c_s(t)}{\partial s} = (d_{tv} \exp_p)(W(t)) = V(t) \; .$$

Wie im Beweis des Gauß-Lemmas 1.89 folgt $L(c_s) \geq L(c)$, mithin wegen Satz 1.86 auch

$$I_c(V, V) = \frac{\partial^2 L(c_s)}{\partial s^2} \geq 0 \; ,$$

also ist I_c positiv semidefinit auf dem Raum $\mathfrak{X}''(c)$.

Sei nun $V \in \mathfrak{X}''(c)$ ein Vektorfeld mit $I_c(V, V) = 0$. Für jedes $W \in \mathfrak{X}''(c)$ folgt dann

$$0 \leq I_c(V + \varepsilon W, V + \varepsilon W) = 2\varepsilon\, I_c(V, W) + \varepsilon^2\, I_c(W, W)$$

für alle $\varepsilon \neq 0$, also $I_c(V, W) = 0$. Nach Lemma 2.3 ist V ein Jacobifeld mit $V(0) = V(L) = 0$, aber $c(L)$ ist nach Annahme nicht konjugiert zu $c(0)$, es folgt $V = 0$, und I_c ist damit auf $\mathfrak{X}''(c)$ positiv definit. ☐

2.5. Satz (Rauch). *Seien (M, g) und $(\bar{M}, \bar{g})$ Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimension n, seien c und $\bar{c}$ nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M bzw. $\bar{M}$, und sei $L > 0$ so gewählt, dass kein Punkt $\bar{c}(t)$ mit $t \in (0, L)$ längs $\bar{c}$ zu $\bar{c}(0)$ konjugiert ist. Wenn für alle $t \in [0, L]$ gilt, dass $K(E) \leq K(\bar{E})$ für alle Ebenen $E \subset T_{c(t)}M$ mit $\dot{c}(t) \in E$ und alle Ebenen $\bar{E} \subset T_{\bar{c}(t)}\bar{M}$ mit $\dot{\bar{c}}(t) \in \bar{E}$, dann gilt*

$$\|V(t)\| \geq \|\bar{V}(t)\| \qquad \text{für alle } t \in [0, L]$$

für alle Jacobifelder V längs c und $\bar{V}$ längs $\bar{c}$ mit $V(0) = \bar{V}(0) = 0$, $\langle \dot{V}(0), \dot{c}(0) \rangle = \langle \dot{\bar{V}}(0), \dot{\bar{c}}(0) \rangle = 0$ und $\|\dot{V}(0)\| = \|\dot{\bar{V}}(0)\|$.

Kürzer gesagt: wenn M kleinere Schnittkrümmung als $\bar{M}$ hat, wachsen vergleichbare Jacobifelder mit Startwert 0 in M schneller als in $\bar{M}$, bis zum ersten konjugierten Punkt in $\bar{M}$. In Anwendungen wird in der Regel eine der beiden Mannigfaltigkeiten konstante Schnittkrümmung haben.

Beweis. Wir beweisen die stärkere Aussage

$$\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| \geq \frac{d}{dt} \log \|\bar{V}(t)\|$$

für alle $t \in (0, L)$. Es gilt

$$\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \log \langle V(t), V(t) \rangle = \frac{\langle V(t), \dot{V}(t) \rangle}{\langle V(t), V(t) \rangle} \; .$$

Die Aussage des Satzes folgt hieraus, denn nach Voraussetzung gilt $\bar{V}(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, L)$, wir erhalten also

$$\frac{d}{dt} \frac{\|V(t)\|}{\|\bar{V}(t)\|} = \frac{\|V(t)\|}{\|\bar{V}(t)\|} \left(\frac{d}{dt} \log \|V(t)\| - \frac{d}{dt} \log \|\bar{V}(t)\| \right) \geq 0 \; ,$$

und nach L'Hospital gilt wegen $\|V(0)\| = \|\bar{V}(0)\| = 0$, dass

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|\bar{V}(t)\|}{\|V(t)\|} = \frac{\|\dot{\bar{V}}(t)\|}{\|\dot{V}(t)\|} = 1 \ .$$

Hieraus folgt $\|V(t)\| \geq \|\bar{V}(t)\|$ für alle $t \in (0, L)$ und wegen Stetigkeit dann auch für $t = L$. Insbesondere folgt $V(t) \neq 0$ für alle $t \in (0, L]$.

Wir können zum Beweis die Indexform einsetzen, denn da V, $\bar{V}$ Jacobi-Felder sind mit $V(0) = \bar{V}(0) = 0$, gilt

$$\begin{aligned}\langle V(t_0), \dot{V}(t_0)\rangle = \langle V(t), \dot{V}(t)\rangle\big|_{t=0}^{t_0} &= \int_0^{t_0} \big(\langle \dot{V}(t), \dot{V}(t)\rangle + \langle \ddot{V}(t), V(t)\rangle\big)\, dt \\ &= \int_0^{t_0} \big(\|\dot{V}(t)\|^2 - \langle R_{V(t),\dot{c}(t)}\dot{c}(t), V(t)\rangle\big)\, dt = I_{c|_{[0,t_0]}}(V, V) \qquad (*)\end{aligned}$$

für alle $t_0 \in (0, L)$, und entsprechend für $\bar{V}$.

Wir fixieren jetzt $t_0 \in (0, L)$ mit $V(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, t_0]$. Nach Voraussetzung gilt auch $\bar{V}(t_0) \neq 0$. Wir konstruieren parallele Orthonormalrahmen $e_1, \dots, e_n$ längs c und $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ längs $\bar{c}$ wie in Aufgabe 2 von Blatt 7 mit

$$e_1(t_0) = \frac{V(t_0)}{\|V(t_0)\|} \qquad \bar{e}_1(t_0) = \frac{\bar{V}(t_0)}{\|\bar{V}(t_0)\|} \ , \qquad e_n = \dot{c} \ , \qquad \text{und} \qquad \bar{e}_n = \dot{\bar{c}} \ .$$

Dann erhalten wir eine Familie linearer Isometrien $\Phi_t \colon T_{c(t)}M \to T_{\bar{c}(t)}\bar{M}$ mit $\Phi_t(e_i(t)) = \bar{e}_i(t)$ für alle $t \in [0, L]$ und alle i. Diese Familie ist *parallel,* denn für $X = \sum_{i=1}^n x^i\, e_i \in \mathfrak{X}(c)$ gilt

$$\nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}}(\Phi \circ X) = \nabla^{\bar{c}}_{\frac{\partial}{\partial t}}\left(\sum_{i=1}^n x^i \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial t}\, \bar{e}_i = \Phi \circ \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} X \ .$$

Wir betrachten das Vektorfeld

$$W = \frac{\|\bar{V}(t_0)\|}{\|V(t_0)\|}\, \Phi \circ V$$

längs $\bar{c}$, so dass

$$W(t_0) = \big\|\bar{V}(t_0)\big\|\, \bar{e}_1(t_0) = \bar{V}(t_0) \ .$$

Wegen der Parallelität von Φ gilt außerdem

$$\dot{W} = \frac{\|W(t_0)\|}{\|V(t_0)\|}\, \Phi \circ \dot{V} \qquad \text{und} \qquad \ddot{W} = \frac{\|W(t_0)\|}{\|V(t_0)\|}\, \Phi \circ \ddot{V} \ .$$

Allerdings ist W nicht notwendigerweise ein Jacobi-Feld längs $\bar{c}$.

Da $W - \bar{V} \in \mathfrak{X}''(\bar{c}|_{[0,t_0]})$, schließen wir aus Proposition 2.4 und Lemma 2.3, dass

$$I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(W, W) = \underbrace{I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(W - \bar{V}, W - \bar{V})}_{\geq 0} + 2\, \underbrace{I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(\bar{V}, W - \bar{V})}_{=0} + I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(\bar{V}, \bar{V}) \geq I_{\bar{c}|_{[0,t_0]}}(\bar{V}, \bar{V}) \ .$$

Jetzt können wir mit (*) wie folgt abschätzen.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \log\|V(t)\| &= \frac{\langle V(t_0), \dot V(t_0)\rangle}{\|V(t_0)\|^2} = \frac{1}{\|V(t_0)\|^2} \int_0^{t_0} \big(\|\dot V(t)\|^2 - K(\operatorname{span}\{V(t), \dot c(t)\})\, \|V(t)\|^2\big)\, dt \\
&= \frac{1}{\|(\Phi\circ V)(t_0)\|^2} \int_0^{t_0} \big(\|(\Phi\circ \dot V)(t)\|^2 - \underbrace{K(\operatorname{span}\{V(t), \dot c(t)\})}_{\le \bar K(\operatorname{span}\{W(t), \dot{\bar c}(t)\})}\, \|(\Phi\circ V)(t)\|^2\big)\, dt \\
&\ge \frac{1}{\|W(t_0)\|^2} \int_0^{t_0} \big(\|\dot W(t)\|^2 - \bar K(\operatorname{span}\{W(t), \dot{\bar c}(t)\})\, \|W(t)\|^2\big)\, dt \\
&= \frac{1}{\|W(t_0)\|^2}\, I_{\bar c|_{[0,t_0]}}(W,W) \ge \frac{1}{\|\bar V(t_0)\|^2}\, I_{\bar c|_{[0,t_0]}}(\bar V, \bar V) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0} \log\big\|\bar V(t)\big\| \ . \qquad \square
\end{aligned}$$

Aus dem obigen Satz können wir folgern, dass der Abstand zum ersten konjugierten Punkt bei Mannigfaltigkeiten mit größerer Schnittkrümmung kleiner ist. Daraus kann man eine Durchmesser-Abschätzung herleiten, und schließlich feststellen, dass die Fundamentalgruppe dann endlich sein muss. Wir werden im nächsten Abschnitt aber sehen, dass für derlei Aussagen bereits die Ricci-Krümmung ausreicht.

Wir betrachten jetzt ähnliche Diagramme wie im Beweis der Satzes 1.136, allerdings bei variabler Schnittkrümmung. Sei dazu $\Phi\colon T_pM \to T_{\bar p}\bar M$ eine lineare Isometrie und $r > 0$ hinreichend klein, dann betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
T_pM \supset B_r(0_p) \arrow[r, "\Phi", "\sim"'] \arrow[d, "\exp_p"'] & B_r(0_{\bar p}) \subset T_{\bar p}\bar M \arrow[d, "\exp_{\bar p}"] \\
M \supset B_r(p) \arrow[r, dashed] & B_r(\bar p) \subset \bar M
\end{tikzcd} \ . \tag{2.1}$$

Für $r \le \rho(p)$ erhalten wir auf diese Weise eine Abbildung $F\colon U \to \bar U$. Falls die Schnittkrümmung von M kleiner oder gleich der von $\bar M$ ist, ist diese Abbildung kontrahierend. Wir beginnen mit einer Vorüberlegung.

2.6. Folgerung. *Seien (M,g) und $(\bar M, \bar g)$ vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten, seien Punkte $p \in M$, $\bar p \in \bar M$ gegeben, sei $r > 0$ nicht größer als der konjugierte Radius von $\bar p$ in $\bar M$, und sei $\Phi\colon T_pM \to T_{\bar p}\bar M$ eine lineare Isometrie. Für alle $v \in B_r(0_p)$ sei $K(E) \le K(\bar E)$ für alle Ebenen $E \subset T_{\exp_p v}M$ und $\bar E \subset T_{\exp_{\bar p}(\Phi(v))}\bar M$. Sei $\gamma\colon [a,b] \to B_r(0_p)$ eine Kurve in T_pM, dann gilt*

$$L(\exp_p \circ \gamma) \ge L(\exp_{\bar p} \circ \Phi \circ \gamma) \ .$$

Es würde hier reichen, Voraussetzungen nur an die Schnittkrümmungen derjenigen Ebenen in $T_{\exp_p v}M$ bzw. $T_{\exp_{\bar p}(\Phi(v))}\bar M$ zu stellen, die den Geschwindigkeitsvektor der Geodätischen c_v bzw. $c_{\Phi(v)}$ enthalten, aber wir wollen es mit der Allgemeinheit nicht übertreiben.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass

$$\left\|\frac{d}{dt}(\exp_p \circ \gamma)(t)\right\| \ge \left\|\frac{d}{dt}(\exp_{\bar p} \circ \Phi \circ \gamma)(t)\right\|$$

für alle $t \in [a,b]$. Wir fixieren also t und betrachten die Geodätischen $c\colon [0, \|\gamma(t)\|] \to M$ von p nach $\exp_p(\gamma(t))$ und $\bar c\colon [0, \|\gamma(t)\|] \to \bar M$ von $\bar p$ nach $\exp_{\bar p}(\Phi(\gamma(t)))$ mit

$$c(s) = \exp_p\left(\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right) \qquad \text{und} \qquad \bar c(s) = \exp_{\bar p}\left(\Phi\left(\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right)\right) \ .$$

Entlang dieser Geodätischen betrachten wir die Jacobifelder

$$\begin{aligned}
X(s) &= d_{\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}} \exp_p\biggl(\frac{s\,\dot\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\biggr)\\
&= s\,d_{\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}} \exp_p\biggl(\frac{\dot\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|} - \frac{\langle\dot\gamma(t),\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^3}\,\gamma(t)\biggr) + \frac{s\,\langle\dot\gamma(t),\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^3}\,d_{\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}} \exp_p(\gamma(t))\\
&= Y(s) + Z(s)
\end{aligned}$$

und analog

$$\bar X(s) = d_{\Phi\left(\frac{s\,\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\right)} \exp_{\bar p}\biggl(\Phi\biggl(\frac{s\,\dot\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}\biggr)\biggr) = \bar Y(s) + \bar Z(s)\;.$$

Dabei sind Y und Z ($\bar Y$ und $\bar Z$) nach dem Gauß-Lemma 1.89 der vertikale und der tangentiale Anteil von X (bzw. $\bar X$). Während

$$\|Z(s)\| = \frac{s\,\langle\dot\gamma(t),\gamma(t)\rangle}{\|\gamma(t)\|^2} = \|\bar Z(s)\|\;,$$

gilt $Y(0) = \bar Y(0) = 0$ und $\dot{\bar Y}(0) = \Phi\bigl(\dot Y(0)\bigr)$.

Da $\|\gamma(t)\| < r$ kleiner als der konjugierte Radius von $\bar p$ in $\bar M$ ist, dürfen wir den Vergleichssatz von Rauch anwenden und erhalten

$$\|Y(s)\| \ge \|\bar Y(s)\| \qquad \text{für alle } s \in [0, \|\gamma(t)\|]\;,$$

also auch

$$\|X(s)\|^2 = \|Y(s)\|^2 + \|Z(s)\|^2 \ge \|\bar Y(s)\|^2 + \|\bar Z(s)\|^2 = \|\bar X(s)\|^2\;.$$

Für $s = \|\gamma(t)\|$ erhalten wir insbesondere

$$\begin{aligned}
\biggl\|\frac{d}{dt}(\exp_p\circ\gamma)(t)\biggr\| &= \bigl\|d_{\gamma(t)}\exp_p(\dot\gamma(t))\bigr\| = \bigl\|X(\|\gamma(t)\|)\bigr\|\\
&\ge \bigl\|\bar X(\|\gamma(t)\|)\bigr\| = \bigl\|d_{\Phi(\gamma(t))}\exp_p(\Phi(\dot\gamma(t)))\bigr\| = \biggl\|\frac{d}{dt}(\exp_{\bar p}\circ\Phi\circ\gamma)(t)\biggr\|\;. \qquad \square
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zu der vor Folgerung 2.6 angedeuteten Aussage.

2.7. Definition. Eine Abbildung $F\colon (X,d) \to (\bar X,\bar d)$ zwischen metrischen Räumen heißt *kontrahierend* oder eine *Kontraktion,* wenn für alle x, $y \in X$ gilt, dass

$$d(x,y) \ge \bar d(F(x),F(y))\;.$$

2.8. Folgerung. *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 2.6 sei außerdem* $0 < r \le \rho(p)$. *Dann ist die Abbildung*

$$\exp_{\bar p}\circ\Phi\circ\exp_p^{-1}\colon B_{\frac r2}(p) \to B_{\frac r2}(\bar p)$$

wohldefiniert und kontrahierend.

Beweis. Sei $F\colon B_r(p) \to B_r(\bar p)$ die obige Abbildung, vergleich (2.1). Dann ist F wohldefiniert, da $\exp_p\colon B_r(0_p) \to B_r(p)$ wegen $r \le \rho(p)$ invertierbar ist.

Seien nun zwei Punkte q_1, $q_2 \in B_{\frac r2}(p)$ gegeben, und sei $c\colon [0,L] \to B_r(p) \subset M$ eine kürzeste Geodätische von q_1 nach q_2. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$L = d(q_1,q_2) \le d(q_1,p) + d(p,q_2) < r\;,$$

während jede Kurve, die $B_r(p)$ verlässt, länger als r ist, siehe Beweis von Folgerung 1.90. Somit verläuft c in $B_r(p)$.

Also existiert eine Kurve $\gamma\colon [0,L] \to B_r(0_p) \subset T_pM$ mit $c(t) = \exp_p(\gamma(t))$ für alle $t \in [0,L]$. Die Kurve $\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \gamma$ verbindet $F(q_1)$ und $F(q_2)$. Wegen Folgerung 2.6 gilt

$$\bar{d}(F(q_1), F(q_2)) \leq L(\exp_{\bar{p}} \circ \Phi \circ \gamma) \leq L(\exp_p \circ \gamma) = L(c) = d(q_1, q_2) ,$$

mithin ist F kontrahierend. □

2.9. Beispiel. Wir geben ein Beispiel dafür, dass in Folgerung 2.8 nur Bälle vom Radius $\frac{\rho(p)}{2}$ betrachtet werden dürfen. Dazu sei etwa $M = \mathbb{R}P^n$, und sei $\bar{M} = M^n_\kappa$ die Sphäre mit Radius $\frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ und konstanter Schnittkrümmung κ, wobei $1 \leq \kappa < 4$. Nach Übung 4 von Blatt 9 ist $\rho(p) = \frac{\pi}{2}$ für alle $p \in \mathbb{R}P^n$. Wähle $v \in S_pM$ und $\frac{\pi}{4} < L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$. Dann gilt

$$d\bigl(c_v(L), c_v(-L)\bigr) = d\bigl(c_v(L), c_v(\pi - L)\bigr) = \pi - 2L ,$$

wobei die kürzeste Geodätische gerade durch $c_v|_{[L,\pi-L]}$ gegeben ist.

Sei entsprechend $\bar{p} \in M^n_\kappa$ und $\bar{v} \in S_{\bar{p}}M^n_\kappa$. Da $L < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}$, liegen die Punkte $\exp_{\bar{p}}(\pm L\bar{v})$ in der Hemisphäre um den Punkt $\bar{p}$, und die kürzeste Geodätische dazwischen ist $\bar{c}_{\bar{v}}|_{[-L,L]}$. Also folgt

$$d\bigl(F(c_v(L)), F(c_v(-L))\bigr) = d\bigl(\bar{c}_{\bar{v}}(L), \bar{c}_{\bar{v}}(-L)\bigr) = 2L > \pi - 2L = d\bigl(c_v(L), c_v(-L)\bigr) ,$$

und F ist nicht mehr kontrahierend für Radien $r > \frac{\rho(p)}{2} = \frac{\pi}{4}$.

2.10. Bemerkung. Wir interpretieren Folgerung 2.8 als Vergleichssatz für kleine Dreiecke. In Abschnitt 2.4 werden wir dieses Argument ausbauen zum Vergleichssatz 2.41 von Toponogov für Dreiecke beliebiger Größe.

Wir betrachten die Konstruktionsaufgabe SWS aus der elementaren Geometrie. Unter den Voraussetzungen von Folgerung 2.8 wählen wir Dreiecke in M und $\bar{M}$, mit Ecken A, B, C und $\bar{A} = F(A)$, $\bar{B} = F(B)$, $\bar{C} = F(C)$, wobei $C = p$ und $\bar{C} = \bar{p}$ gelte. Dann haben die Dreiecke ΔABC und $\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$ den gleichen Winkel γ bei C bzw. $\bar{C}$ und die gleichen Seiten $a = d(B,C) = d(\bar{B},\bar{C}) \leq \frac{r}{2}$ und $b = d(A,C) = d(\bar{A},\bar{C}) \leq \frac{r}{2}$, aber es gilt $c = d(A,B) \geq \bar{c} = d(\bar{A},\bar{B})$.

Das Argument aus dem Beweis von Folgerung 2.8 lässt sich noch ein bisschen verallgemeiern: der obige Vergleichssatz gilt immer noch, falls $a + b \leq r$ gilt, denn dann verläuft die Seite c immer noch ganz in $\overline{B_r(p)}$.

Aus dem Vergleichssatz von Rauch folgt unmittelbar eine sehr starke Aussage über die Topologie von Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkümmung.

2.11. Satz (Hadamard-Cartan). *Sei (M,g) eine vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \leq 0$, und sei $p \in M$. Dann ist $\exp_p\colon T_pM \to M$ eine universelle Überlagerung.*

Beweis. Wir setzen $\bar{M} = T_pM$ und $\bar{p} = 0_p$. Da (T_pM, g_p) ein Euklidischer Vektorraum ist, gibt es keine konjugierten Punkte in $\bar{M}$. Aus dem Satz von Rauch folgt, dass Jacobifelder in M nicht langsamer wachsen als in T_pM, insbesondere gibt es in M dann ebenfalls keine zu p konjugierten Punkte. Nach Bemerkung 1.108 ist also $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus.

Wenn $\exp_p$ ein lokaler Diffeomorphismus ist, dann ist die zurückgeholte Metrik $\exp_p^* g$ mit

$$(\exp_p^* g)_v(x,y) = g_{\exp_p v}(d_v \exp_p(x), d_v \exp_p(y))$$

nirgends ausgeartet. Die Exponentialabbildung von $(T_pM, \exp_p^* g)$ am Punkt 0_p ist gerade die Identität auf $T_pM = T_{0_p}T_pM$, wie im folgenden Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T_{0_p}T_pM & \xrightarrow[\sim]{\mathrm{id}} & T_pM \\ {\scriptstyle \exp_{0_p}}\Big\downarrow{\scriptstyle =\mathrm{id}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} \\ (T_pM, \exp_p^* g) & \xrightarrow{\exp_p} & (M, g) \ . \end{array}$$

Daher ist die Riemannsche Mannigfaltigkeit $(T_pM, \exp_p^* g)$ nach dem Satz 1.95 von Hopf und Rinow vollständig. Nach Lemma 1.118 ist exp daher eine Überlagerung. Da T_pM einfach zusammenhängend ist, ist $\exp_p \colon T_pM \to M$ eine universelle Überlagerung. ☐

2.12. Beispiel. Zu den Mannigfaltigkeiten mit nichtpositiver Schnittkrümmung gehören etwa die S^1, die Tori $T^n = (S^1)^n$, sowie alle hyperbolischen Mannigfaltigkeiten, also z.B. die hyperbolischen Flächen aus Beispiel 1.138, siehe dazu auch Satz 1.136.

2.13. Bemerkung. Die Aussage des Satzes von Hadamard-Cartan ist stärker als sie auf den ersten Blick aussehen mag. Sie besagt, dass eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit nichtpositiver Schnittkrümmung ein $K(\pi, 1)$ ist, und damit bis auf Homotopieäquivalenz durch die Fundamentalgruppe $\pi_1(M, p)$ eindeutig bestimmt wird. Insbesondere lassen sich zahlreiche wichtige topologische Invarianten allein aus $\pi_1(M, p)$ ausrechnen. Dazu gehört unter anderem die (Ko-)Homologie von M mit beliebigen Koeffizienten, etwa auch die de Rham-Kohomologie. Wenn M kompakt ist, legt die (Ko-)Homologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, und damit die Fundamentalgruppe, die Dimension von M fest.

Zum Vergleich: die Sphären S^n mit $n \geq 2$ haben alle die gleiche Fundamentalgruppe $\{e\}$ und sind ebenfalls kompakt, aber ihre Dimensionen sind verschieden.

Außerdem ist die Fundamentalgruppe stets unendlich, wenn M selbst kompakt ist. Denn sei $\pi \colon \tilde{M} \to M$ die universelle Überlagerung. Da ein kompaktes M endlichen Durchmesser hat, folgt für $R > \operatorname{diam}(M)$ und $p \in M$ also

$$\tilde{M} = \pi^{-1}(M) = \pi^{-1}(B_R(p)) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}\{p\}} B_R(\tilde{p}) \ .$$

Aber $\exp_{\tilde{p}} T_p\tilde{M}$ ist sicher nicht in einer endlichen Vereinigung von Bällen mit endlichem Radius enthalten, folglich ist $\pi^{-1}\{p\}$ und damit auch $\pi_1(M, p)$ unendlich.

2.2. Ricci-Krümmung und Volumenvergleich

Wir betrachten jetzt die Ricci-Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Eine untere Schranke an die Ricci-Krümmung liefert uns eine obere Schranke an das Volumenwachstum von Riemannschen Bällen. Hieraus lassen sich interessante Volumen- und Durchmesser-Abschätzungen ableiten.

Sei ric_p die Ricci-Krümmung von (M, g) am Punkt p. Wir schreiben

$$\mathrm{ric}_p \geq c\, g_p \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{ric}_p(v, v) \geq c\, g_p(v, v) \qquad \text{für alle } v \in T_pM \ ,$$

und $\mathrm{ric} \geq c\, g$, wenn das für alle $p \in M$ gilt.

2.14. Satz (Bonnet, Myers). *Sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric} \geq (n-1)\,\kappa\, g$ für ein $\kappa > 0$. Dann gilt $\operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Insbesondere ist M kompakt und hat endliche Fundamentalgruppe.*

Somit ist die Situation hier bereits völlig anders als bei nichtpositiver Schnittkrümmung, siehe Bemerkung 2.13.

Beweis. Es sei c eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische in M, und es sei $\ell = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Wir wollen zeigen, dass die Indexform $I_{c|_{[0,\ell]}}$ nicht positiv definit ist. Nach Proposition 2.4 folgt daraus nämlich, dass $c(t)$ zu $c(0)$ konjugiert ist für ein $t \in \bigl[0, \ell\bigr]$. Nach Proposition 1.110 folgt, dass $c|_{[0,L]}$ keine kürzeste Geodätische ist für $L > \ell$. Wenn aber keine kürzeste Geodätische länger als ℓ sein kann, dann ist der Durchmesser von M höchstens ℓ.

Es seien $e_1, \dots, e_n$ eine Orthonormalbasis aus parallelen Vektorfelder längs c mit $\dot c = e_1$. Für $i = 2, \dots, n$ betrachte Vektorfelder $V_i \in \mathfrak{X}''(c|_{[0,\ell]})$ mit

$$V_i(t) = \sin(\sqrt{\kappa}\, t)\, e_i(t) \;.$$

Wir wollen zeigen, dass bereits $I_{c|_{[0,\ell]}}$ nicht positiv definit ist. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^n I_{c|_{[0,\ell]}}(V_i, V_i) &= \int_0^\ell \sum_{i=2}^n \Bigl(\bigl\| \sqrt{\kappa}\, \cos(\sqrt{\kappa}\, t)\, e_i(t) \bigr\|^2 - \bigl\langle R_{\sin(\sqrt{\kappa}\, t) e_i, e_1} e_1, \sin(\sqrt{\kappa}\, t) e_i \bigr\rangle \Bigr)\, dt \\
&= \int_0^\ell \bigl((n-1)\, \kappa\, \cos(\sqrt{\kappa}\, t)^2 - \sin(\sqrt{\kappa}\, t)^2\, \mathrm{ric}(e_1, e_1) \bigr)\, dt \\
&\le (n-1)\, \kappa \int_0^\ell \bigl(\cos(\sqrt{\kappa}\, t)^2 - \sin(\sqrt{\kappa}\, t)^2 \bigr)\, dt \\
&= (n-1)\, \kappa \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}} \cos(2\sqrt{\kappa}\, t)\, dt = 0 \;.
\end{aligned}$$

Da $\operatorname{diam}(M)$ endlich ist, ist M nach dem Satz 1.95 von Hopf und Rinow kompakt. Sei $\pi \colon \tilde M \to M$ eine universelle Riemannsche Überlagerung, dann erfüllt auch $\tilde M$ die Voraussetzungen dieses Satzes, ist also kompakt. Für $p \in M$ und $\tilde p \in \pi^{-1}(p) \in \tilde M$ besitzt die Teilmenge

$$\pi^{-1}\{p\} = \bigl\{\, \gamma(p) \bigm| \gamma \in \pi_1(M, p) \,\bigr\} \subset \tilde M$$

keinen Häufungspunkt, da $\pi_1(M, p)$ nach Satz 1.130 (1) eigentlich diskontinuierlich operiert. Da $\tilde M$ kompakt ist, muss $\pi^{-1}\{p\}$ endlich sein. Da $\pi_1(M, p)$ frei operiert, ist dann auch $\pi_1(M, p)$ endlich. $\square$

2.15. Bemerkung. Die Abschätzung im Satz von Bonnet-Myers ist optimal, denn für die Sphäre M^n_κ mit Schnittkrümmung $\kappa > 0$ gilt

$$\mathrm{ric} = (n-1)\, \kappa\, g \qquad \text{und} \qquad \operatorname{diam}(M^n_\kappa) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \;.$$

Wir werden in Satz 2.21 sehen, dass umgekehrt eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit $\mathrm{ric} \ge (n-1)\, \kappa\, g$ und $\operatorname{diam}(M) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ für ein $\kappa > 0$ bereits isometrisch zu M^n_κ ist.

Das Hauptaugenmerk in diesem Abschnitt richtet sich auf Volumina von Teilmengen in Mannigfaltigkeiten. Wir wiederholen die relevante Definition 3.24 aus dem letzten Semester.

2.16. Definition. Sei (M, g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, sei $\varphi \colon U^\varphi \to V^\varphi$ eine Karte, und sei $h \colon M \to [0, \infty)$ eine Funktion. Falls $h \circ \varphi^{-1}$ integrierbar ist, definieren wir das (*Volumen-*) *Integral* von h über U^φ als

$$\int_{U^\varphi} h\, \mathrm{dvol}_g = \int_{V^\varphi} (h \circ \varphi^{-1})\, \mathrm{dvol}^\varphi_g = \int_{V^\varphi} h(\varphi^{-1}(x))\, \det(g^\varphi_x)^{\frac{1}{2}}\, dx^1 \dots dx^n \;.$$

Dabei heißt $d\mathrm{vol}^\varphi_g = \det(g^\varphi_x)^{\frac{1}{2}}$ das *Volumenelement* von (M, g) in der Karte φ.

Sei jetzt $\mathcal{A} = \{\, \varphi_i \colon U_i \to V_i \mid i \in I \,\}$ ein Atlas von M und $(\psi_i)_{i \in I}$ eine untergeordenete Partition der Eins, siehe Abschnitt 1.2. Wenn die folgenden Integrale existieren und ihre Summe konvergiert, dann heißt $h\colon M \to [0,\infty)$ *integrierbar* und

$$\int_M h\, d\mathrm{vol}_g = \sum_{i\in I} \int_{U_i} \psi_i \cdot h\, d\mathrm{vol}_g$$

das (*Volumen-*) *Integral* von h über M. Für beliebige $h\colon M \to \mathbb{R}$ schreibe $h = h^+ - h^-$ mit $h^\pm = \max(0, \pm h)\colon M \to [0,\infty)$. Dann heißt h *integrierbar,* wenn h^+ und h^- integrierbar sind, mit

$$\int_M h\, d\mathrm{vol}_g = \int_M h^+\, d\mathrm{vol}_g - \int_M h^-\, d\mathrm{vol}_g \;.$$

Sei schließlich $A \subset M$ eine Teilmenge und sei $1_A\colon M \to \{0,1\}$ die Indikatorfunktion von A. Falls 1_A integrierbar ist, ist das (*n-dimensionale*) *Volumen* von A definiert als

$$\mathrm{vol}(A) = \int_M 1_A\, d\mathrm{vol}_g \;.$$

Aus der Integraltransformationsformel folgt, dass $\int_M h\, d\mathrm{vol}_g$ weder vom Atlas noch von der gewählten Partition der Eins abhängt.

2.17. Bemerkung. Wir erinnern uns an ein paar Rechenregeln aus der linearen Algebra.

(1) Auf den symmetrischen reellen $n \times n$-Matrizen definiert $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB)$ ein Skalarprodukt. Aus der Cauchy-Schwartzschen Ungleichung folgt
$$\mathrm{tr}(A)^2 = \langle A, E_n\rangle^2 \le \langle A, A\rangle\langle E_n, E_n\rangle = n\ \mathrm{tr}(A^2)$$
für alle symmetrischen Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$.

(2) Sei $A(t)$ eine Familie invertierbarer Matrizen. Aus
$$0 = \frac{d}{dt}\big(A(t)\, A(t)^{-1}\big) = \dot A(t)\, A(t)^{-1} + A(t)\, \frac{d}{dt}\big(A(t)^{-1}\big)$$
folgt
$$\frac{d}{dt}\big(A(t)^{-1}\big) = -A(t)^{-1} \cdot \dot A(t) \cdot A(t)^{-1} \;.$$

(3) Sei $A\colon I \to GL_n(\mathbb{R})$ eine Familie invertierbarer reeller Matrizen, wobei $I \subset \mathbb{R}$. Es sei $\mathrm{adj}\, A$ die Adjunkte von A, dann gilt
$$\frac{d}{dt}\det(A(t)) = \mathrm{tr}\big(\mathrm{adj}\, A(t) \cdot \dot A(t)\big) = \det(A(t))\ \mathrm{tr}\big(A(t)^{-1}\, \dot A(t)\big) \;.$$

Im folgenden Satz wollen wir das Volumenelement in Normalkoordinaten abschätzen. Für eindimensionale Mannigfaltigkeiten sind Normalkoordinaten das gleiche wie Parametrisierungen nach Bogenlänge s, und das Volumenelement ist ds. Somit interessieren uns jetzt nur noch Mannigfaltigkeiten der Dimension ≥ 2.

Die Ricci-Krümmung $\mathrm{ric}(v,v)$ ist eine Art Mittelwert der Schnittkrümmung aller Ebenen E durch den Vektor v. Wir könnten erwarten, dass eine Schranke an die Ricci-Krümmung so etwas wie eine Schranke an das „gemittelte“ Wachstum von Jacobi-Feldern liefert. Der folgende Satz zeigt, dass das in gewissem Sinne sogar möglich ist.

2.18. Satz (Bishop). *Sei (M,g) eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \ge 2$, sei $p \in M$, und sei $c(t) = \exp_p(tv)$ eine Geodätische mit Startvektor $v \in S_pM$. Sei $k(t) = \frac{1}{n-1}\,\mathrm{ric}(\dot c(t), \dot c(t))$, und sei $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Lösung der Differentialgleichung*

$$\ddot h + kh = 0 \qquad \textit{mit} \qquad h(0) = 0 \qquad \textit{und} \qquad \dot h(0) = 1 \;.$$

Ferner sei

$$a(t) = \det\Big(g_{tv}^{\exp_p^{-1}}\Big)^{\frac12} \;, \qquad \textit{so dass} \qquad d\mathrm{vol}_g^{\exp_p^{-1}}\big|_{tv} = a(t)\, dx^1 \cdots dx^n \;.$$

Dann gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot a(t)}{a(t)} \le (n-1)\,\frac{\dot h(t)}{h(t)} \qquad \textit{und} \qquad t^{n-1}\,a(t) \le h(t)^{n-1}$$

für alle $t > 0$ kleiner als die kleinste positive Nullstelle t_0 von a, also bis zum ersten konjugierten Punkt auf c_v. Falls in einer der beiden Gleichungen bei t Gleichheit gilt, so folgt $K(E) = k(s)$ für alle $s \in [0, t]$ und alle Ebenen $E \subset T_{c(s)}M$ mit $\dot c(s) \subset E$.

Beweis. Entlang von c betrachten wir parallele Vektorfelder $e_1, \ldots, e_n \in \mathfrak{X}(c)$ mit $e_n = \dot c$ so dass $e_1(t), \ldots, e_n(t)$ für alle t eine Orthonormalbasis von $T_{c(t)}M$ bilden. Außerdem betrachten wir Jacobifelder $V_1, \ldots, V_{n-1} \in \mathfrak{X}'(c)$ mit den Anfangsbedingungen

$$V_i(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \dot V_i(0) = e_i(0)$$

für alle $i = 1, \ldots, n-1$.

Wir definieren eine Familie von Matrizen $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R})$, so dass

$$V_j(t) = \sum_{i=1}^{n-1} a_{ij}\, e_i(t)\ .$$

Der Krümmungstensor liefert eine Familie symmetrischer Matrizen

$$R(t) = (r_{ij}(t))_{i,j} = (R_{e_i(t), e_n(t)} e_n(t), e_j(t))_{i,j} \in M_{n-1}(\mathbb{R})\ .$$

Da die Felder e_i parallel sind, folgt aus der Jacobigleichung

$$0 = \ddot V_j(t) + R_{V_j(t), e_n(t)} e_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \ddot a_{ij}(t)\, e_i(t) + \sum_{i,k=1}^{n-1} r_{ik} a_{kj}\, e_i(t)\ ,$$

durch Koeffizientenvergleich also

$$\ddot A + R \cdot A = 0 \qquad \text{mit } A(0) = 0 \text{ und } \dot A(0) = E_n\ .$$

Wir wählen $e_1 = e_1(0), \ldots, e_n = e_n(0)$ als Orthonormalbasis von T_pM bezüglich g_p, also gilt $e_n = v$. Nach Bemerkung 1.82 gilt

$$d_{tv} \exp_p(e_n) = \dot c(t) = e_n(t) \qquad \text{und} \qquad d_{tv} \exp_p(e_i) = \frac{1}{t}\, d_{tv} \exp_p(te_i) = \frac{1}{t}\, V_i(t)$$

für $i = 1, \ldots, n-1$. In Normalkoordinaten $\varphi = \exp_p^{-1}$ gilt somit

$$\begin{aligned} a(t) = \det\Bigl(g_{tv}^{\exp_p^{-1}}\Bigr)^{\frac{1}{2}} &= \det \begin{pmatrix} \frac{\langle V_1(t), V_1(t)\rangle}{t^2} & \cdots & \frac{\langle V_1(t), V_{n-1}(t)\rangle}{t^2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{\langle V_{n-1}(t), V_1(t)\rangle}{t^2} & \cdots & \frac{\langle V_{n-1}(t), V_{n-1}(t)\rangle}{t^2} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \\ &= t^{1-n}\, \det(A(t)^* A(t))^{\frac{1}{2}} = t^{1-n}\, \det(A(t))\ . \end{aligned}$$

Wir setzen $B(t) = \dot A(t) \cdot A(t)^{-1}$, dann gilt

$$\frac{d}{dt} \log \det(A(t)) = \operatorname{tr}(B(t))$$

nach Bemerkung 2.17 (3). Die Matrizen $B(t)$ sind symmetrisch. Denn sei $c(t_0)$ nicht zu $c(0)$ längs c konjugiert, dann existieren Jacobifelder W_1, W_{n-1} mit $W_i(0) = 0$ und $W_i(t_0) = e_i$. Insbesondere sei $A^{-1} = (a^{ij})_{ij}$, dann gilt

$$W_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a^{ji}(t_0)\, V_j(t) = \sum_{j,k=1}^{n-1} a_{jk}(t) a^{ki}(t_0)\, e_j(t) \ .$$

Insbesondere schließen wir daraus, dass

$$\begin{aligned} b_{ij}(t_0) &= \langle \dot W_j(t_0), e_i(t_0) \rangle = \langle \dot W_j(t_0), W_i(t_0) \rangle \\ &= \int_0^{t_0} \big(\langle \dot W_j(t), \dot W_i(t) \rangle + \langle \ddot W_j(t), W_i(t) \rangle \big)\, dt \\ &= \int_0^{t_0} \big(\langle \dot W_i(t), \dot W_j(t) \rangle - \langle R_{W_i(t), \dot c(t)} \dot c(t), W_j(t) \rangle \big)\, dt = b_{ji}(t_0) \ . \end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 2.17 (2) erfüllt B die *Riccati-Gleichung*

$$\dot B = \ddot A \cdot A^{-1} - \dot A \cdot (A^{-1} \dot A A^{-1}) = -R - B^2 \ .$$

Wir bilden die Spur und wenden Bemerkung 2.17 (1) an, das liefert

$$\operatorname{tr}(\dot B) = - \underbrace{\operatorname{tr}(R)}_{= \operatorname{ric}(\dot c, \dot c)} - \operatorname{tr}(B^2) \le -(n-1)\, k - \frac{\operatorname{tr}(B)^2}{n-1} \ .$$

Wir beweisen jetzt die erste Aussage des Satzes. Dazu definieren wir eine Funktion

$$f(t) = (n-1)\, \frac{\dot h(t)}{h(t)} - \frac{n-1}{t} - \frac{\dot a(t)}{a(t)} \ .$$

Zu zeigen ist $f(t) \ge 0$ bis zur ersten Nullstelle von $a(t)$.

Nach Proposition 1.84 gilt bezüglich der Basis $e_1, \dots, e_n$ von T_pM, dass

$$a(0) = \det\Big(g_{ij}^{\exp_p^{-1}} \Big)^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \dot a(0) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}\bigg(\frac{\partial g_{ij}^{\exp_p^{-1}}}{\partial x^n} (0_p) \bigg) = 0 \ .$$

Wegen $\ddot h(0) = -k(0) h(0) = 0$ liefert die Taylorentwicklung, dass

$$\lim_{t \searrow 0} f(t) = \lim_{t \searrow 0} \bigg((n-1)\, \frac{1 + O(t^2)}{t + O(t^3)} - \frac{n-1}{t} - \frac{O(t)}{1 + O(t^2)} \bigg) = 0 \ .$$

Wie oben gesehen, gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot a(t)}{a(t)} = \frac{d}{dt} \log\big(t^{n-1}\, a(t) \big) = \frac{d}{dt} \log \det(A(t)) = \operatorname{tr}(B(t)) \ ,$$

insbesondere

$$f = (n-1)\, \frac{\dot h}{h} - \operatorname{tr}(B) \ .$$

Mit Hilfe der Differential- (un-) gleichungen für $\operatorname{tr}(B(t))$ und h erhalten wir jetzt

$$\begin{aligned} \dot f(t) &= \frac{d}{dt} \bigg((n-1)\, \frac{\dot h(t)}{h(t)} - \operatorname{tr}(B(t)) \bigg) = (n-1)\, \frac{\ddot h(t)\, h(t) - \dot h(t)^2}{h(t)^2} - \operatorname{tr}(\dot B(t)) \\ &\ge \frac{\operatorname{tr}(B(t))^2}{n-1} - (n-1)\, \frac{\dot h(t)^2}{h(t)^2} = -f(t) \bigg(\frac{\dot h}{h} + \frac{\operatorname{tr}(B)}{n-1} \bigg) \ . \end{aligned}$$

Um diese Differentialungleichung besser zu verstehen, wollen wir die Funktion $\frac{\dot h}{h} + \frac{\mathrm{tr}(B)}{n-1}$ als gegeben annehmen. Beachte, dass wir aufgrund der Taylorentwicklungen

$$h(t) = h(0) + t\,\dot h(0) + \frac{t^2}{2}\,\ddot h(0) + O(t^3) = t + O(t^3)$$

$$\text{und} \qquad A(t) = A(0) + \dot A(0) + \frac{t^2}{2}\,\ddot A(0) + O(t^3) = tE_n + O(t^3)$$

das Verhalten dieser Funktion nahe 0 durch

$$\frac{\dot h}{h} + \frac{\mathrm{tr}(\dot A\,A^{-1})}{n-1} = \frac{2}{t} + O(t) > 0$$

beschreiben können. Sei $t_0 \in (0,\infty]$ die kleinste positive Nullstelle von h oder von a, je nachdem, welche zuerst eintritt. Dann gilt

$$\lim_{t\searrow 0}\left(\frac{\dot h}{h} + \frac{\mathrm{tr}(B)}{n-1}\right) = \lim_{t\searrow 0}\frac{d}{dt}\left(\log h(t) + \frac{\log\det A(t)}{n-1}\right) = \infty$$

$$\text{und} \qquad \lim_{t\nearrow t_0}\left(\frac{\dot h}{h} + \frac{\mathrm{tr}(B)}{n-1}\right) = \lim_{t\nearrow t_0}\frac{d}{dt}\left(\log h(t) + \frac{\log\det A(t)}{n-1}\right) = -\infty \qquad \text{falls } t_0 < \infty$$

Wir machen die folgenden Beobachtungen.

(1) Es könnte sein, dass $f|_{(0,t_0)} = 0$ gilt. In diesem Fall gilt im Satz Gleichheit.

(2) Falls $f(t) > 0$ für ein $t \in (0,t_0)$, so schreiben wir die obige Ungleichung in einer Umgebung von t um als
$$\frac{d\log f(t)}{dt} \geq -\frac{\dot h}{h} - \frac{\mathrm{tr}(B)}{n-1}\ .$$
Man sieht leicht, dass $\lim_{s\nearrow t_1}\log f(s) = -\infty$ für $t_1 \in (t,t_0)$ nicht möglich ist, also folgt $f > 0$ auf (t,t_0). Also — wenn f ab einem t positiv ist, bleibt es das bis zur Zeit t_0.

(3) Wir drehen das Argument unter (2) um. Wenn $f(t) < 0$ für ein $t \in (0,t_0)$, so schreiben wir
$$\frac{d\log(-f(t))}{dt} \leq -\frac{\dot h}{h} - \frac{\mathrm{tr}(B)}{n-1}\ .$$
Jetzt folgern wir, dass $\lim_{s\searrow t_1}\log(-f(s)) = -\infty$ für $t_1 \in (0,t)$ nicht möglich ist, also folgt $f < 0$ auf $(0,t)$. Da $\frac{\dot h(t)}{h(t)} + \frac{\mathrm{tr}(B(t))}{n-1} = \frac{2}{t} + O(t)$ für kleine t positiv ist, kann $\log(-f(s))$ für $s \to 0$ nicht gegen $-\infty$ konvergieren, also kann f nicht gegen 0 konvergieren — im Widerspruch zu unser Anfangsbedingung.

Wegen (3) gilt $f \geq 0$ auf $[0,t_0)$, was zu zeigen war.

Die zweite Behauptung des Satzes folgt aus der ersten, da

$$\lim_{t\to 0}\frac{t^{n-1}a(t)}{h(t)^{n-1}} = \lim_{t\to 0}\frac{t^{n-1}a(t)}{t^{n-1}\dot h(t)^{n-1}} = 1$$

und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^{n-1}a(t)}{h(t)^{n-1}}\right) = \frac{t^{n-1}a(t)}{h(t)^{n-1}}\left(\frac{n-1}{t} + \frac{\dot a(t)}{a(t)} - (n-1)\,\frac{\dot h(t)}{h(t)}\right) \leq 0$$

bis zur ersten Nullstelle von a oder von h. Es folgt, dass die erste Nullstelle von a nicht kleiner als die erste Nullstelle von h sein kann, was die Abschätzungen beweist.

Falls bei $0 < t < t_0$ in einer der beiden obigen Abschätzungen Gleichheit gilt, so muss $f|_{[0,t]} = 0$ wegen (2) gelten, und es folgt insbesondere $\mathrm{tr}(B(s))^2 = (n-1)\,\mathrm{tr}(B(s)^2)$, woraus folgt, dass $B(s)$

für alle $s \in [0,t]$ jeweils ein Vielfaches der Einheitsmatrix ist. Wegen der obigen Differentialgleichung $\dot B = -R - B^2$ gilt das dann auch für

$$R(s) = \big(\langle R_{e_i(s),\dot c(s)}\dot c(s), e_j(s)\rangle\big)_{i,j} ,$$

woraus sofort die Behauptung $K(E) = k(s)$ für alle Ebenen $E \in T_{c(s)}M$ mit $\dot c(s) \in E$ folgt. $\square$

Dieser Beweis lässt sich etwas geometrischer formulieren. Die Funktion $r^{n-1}\,a(t)$ beschreibt gerade das Volumenelement der Sphäre mit Radius t um p in M im Vergleich zum Volumenelement der Standardsphäre — das liegt daran, dass der radiale Vektor $\dot c(t)$ senkrecht auf dieser Sphäre steht und Länge 1 hat. Die Matrix B beschreibt den Weingarten-Operator und die zweite Fundamentalform dieser Abstandssphäre — das erklärt, warum B symmetrisch ist. Also ist $\operatorname{tr}(B)$ genau die mittlere Krümmung, und die Gleichung $\frac{d}{dt}\log\det(A(t)) = \operatorname{tr}(B(t))$ beschreibt die Volumenänderung paralleler Flächen. An den eigentlichen Rechnungen ändert diese Anschauung aber leider nichts.

2.19. Bemerkung. Der Satz von Bishop impliziert den Satz 2.14 von Bonnet-Myers, denn die erste positive Nullstelle t_0 der Funktion a ist nach Bemerkung 1.108 gerade der erste konjugierte Punkt längs der Geodätischen c. Falls $\kappa > 0$ konstant ist, gilt

$$h(t) = s_\kappa(t) = \frac{\sin(\sqrt{\kappa}\,t)}{\sqrt{\kappa}} .$$

Aus dem obigen Satz folgt $t_0 \le \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, und daraus ergibt sich $\operatorname{diam}(M,g) \le \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ wie im Beweis des Satzes 2.14.

Wir geben jetzt eine weniger technische Anwendung der obigen Resultate.

2.20. Satz (Bishop-Gromov). *Es sei (M,g) eine n-dimensionale vollständige zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\operatorname{ric} \ge (n-1)\kappa\, g$ *für ein $\kappa \in \mathbb{R}$. Es sei $p \in M$ und $\bar p \in M^n_\kappa$, dann ist die Funktion*

$$r \mapsto \frac{\operatorname{vol} B_r(p)}{\operatorname{vol} B_r(\bar p)}$$

monoton nicht wachsend auf $(0,\infty)$ *mit Grenzwert* 1 *bei* $r = 0$. *Aus* $\operatorname{vol}B_r(p) = \operatorname{vol}B_r(\bar p)$ *folgt, dass die Bälle isometrisch sind.*

Somit wachsen Bälle in M langsamer als in der Vergleichsmannigfaltigkeit M^n_κ. Beachte, dass der Nenner nicht von $\bar p$ abhängt.

Beweis. Es sei $s\colon SM \to (0,\infty]$ die Funktion aus Definition 1.102, also

$$s(v) := \sup\big\{\, t > 0 \;\big|\; d\big(c_v(t), c_v(0)\big) = t \,\big\} \in (0,\infty] .$$

Diese Funktion ist stetig nach Lemma 1.112. Für den Modellraum setzen wir

$$\bar s = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} & \text{falls } \kappa > 0, \text{ und} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen des Satzes von Bonnet-Myers und Proposition 1.110 gilt

$$s(v) \le \bar s \qquad \text{für alle } v \in SM .$$

Betrachte die Teilmenge

$$V_r = \big\{\, tv \;\big|\; v \in S_pM, \text{ und } 0 \le t < \min(r, s(v)) \,\big\} \subset B_r(0_p) \subset T_pM .$$

Dann ist die Abbildung $\exp_p\colon V_r \to B_r(p)$ injektiv nach Proposition 1.105, und es gilt

$$\exp_p(V_r) \subset B_r(p) \subset \overline{B_r(p)} = \exp_p\big(\overline{V}_r\big) .$$

Hieraus schließen wir, dass

$$\begin{aligned}\mathrm{vol} B_r(p) &= \int_{V_r} \sqrt{\det\bigl(g_x^{\exp_p^{-1}}\bigr)}\, dx^1 \cdots dx^n = \int_{V_r} a_{\frac{x}{\|x\|}}(\|x\|)\, dx^1 \cdots dx^n \\ &= \int_{S_pM} \int_0^{\min(r,s(v))} t^{n-1} a_v(t)\, dt\, d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v)\ .\end{aligned}$$

Hier ist g^{sph} die euklidische Metrik auf der Einheitssphäre S_pM, und a_v ist die Funktion a aus Satz 2.18 zur Geodätischen c_v mit Startvektor $v \in S^pM$. Im letzten Schritt sind wir von kartesischen Koordinaten auf T_pM zu Polarkoordinaten übergegangen, daher der zusätzliche Faktor t^{n-1} aus der Integral-Transformationsformel. Die Schreibweise $d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v)$ gibt die Integrationsvariable an.

Für den Modellraum $M_n(\kappa)$ gilt Gleichheit im Satz 2.18 von Bishop, es folgt

$$\bar a(t) = t^{1-n}\, \bar h(t)^{n-1} = \left(\frac{s_\kappa(t)}{t}\right)^{n-1} ,$$

somit

$$\begin{aligned}\mathrm{vol} B_r(\bar p) &= \int_{S_{\bar p}M_\kappa^n} \int_0^{\min(r,\bar s)} s_\kappa(t)^{n-1}\, dt\, d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v) \\ &= \mathrm{vol} S^{n-1} \int_0^{\min(r,\bar s)} s_\kappa(t)^{n-1}\, dt = \int_{S_pM} \int_0^{\min(r,\bar s)} s_\kappa(t)^{n-1}\, dt\, d\mathrm{vol}_{g^{\mathrm{sph}}}(v)\ ,\end{aligned}$$

denn s_κ löst gerade die Differentialgleichung für h mit $k(t) = \kappa$ konstant.

Es seien k_v und h_v wie in Satz 2.18 zur Geodätischen c_v definiert. Es folgt $k_v(t) \geq \kappa$, und daher

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot s_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot h_v(t)}{h_v(t)}\right) &= \frac{\ddot s_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot s_\kappa(t)^2}{s_\kappa(t)^2} - \frac{\ddot h_v(t)}{h_v(t)} + \frac{\dot h_v(t)^2}{h_v(t)^2} \\ &= k_v(t) + \frac{\dot h_v(t)^2}{h_v(t)^2} - \kappa - \frac{\dot s_\kappa(t)^2}{s_\kappa(t)^2} \\ &\geq -\left(\frac{\dot s_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot h_v(t)}{h_v(t)}\right)\left(\frac{\dot s_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} + \frac{\dot h_v(t)}{h_v(t)}\right) .\end{aligned}$$

Als Startwerte erhalten wir

$$\lim_{t\searrow 0}\left(\frac{\dot s_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} - \frac{\dot h_v(t)}{h_v(t)}\right) = \lim_{t\searrow 0}\left(\frac{1+O(t^2)}{t+O(t^3)} - \frac{1+O(t^2)}{t+O(t^3)}\right) = 0\ .$$

Wie im Beweis des Satzes 2.18 folgt

$$\frac{\dot s_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} \geq \frac{\dot h_v(t)}{h_v(t)} \qquad \text{und} \qquad s_\kappa(t) \geq h_v(t)\ .$$

für alle t bis zur ersten Nullstelle von h_v. Wegen Bemerkung 2.19 gilt das insbesondere für alle $t \in (0, s(v))$.

Wir kombinieren das mit dem Satz 2.18 von Bishop und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \log \frac{t^{n-1}\, a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} &= \frac{d}{dt} \log \frac{t^{n-1}\, a_v(t)}{h_v(t)^{n-1}} + \frac{d}{dt} \log \frac{h_v(t)^{n-1}}{s_\kappa(t)^{n-1}} \\ &= \underbrace{\frac{n-1}{t} + \frac{\dot a_v(t)}{a_v(t)} - (n-1)\frac{\dot h_v(t)}{h_v(t)}}_{\leq 0} + \underbrace{(n-1)\frac{\dot h_v(t)}{h_v(t)} - (n-1)\frac{\dot s_\kappa(t)}{s_\kappa(t)}}_{\leq 0} \leq 0\end{aligned}$$

bis zur ersten Nullstelle von a_v, insbesondere für $t \in (0, s(v))$. Insbesondere ist also $\frac{t^{n-1}\,a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}}$ monoton nicht wachsend in r.

Es reicht zu zeigen, dass für jeden Vektor $v \in S_pM$ die Funktion

$$r \mapsto f_v(r) := \int_0^{\min(r,s(v))} t^{n-1}\,a_v(t)\,dt \Bigg/ \int_0^{\min(r,\bar{s})} s_\kappa(t)^{n-1}\,dt$$

monoton nicht steigt, denn dann gilt das gleiche auch nach Integration über S_pM. Nach Bemerkung 2.19 gilt im Falle $\kappa > 0$, dass

$$\frac{\mathrm{vol}B_r(p)}{\mathrm{vol}B_r(\bar{p})} = \frac{\mathrm{vol}M}{\mathrm{vol}M_\kappa^n} \qquad \text{für alle } r \geq \bar{s} = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \; .$$

Insbesondere dürfen wir also $r \leq \bar{s}$ annehmen.

Wir betrachten die Funktion $f_v(r)$ zunächst auf dem Intervall $(0, s(v)]$. Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt hier

$$\begin{aligned}
\frac{df_v(r)}{dr} &= \left(r^{n-1}\,a_v(r) \int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\,dt - s_\kappa(r)^{n-1} \int_0^r t^{n-1}\,a_v(t)\,dt \right) \Bigg/ \left(\int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\,dt \right)^2 \\
&= \int_0^r \underbrace{\left(\frac{r^{n-1}\,a_v(r)}{s_\kappa(r)^{n-1}} - \frac{t^{n-1}\,a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} \right)}_{\leq 0} s_\kappa(t)^{n-1}\,s_\kappa(r)^{n-1}\,dt \Bigg/ \left(\int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\,dt \right)^2 \leq 0 \; .
\end{aligned}$$

Auf dem Intervall $[s(v), \bar{s}]$ hingegen gilt

$$\frac{df_v(r)}{dr} = -s_\kappa(r)^{n-1} \int_0^{s(v)} t^{n-1}\,a_v(t)\,dt \Bigg/ \left(\int_0^r s_\kappa(t)^{n-1}\,dt \right)^2 < 0 \; .$$

Damit ist die Ungleichung bewiesen.

Aus den Taylorentwicklungen von $t^{n-1}\,a_v(t)$ und $s_\kappa(t)^{n-1}$ bei $t = 0$ folgt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{r \searrow 0} \frac{\mathrm{vol}B_r(p)}{\mathrm{vol}B_r(\bar{p})} = \lim_{r \searrow 0} \frac{t^{n-1}\,a_v(t)}{s_\kappa(t)^{n-1}} = 1 \; .$$

Wir betrachten jetzt den Gleichheitsfall $\mathrm{vol}B_r(p) = \mathrm{vol}B_r(\bar{p})$ für ein $r \leq \bar{s}$. Aus der letzten Abschätzung folgt $r \leq s(v)$ für alle $v \in S_pM$, somit $r \leq \rho(p)$. Darüberhinaus gilt

$$\frac{n-1}{t} + \frac{\dot{a}_v(t)}{a_v(t)} = (n-1)\,\frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} \qquad \text{und} \qquad \frac{\dot{h}_v(t)}{h_v(t)} = \frac{\dot{s}_\kappa(t)}{s_\kappa(t)} \; .$$

Aus der zweiten Gleichheit schließen wir $k_v(t) = \kappa$ für alle $t \in [0, r]$, Aus der ersten Gleichheit folgt wie im Beweis von 2.18, dass $K(E) = k_v(t) = \kappa$ für alle $t \in [0, r]$ und alle Ebenen $E \in T_{c_v(t)}M$ mit $\dot{c}_v(t) \in E$. Hieraus folgt, dass die Jacobifelder V längs c_v mit Startwert $V(0) = 0$ die gleiche Länge haben wie die entsprechenden Jacobifelder in M_κ^n. Wie im Beweis von Satz 1.136 erhalten wir eine Isometrie

$$\begin{array}{ccccc}
T_pM \supset B_r(0_p) & \xrightarrow{\;\sim\;} & B_r(0_{\bar{p}}) \subset T_{\bar{p}}M_\kappa^n \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_{\bar{p}}} \\
M \;\supset\; B_r(p) & \xrightarrow{\;\sim\;} & B_r(\bar{p}) \;\subset\; M_\kappa^n \; .
\end{array}$$

□

Man beachte, dass im Beweis dieses Satzes gleich drei unterschiedliche Abschätzungen zusammenkommen (die Spurabschätzung aus Bemerkung 2.17, die Abschätzung des Volumenelementes mit Hilfe der Riccati-Gleichung in Satz 2.18, und die Abschätzung $s(v) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, unter anderem mit Hilfe von Proposition 1.110). Es ist fast ein kleines Wunder, dass alle diese Abschätzungen zusammenpassen.

Kommen wir jetzt zu einer interessanten Anwendung des obigen Satzes, dem Durchmesserstarrheitssatz von Chen. Dieser behandelt wie versprochen den Gleichheitsfall im Satz 2.14 von Bonnet-Myers.

2.21. Satz (Cheng). *Es sei (M,g) eine n-dimensionale, vollständige, zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $n \geq 2$ und* $\mathrm{ric} \geq (n-1)\kappa\, g$ *für ein $\kappa > 0$. Wenn* $\mathrm{diam}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ *gilt, dann ist (M,g) isometrisch zur runden Sphäre $M^n_\kappa = \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\, S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Beweis. Setze $R = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \mathrm{diam}(M^n_\kappa)$. Aus Satz 2.14 folgt $R = \mathrm{diam}(M)$. Aus dem Satz 2.20 von Bishop-Gromov folgt

$$\frac{\mathrm{vol} M}{\mathrm{vol} M^n_\kappa} = \frac{\mathrm{vol} B_R(p)}{\mathrm{vol} B_R(\bar p)} \leq \frac{\mathrm{vol} B_r(p)}{\mathrm{vol} B_r(\bar p)}$$

für alle r und alle $p \in M$, $\bar p \in M^n_\kappa$.

Da M kompakt ist, existieren Punkte p, $q \in M$ mit $d(p,q) = R$. Seien $\bar p$, $\bar q \in M^n_\kappa$ Antipoden mit $d(\bar p, \bar q) = R$, dann gilt

$$\emptyset = B_r(p) \cap B_{R-r}(q) = B_r(\bar p) \cap B_{R-r}(\bar q)\ .$$

Wir schließen daraus, dass

$$\mathrm{vol} M \geq \mathrm{vol} B_r(p) + \mathrm{vol} B_{R-r}(q) \geq \frac{\mathrm{vol} M}{\mathrm{vol} M^n_\kappa} \underbrace{\big(\mathrm{vol} B_r(\bar p) + \mathrm{vol} B_{R-r}(\bar q)\big)}_{=\mathrm{vol} M^n_\kappa} = \mathrm{vol} M\ .$$

Da in der obigen Ungleichung Gleichheit gilt, ist das Verhältnis $\frac{\mathrm{vol} B_r(p)}{\mathrm{vol} B_r(\bar p)}$ von r unabhängig. Indem wir den Limes $r \searrow 0$ betrachten, sehen wir, dass $\mathrm{vol} B_r(p) = \mathrm{vol} B_r(\bar p)$ für alle r gilt. Nach dem Satz von Bishop-Gromov sind $B_r(p)$ und $B_r(\bar p)$ für alle $r \in (0,R)$ isometrisch, aus Stetigkeitsgründen also auch für $r = R$. Insbesondere sind auch $M = \overline{B_R(p)}$ und $M^n_\kappa = \overline{B_R(\bar p)}$ isometrisch. ☐

2.3. Fundamentalgruppe und kürzeste geschlossene Kurven in kompakten Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir einige weitere topologische und geometrische Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten positiver Schnittkrümmung herleiten. Dabei nutzen wir aus, dass es in jeder nicht einfach zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit immer kürzeste geschlossene Kurven gibt.

2.22. Definition. Sei M eine Mannigfaltigkeit. Eine *Schleife* in M ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Zwei Schleifen γ_0, γ_1 heißen (*frei*) *homotop,* wenn es eine stetige Abbildung $h\colon [0,1]^2 \to M$ gibt mit

$$h(t,i) = \gamma_i(t) \qquad \text{und} \qquad h(0,s) = h(1,s)$$

für alle s, $t \in [0,1]$ und $i \in \{0,1\}$. Eine Schleife, die zu einer konstanten Schleife frei homotop ist, heißt *zusammenziehbar.*

Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, dann ist eine geschlossene Geodätische eine Geodätische $c\colon [0,1] \to M$ mit $c(0) = c(1)$ und $\dot c(0) = \dot c(1)$.

Diese Definition und das folgende Lemma funktionieren für beliebige topologische Räume.

2.23. Lemma. *Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es eine natürliche Bijektion von freien Homotopieklassen von Schleifen von M und Konjugationsklassen in der Fundamentalgruppe $\pi_1(M)$.*

Beweis. Zunächst ist jede Schleife frei homotop zu einer Schleife am Punkt p. Dazu wähle einen Weg σ von $\gamma(0) = \gamma(1)$ nach p und definiere frei homotope Schleifen $\gamma_s = \sigma|_{[0,s]}^{-1}\gamma\sigma|_{[0,s]}$ für alle $s \in [0,1]$. Dann ist $\gamma_0 = \gamma$, und γ_1 ist Schleife an p.

Seien nun γ_0, γ_1 zwei Schleifen am Punkt p, und sei $h\colon [0,1]^2 \to M$ eine freie Homotopie zwischen ihnen. Setze $\sigma(t) = h(0,t) = h(1,t)$, dann ist σ eine Schleife an p, und man kann eine Homotopie $\bar{h}$ zwischen γ_1 und $\sigma^{-1}\gamma_0\sigma$ konstruieren. Es folgt, dass $[\gamma_1] = [\sigma]^{-1}[\gamma_0][\sigma] \in \pi_1(M,p)$.

Wenn umgekehrt γ_0 und γ_1 Elemente ein und derselben Konjugationsklasse von $\pi_1(M)$ repräsentieren, etwa $[\gamma_1] = [\sigma]^{-1}[\gamma_0][\sigma]$, dann ist γ_0 frei homotop zu $\sigma^{-1}\gamma_0\sigma$ wie im ersten Schritt des Beweises, und $\sigma^{-1}\gamma_0\sigma$ ist homotop zu γ_1. □

2.24. Bemerkung. Sei M zusammenhängend. Ohne Angabe eines Basispunktes sind Elemente in $\pi_1(M)$ bis auf Konjugation wohlbestimmt nach Bemerkung 1.128. Wir dürfen also von Konjugationsklassen in $\pi_1(M)$ sprechen.

Außerdem sehen wir leicht, dass eine Schleife genau dann zusammenziehbar ist, wenn sie frei zusammenziehbar ist. Wir dürfen hier also den Zusatz „frei“ weglassen.

Wir geben ein nützliches Kriterium dafür an, dass eine Schleife nicht zusammenziehbar ist. Dazu beweisen wir jetzt doch noch einen wichtigen Satz über Überlagerungen.

2.25. Satz (Homotopieliftungssatz). *Es sei $\pi\colon \tilde{M} \to M$ eine Überlagerung, es seien $\tilde{F}\colon N \to \tilde{M}$ und $H\colon N \times [0,1] \to M$ stetige Abbildungen mit $(\pi \circ \tilde{F})(p) = H(p,0)$ für alle $p \in N$.*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\tilde{F}"] \arrow[d, "\times\{0\}"] & \tilde{M} \arrow[d, "\pi"] \\ N \times [0,1] \arrow[r, "H"] & M . \end{tikzcd}$$

Dann existiert genau eine stetige Abbildung $\tilde{H}\colon N \times [0,1] \to \tilde{M}$ mit $\pi \circ \tilde{H} = H$ und $\tilde{H}(p,0) = \tilde{F}(p)$.

Beweis. Wir betrachten zunächst $p \in N$. Zu jedem $t \in [0,1]$ existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung U von $H(p,t) \in M$ wie in Definition 1.115; insbesondere gilt also $\pi^{-1}(U) \cong U \times X$ für eine diskrete Menge X. Da $[0,1]$ kompakt ist, existieren endlich viele $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, gleichmäßig überlagerte offene Mengen U_i und diskrete Mengen X_i, so dass

$$H(p,t) \in U_i \qquad \text{für alle } 1 \le i \le k \text{ und } t \in [t_{i-1}, t_i]$$

und $\pi^{-1}(U_i) = U_i \times X_i$. Wegen Stetigkeit von H und Kompaktheit von $[0,1]$ existiert eine zusammenhängende Umgebung V von p, so dass

$$H(q,t) \in U_i \qquad \text{für alle } q \in V, \text{ alle } 1 \le i \le k \text{ und alle } t \in [t_{i-1}, t_i] .$$

Wegen Stetigkeit von $\tilde{F}$ ist die zusammengesetzte Abbildung

$$V \xrightarrow{\tilde{F}} \pi^{-1}(U_1) \xrightarrow{\sim} U_1 \times X_1 \longrightarrow X_1$$

konstant, da V zusammenhängend ist. Sei $x_1 \in X_1$ der Bildpunkt, dann definieren wir $\tilde{H}|_{V_1 \times [t_0,t_1]}$ durch

$$\tilde{H}(q,t) = \big(H(q,t), x_1\big) \in U_1 \times X_1 \cong \pi^{-1}(U_1) \subset \tilde{M} \qquad \text{für alle } q \in V \text{ und alle } t \in [t_0, t_1] .$$

Das liefert offensichtlich eine stetige Abbildung.

Wir setzen dieses Verfahren induktiv fort, indem wir $\tilde{H}$ fortsetzen durch

$$\tilde{H}(q,t) = \big(H(q,t), f_i\big) \in U_i \times X_i \cong \pi^{-1}(U_i) \subset \tilde{M} \qquad \text{für alle } q \in V \text{ und alle } t \in [t_{i-1}, t_i] .$$

Nach endlich vielen Schritten haben wir $\tilde{H}$ auf $V \times [0,1]$ konstruiert.

Diese Konstruktion ist eindeutig, denn sei $q \in V$, und sei $\tilde{H}'$ eine weitere lokale Fortsetzung von $\tilde{F}$. Wegen Stetigkeit sind die Abbildungen

$$[t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{t \mapsto (q,t)} N \times [t_{i-1}, t_i] \xrightarrow{\tilde{H}'} \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times X_i \longrightarrow X_i$$

konstant, und es folgt $\tilde{H}'(q,t) = \tilde{H}(q,t)$ für alle $t \in [0,1]$ nach Induktion über i.

Da jeder Punkt p in M eine geeignete Umgebung V besitzt, so dass sich $\tilde{F}|_V$ auf $V \times [0,1]$ fortsetzen lässt, und je zwei solche Fortsetzungen auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen, können wir $\tilde{H}$ also auch global definieren, und zwar auf genau eine Weise. □

2.26. Folgerung. *Jede Schleife γ in M am Punkt p lässt sich zu einem Weg $\tilde{\gamma}$ in $\tilde{M}$ liften, wobei $\tilde{\gamma}(0) \in \pi^{-1}(p)$ beliebig gewählt werden kann.*

Beweis. In der Notation von Satz 2.25 ist N ein Punkt, $H = \gamma$ und der Anfangspunkt $\tilde{p} \in \tilde{M}$ ist das Bild von N unter $\tilde{F}$. □

2.27. Folgerung. *Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit universeller Überlagerung $\pi \colon \tilde{M} \to M$. Sei $\tilde{\gamma} \colon [0,1] \to \tilde{M}$ ein Weg, dessen Bild $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ eine Schleife in M ist, d.h., es gilt $\pi\gamma(0) = \pi\gamma(1)$. Dann ist γ genau dann in M zusammenziehbar, wenn $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$.*

Beweis. Übung. □

2.28. Lemma. *Es sei (M, g) eine kompakte, zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann gilt*

(1) *Jede Schleife γ der Länge $L(\gamma) < 2\rho(M)$ ist zusammenziehbar.*
(2) *Jede freie Homotopieklasse nicht zusammenziehbarer Schleifen wird durch eine kürzeste geschlossene Geodätische realisiert.*

Beweis. Zu (1) sei $p = \gamma(0)$. Für den Injektivitätsradius gilt $\rho(p) \geq \rho(M)$. Wie im Beweis von Folgerung 1.90 verläuft eine Schleife der Länge $L(\gamma) < 2\rho(M)$ ganz in $B_{\rho(p)}(p)$, und wir erhalten eine Homotopie

$$h(t,s) = \exp_p\bigl(s \exp_p^{-1}(\gamma(t))\bigr) .$$

Zu (2) sei γ eine beliebige nicht zusammenziehbare Schleife, dann setze

$$\ell = \inf\bigl\{ L(\gamma') \bigm| \gamma' \text{ ist frei homotop zu } \gamma \bigr\} .$$

Wegen (1) gilt $\ell \geq 2\rho(M)$. Wir können eine Folge glatter, zu γ frei homotoper Schleifen $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{i \to \infty} L(\gamma_i) = \ell$$

wählen; diese seien o.B.d.A. proportional zur Bogenlänge parametrisiert. Insbesondere existiert eine Konstante $C = \max L(\gamma_i)$ mit

$$d(\gamma_i(s), \gamma_i(t)) \leq C \, \min(|s-t|\,, 1 - |s-t|)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle s, $t \in [0,1]$.

Wir haben also eine Familie gleichgradig stetiger Abbildung in ein Kompaktum M gefunden. Nach dem Satz von Arzela-Ascoli existiert ein Häufungspunkt in der $\mathcal{C}^0$-Topologie, insbesondere konvergiert eine Teilfolge punktweise gegen eine Schleife $\gamma_\infty \colon [0,1] \to M$ mit

$$d(\gamma_\infty(s), \gamma_\infty(t)) = \ell \, \min(|s-t|\,, 1 - |s-t|)$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und alle s, $t \in [0,1]$. Da diese Schleife lokal kürzeste Verbindung ihrer Punkte ist, ist sie eine Geodätische. Da dies auch über den Punkt $\gamma_\infty(0) = \gamma_\infty(1)$ hinweg gilt, ist γ geschlossen.

Um zu zeigen, dass γ_∞ frei homotop zu γ ist, wähle zunächst i so groß, dass

$$d(\gamma_\infty(t), \gamma_i(t)) < \rho(M)$$

für alle $t \in [0,1]$. Dann existiert eine Homotopie durch kürzeste verbindende Geodätische, d.h., wir definieren $h\colon [0,1]^2 \to M$ durch

$$h(t,s) = \exp_{\gamma_\infty(t)}\bigl(s \exp^{-1}_{\gamma_\infty(t)}(\gamma_i(t))\bigr) \ .$$

Damit ist γ_∞ frei homotop zu γ_i, und somit auch zum ursprünglichen γ. $\square$

2.29. Bemerkung. Mit dem obigen Lemma und dem Satz 2.11 von Hadamard-Cartan lässt sich leicht zeigen, dass jede kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \le 0$ geschlossene Geodätische trägt (Übung).

Als nächstes definieren wir den Begriff der Orientierung, den wir für die folgenden Resultate benötigen.

2.30. Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Zwei Karten φ, ψ von M heißen *gleich orientiert,* wenn für alle $p \in U^\varphi \cap U^\psi$ gilt, dass

$$\det\bigl(d(\psi \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}\bigr) > 0 \ .$$

Ein *orientierter Atlas* von M ist ein Atlas $\mathcal{A}$ von M, in dem je zwei Karten gleich orientiert sind. Falls so etwas existiert, heißt M *orientierbar.* Zwei orientierte Atlanten von M heißen *gleich orientiert,* wenn ihre Vereinigung wieder ein orientierter Atlas ist. Die Vereinigung aller zu einem gegebenen Atlas gleich orientierter Atlanten heißt ein *maximaler orientierter Atlas* oder eine *Orientierung* von M.

Ein lokaler Diffeomorphismus $F\colon M \to N$ zwischen orientierten Mannigfaltigkeiten heißt *orientierungserhaltend,* wenn für alle Paare orientierter Karten φ von M und ψ von N und alle $p \in U^\varphi \cap F^{-1}(U^\psi)$ gilt, dass

$$\det\bigl(d(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})_{\varphi(p)}\bigr) > 0 \ .$$

Jeder Tangentialraum T_pM lässt sich auf zwei Weisen orientieren, und eine Orientierung wählt in stetiger Weise an jedem Punkt eine dieser beiden Orientierungen aus; sie besteht aus allen Basen $(v_1, \dots, v_n)$ von T_pM, für die $(v_1^\varphi, \dots, v_n^\varphi)$ eine positiv orientierte Basis des $\mathbb{R}^n$ ist.

2.31. Definition. Sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Es sei $o(T_pM)$ die Menge aller Orientierungen von T_pM, dann heißt

$$\pi\colon o(TM) = \dot{\bigcup_{p\in M}} o(T_pM) \to M \qquad \text{mit} \qquad (p,o) \mapsto p$$

die *Orientierungsüberlagerung* von M.

Eine Schleife γ in M heißt *orientierbar,* wenn sie sich zu einer Schleife in $o(TM)$ liften lässt.

2.32. Bemerkung. Sei M differenzierbare Mannigfaltigkeit, und sei $\pi\colon o(TM) \to M$ die Orientierungsüberlagerung.

(1) Zunächst einmal ist $o(TM)$ tatsächlich eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, und π ist eine zweiblättrige Überlagerung von M. Sei etwa φ eine Karte von M, dann induziert φ für alle $p \in U^\varphi$ eine Orientierung o_p^φ auf T_pM, so dass $d_p\varphi\colon T_pM \to \mathbb{R}^n$ orientierungserhaltend ist. Es sei $-o_p^\varphi$ die dazu entgegengesetzte Orientierung von T_pM, dann folgt

$$U^\varphi \times \{1,-1\} \cong \pi^{-1}(U^\varphi) \qquad \text{mit} \qquad (p,\pm 1) \mapsto \pm o_p^\varphi \in o(T_pM) \ .$$

Seien φ, ψ gleich (verschieden) orientiert, dann erhalten wir

$$\bigl(U^\varphi \times \{\pm 1\}\bigr) \cap \bigl(U^\psi \times \{\mp 1\}\bigr) = \emptyset \qquad \text{bzw.} \qquad \bigl(U^\varphi \times \{\pm 1\}\bigr) \cap \bigl(U^\psi \times \{\pm 1\}\bigr) = \emptyset \ ,$$

und die Kartenwechsel auf M induzieren Kartenwechsel auf $o(TM)$. Also ist $o(TM)$ eine orientierte Mannigfaltigkeit der gleichen Dimension wie M und π eine Überlagerung.

(2) Auf $o(TM)$ operiert die Gruppe $\{1,-1\}$ durch Beibehalten bzw. Wechsel der Orientierung an jedem Punkt von M; es folgt $M \cong o(TM)/\{1,-1\}$, und $\pi\colon o(TM) \to M$ ist die Quotientenabbildung.
(3) Wenn M orientiert ist, folgt $o(TM) \cong M \times \{1,-1\}$, wobei $(p,1)$ der gewählten Orientierung auf T_pM entspricht. Wenn umgekehrt $o(TM) \cong M \times \{1,-1\}$ gilt, wobei π zur Projektion auf den Faktor M wird, dann lässt sich M orientieren, indem T_pM mit der $(p,1)$ entsprechenden Orientierung versehen wird.
(4) Es sei $\gamma\colon [0,1] \to M$ eine Schleife in M. Wir wählen eine Basis $(e_1(0),\dots,e_n(0))$ und setzen diese stetig fort zu einer Familie von Basen $(e_1(t),\dots,e_n(t))_{t\in[0,1]} \in \mathfrak{X}(\gamma)$. Die Orientierungen dieser Basen beschreiben einen Lift $\tilde{\gamma}$ von γ nach $o(TM)$. Folglich ist γ genau dann orientierbar, wenn $(e_1(0),\dots,e_n(0))$ und $(e_1(1),\dots,e_n(1))$ gleich orientierte Basen von $T_{\gamma(0)}M$ sind.

2.33. Lemma (Lemma von Synge). *Es sei M eine zusammenhängende, kompakte, n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit positiver Schnittkrümmung.*

(1) *Es sei n gerade. Wenn M orientierbar ist, ist M einfach zusammenhängend, ansonsten gilt $\pi_1(M) \cong \{1,-1\}$, und die Orientierungsüberlagerung ist eine universelle Überlagerung.*
(2) *Wenn n ungerade ist, ist M orientierbar.*

Beweis. Wir beweisen hier nur Teil (1). Teil (2) lässt sich mit ähnlichen Methoden zeigen und ist daher eine Übung. Zu (1) zeigen wir, dass M keine nicht zusammenziehbare orientierbare Schleife enthält.

Wenn M orientierbar ist, dann ist jede Schleife orientierbar, also auch zusammenziehbar, und es folgt $\pi_1(M) \cong \{1\}$. Ansonsten hätte $\pi_1(M)$ nämlich mindestens eine nichttriviale Konjugationsklasse, es würde also nicht zusammenziehbare Schleifen geben.

Wenn M nicht orientierbar ist, enthält M mindestens eine nicht orientierbare Schleife, also existiert ein nicht orientierbares Element $\gamma \in \pi_1(M)$. Angenommen, $\gamma' \in \pi_1(M)$ wäre ebenfalls nicht orientierbar. Dann wäre $\gamma^{-1}\gamma'$ orientierbar, es folgt also $\gamma = \gamma'$. Insbesondere gilt $\pi_1(M) \cong \{1,-1\}$.

Es sei jetzt $c\colon [0,\ell] \to M$ eine orientierbare geschlossene Geodätische in M mit $p = c(0) = c(\ell)$ und $v = \dot c(0) = \dot c(\ell)$. Parallelverschiebung längs c definiert eine orientierbare, orthogonale Abbildung $P_c\colon T_pM \to T_pM$ mit $P_c(v) = v$. Nach dem Satz über normale Abbildungen wird P_c in einer geeigneten Orthonormalbasis von T_pM dargestellt durch eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}\cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\end{smallmatrix} &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \begin{smallmatrix}\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k\\ \sin\varphi_k & \cos\varphi_k\end{smallmatrix} &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 1 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\det P_c > 0$, ist die Anzahl der Einträge -1 gerade, da $\dim T_pM$ gerade ist, also auch die Anzahl der Einträge 1. Nun ist aber $v = \dot c(0)$ ein Eigenvektor, also gibt es einen weiteren Eigenvektor $w \perp v$ zum Eigenwert 1.

Wir setzen w zu einem parallelen Vektorfeld $W \in \mathfrak{X}'(c)$ längs c fort. Da $P_c(w) = w$, folgt $W(0) = W(\ell)$. Sei nun c_s eine Variation von c mit Variationsvektorfeld W. Da c geschlossene Geodätische

ist, folgt
$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} L(c_s) = 0 \;.$$
Die zweite Variationsformel aus Satz 1.86 liefert
$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} L(c_s) = \int_0^\ell \big(\|\underbrace{\dot W(t)}_{=0}\|^2 - \underbrace{K(\operatorname{span}\{\dot c(t), W(t)\})}_{>0} \, \|\dot c(t)\|^2 \, \|W(t)\|^2\big) \, dt < 0 \;.$$
Insbesondere ist die geschlossene Geodätische c nicht die kürzeste Kurve in ihrer freien Homotopieklasse. Nach Lemma 2.23 gibt es aber in jeder freien Homotopieklasse nicht zusammenziehbarer Schleifen eine kürzeste geschlossene Geodätische. Folglich kann es keine nicht zusammenziehbaren, orientierbaren Schleifen in M geben. □

2.34. Bemerkung. Man sieht leicht, dass $\mathbb{R}P^n$ genau dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist. Die Linsenräume aus Beispiel 1.137 zeigen, dass im ungerade-dimensionalen Fall die Fundamentalgruppe zwar endlich ist wegen des Satzes 2.14 von Bonnet-Myers, aber beliebig viele Elemente enthalten kann.

Auf die Voraussetzung $K > 0$ kann man nicht verzichten: Indem man das Riemannsche Produkt eines der obigen Beispiele mit S^1 oder $\mathbb{R}P^2$ bildet, erhält man Gegenbeispiele, in denen allerdings nur noch $K \geq 0$ gilt.

Wir wollen das obige Argument zu einer unteren Abschätzung für den Injektivitätsradius ausbauen. Im Gegensatz zum Satz von Bonnet-Myers erhalten wir dadurch eine untere Schranke für die Größe der Mannigfaltigkeit. Zunächst einige Vorüberlegungen.

2.35. Proposition. *Es sei (M, g) kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existiert entweder eine geschlossene Geodätische der Länge $2\rho(M)$, oder Punkte p, $q \in M$ und eine kürzeste Geodätische von p nach q der Länge $\rho(M)$, entlang der p zu q konjugiert ist.*

Beweis. Es gilt $\rho = \rho(M, g) = \inf_{v \in SM} s(v)$, und da SM kompakt ist, wenn M kompakt ist, wird das Infimum bei $v \in T_pM$ mit $p \in M$ angenommen. Es sei c_v die Geodätische mit Startvektor v und $q = c_v(\rho)$. Falls $\rho\, v \in T_pM$ zu p konjugiert ist, sind wir fertig.

Anderfalls gibt es eine weitere kürzeste Geodätische $c_w \neq c_v$ von p nach q nach Übung 4 von Blatt 9. Falls $\rho\, w \in T_pM$ zu p konjugiert ist, sind wir wieder fertig. Wir wollen zeigen, dass c_v und c_w ansonsten gemeinsam eine geschlossene Geodätische bilden. Wäre das nicht so, dann würden sich die beiden Geodätischen in p oder in q in einem Winkel $< \pi$ treffen, etwa in q. Dann gibt es einen Vektor $u \in T_qM$ mit
$$\langle \dot c_v(\rho), u\rangle < 0 \qquad \text{und} \qquad \langle \dot c_w(\rho), u\rangle < 0 \;.$$
Nach Voraussetzung ist $\exp_p$ nahe $\rho\, v$ und nahe $\rho\, w$ lokal invertierbar. Für kleine $\varepsilon > 0$ existieren also Kurven v, $w\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to T_pM$ mit
$$v(0) = v \;, \qquad w(0) = w \qquad \text{und} \qquad \exp_p(\rho\, v(s)) = \exp_p(\rho\, w(s)) = \exp_q(su) \;.$$
Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64 folgt
$$\|\rho\, v(s)\| \leq d(p, \exp_q(su)) < \rho \qquad \text{und} \qquad \|\rho\, w(s)\| \leq d(p, \exp_q(su)) < \rho$$
im Widerspruch zur Definition des Injektivitätsradius.

Folglich müssen sich c_v und c_w bei q im Winkel π treffen. Wir vertauschen oben die Rollen von p und q und sehen, dass sich $c_v|_{[0,\rho]}$ und $c_w|_{[0,\rho]}$ auch bei p im Winkel π treffen, und daher nach Umparametrisierung eine geschlossene Geodätische der Länge $2\rho(M)$ bilden. □

2.36. Bemerkung. Die kürzesten geschlossenen Geodätischen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit heißen auch *Systolen.*

(1) Der Injektivitätsradius der runden Sphäre ist π. Geodätische zwischen Antipoden können sich in beliebigen Winkeln treffen. Das ist möglich, da Antipoden entlang jeder Geodätischen konjugiert sind.
(2) Sei M kompakt mit nichtpositiver Schnittkrümmung. Nach dem Satz 2.11 von Hadamard-Cartan gibt es keine konjugierten Punkte, also wird der Injektivitätsradius stets durch die Systolen realisiert. Da die universelle Überlagerung keine geschlossenen Geodätischen enthält, schließen wir aus Folgerung 2.27, dass die Systolen nicht zusammenziehbar sind, also durch die Fundamentalgruppe bedingt sind.

2.37. Satz (Klingenberg). *Es sei (M,g) eine kompakte, orientierbare Riemannsche Mannigfaltigkeit gerader Dimension mit Schnittkrümmung $0 < K \le \kappa$. Dann gilt*

$$\operatorname{diam}(M) \ge \rho(M) \ge \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Beweis. Wir nehmen an, dass $R := \rho(M) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ gilt. Nach dem Satz 2.5 von Rauch ist $\exp_p$ für alle p auf ganz $\overline{B_R(0_p)}$ lokal invertierbar. Nach Proposition 2.35 wird der Injektivitätsradius also durch eine geschlossene Geodätische $c\colon [0,1] \to M$ der Länge $2R$ repräsentiert.

Wie im Beweis des Lemmas 2.33 von Synge existiert eine Variation von c durch Schleifen c_s mit $c_0 = c$, die für $0 \ne s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ kürzer als c sind. Insbesondere gilt $d(c_s(0), c_s(t)) < R = \rho(M)$ für alle $s \ne 0$ und alle $t \in [0,1]$. Nach Folgerung 1.114 existiert eine Abbildung

$$\Phi\colon [0,1] \times \big((-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}\big) \to \big\{\, v \in TM \bigm| \|v\| < R \,\big\} \quad \text{mit} \quad (\pi \times \exp)(\Phi(t,s)) = (c_s(0), c_s(t)) .$$

Da die Abbildung $\pi \times \exp$ auf der kompakten Menge $\{\, v \in TM \mid \|v\| \le R \,\}$ wegen $R < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ lokal invertierbar ist, existiert eine Konstant C mit

$$\big\|(d_v \exp^{-1})(w)\big\| \le C\ \|w\| \qquad \text{für alle } v \in TM \text{ mit } \|v\| \le R \text{ und alle } w \in T_{\pi(v)}M .$$

Andernfalls gäbe es eine Folge von Vektoren $u_i \in T_{p_i}M \subset T_{v_i}TM$ mit $\|v_i\| \le R$, $\|u_i\| = 1$ und $\|(d_{v_i}\exp)(u_i)\| \to 0$ für $i \to \infty$, diese Folge hätte wegen Kompaktheit einen Grenzwert $u_\infty \in T_{v_\infty}M$ mit $\|v_\infty\| \le R$, $\|u_\infty\| = 1$ und $(d_{v_\infty}\exp)(u_\infty) = 0$ im Widerspruch zur lokalen Invertierbarkeit.

Hieraus folgt

$$\left\|\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,s)\right\| \le C\ \|\dot c_s(t)\| \le C' < \infty$$

für alle $s \in (-\varepsilon,\varepsilon) \setminus \{0\}$ und alle $t \in [0,1]$, da auch $\|\dot c_s(t)\|$ für $s \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ universell beschränkt ist. Nach Arzela-Ascoli konvergiert eine Folge von Kurven $\Phi(\,\cdot\,, s_i)$ für $s_i \to 0$ gegen eine geschlossene Kurve $\varphi\colon [0,1] \to T_pM$ mit $\exp_p \circ \varphi = c$.

Das steht im Widerspruch dazu, dass φ als Lift einer Geodätischen mit $\varphi(0) = 0_p$ durch eine radiale Gerade gegeben sein muss. Hieraus folgt $\rho(M) \ge \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, und die Aussage $\operatorname{diam}(M) \ge \rho(M)$ sollte klar sein. $\square$

2.38. Bemerkung. Die runde Sphäre zeigt, dass Gleichheit möglich ist. Insbesondere ist obiger Satz in gewissem Sinne komplementär zum Satz 2.14 von Bonnet-Myers. Insgesamt gilt für geradedimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeiten also

$$0 < \kappa_0 \le K \le \kappa_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_1}} \le \rho(M,g) \le \operatorname{diam}(M,g) \le \frac{\pi}{\sqrt{\kappa_0}} .$$

Es gibt keine interessante Starrheitsaussage. Beispielsweise erfüllt $\mathbb{C}P^n$ für $n \ge 2$ die Krümmungsbedingung $1 \le K \le 4$, und es gilt $\rho(\mathbb{C}P^n) = \operatorname{diam}(\mathbb{C}P^n) = \frac{\pi}{2}$.

Die Bedingung $K > 0$ ist nötig, um das Lemma 2.33 anwenden zu können. Für $K = 0$ beispielsweise kann man Tori mit beliebig kleinem Injektivitätsradius konstruieren.

Die Linsenräume aus Beispiel 1.137 zeigen, dass die Abschätzung im ungerade-dimensionalen Fall nicht möglich ist, denn ihr Injektivitätsradius $\frac{\pi}{p}$ wird für große p beliebig klein.

2.4. Der Winkelvergleichssatz von Toponogov

In diesem Kapitel beweisen wir, dass Winkel beliebiger Dreiecke mit kürzesten Seiten in vollständigen Mannigfaltigkeiten der Schnittkrümmung $K \geq \kappa$ nie kleiner sind als die eines Vergleichsdreiecks mit gleichen Längen in M^n_κ. Für kleine Dreiecke konnten wir das als Übung 2 von Blatt 13 aus der Folgerung 2.8 aus dem Satz von Rauch herleiten. Die Verallgemeinerung auf beliebige Dreiecke erfordert wieder ein paar globale Überlegungen. Wir werden sie im nächsten Abschnitt benutzen, um von manchen Mannigfaltigkeiten zu beweisen, dass sie homöomorph zur Sphäre sind.

2.39. Definition. Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein *(geodätisches) Dreieck* $\Delta c_1 c_2 c_3$ in M besteht aus drei Geodätischen c_1, c_2, $c_3\colon [0,1] \to M$ mit den *Eckpunkten* $p_{i+2} := c_i(1) = c_{i+1}(0) \in M$, wobei Indizes modulo 3 betrachtet werden. Es hat die *Seitenlängen* ℓ_i und die *Winkel* $\gamma_i \in [0, \pi]$ mit

$$\ell_i = L(c_i) = \|\dot c_i\| \qquad \text{und} \qquad \gamma_i = \angle_{p_i}\bigl(-\dot c_{i+1}(1), \dot c_{i+2}(0)\bigr)\ .$$

Ein *geodätisches Dreieck* $\Delta c_1 c_2 c_3$ heißt *minimal* oder *kürzestes,* wenn $\ell_i = d(p_{i+1}, p_{i+2})$ für alle i.

2.40. Bemerkung.
(1) Es reicht im allgemeinen selbst bei einem kürzesten Dreieck nicht, nur die Eckpunkte p_1, p_2, p_3 anzugeben, da es zwischen ihnen mehrere kürzeste Geodätische geben kann.
(2) In einem kürzesten Dreieck gilt die Dreiecksungleichung $\ell_i \leq \ell_{i+1} + \ell_{i+2}$, in einem beliebigen geodätischen Dreieck kann sie aber verletzt sein.

Wir haben im letzten Semester bereits kürzeste Dreiecke in den Räumen M^n_κ für $\kappa \in \{1, 0, -1\}$ betrachtet. Für beliebige κ behelfen wir uns mit Skalierungsüberlegungen wie im Beweis von Proposition 1.133; den Seitencosinussatz in M^n_κ haben wir in den Übung 1 von Blatt 13 kennengelernt.

Wir formulieren jetzt den Satz von Toponogov, der einen älteren Satz von Alexandrov verallgemeinert. Der Beweis wird den Rest dieses Abschnitts in Anspruch nehmen. Größen im Vergleichsdreieck in M^n_κ werden mit dem gleichen Symbol bezeichnet wie die entsprechenden Größen im Originaldreieck in M und zusätzlich mit einem Querstrich versehen.

2.41. Satz (Alexandrov, Toponogov). *Es sei (M, g) vollständige Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$, und es sei $\Delta c_1 c_2 c_3$ ein Dreieck in M mit kürzesten Seiten c_1 und c_2, und mit $\ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$, und $\ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ falls $\kappa > 0$. Dann existiert ein Vergleichsdreieck $\Delta \bar c_1 \bar c_2 \bar c_3$ in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen $\bar\ell_i = \ell_i$ und Winkeln $\bar\gamma_1 \leq \gamma_1$ und $\bar\gamma_2 \leq \gamma_2$.*

Wenn alle drei Seiten kürzeste Geodätische sind und das Vergleichsdreieck bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist, erhalten wir offensichtlich auch noch $\bar\gamma_3 \leq \gamma_3$.

2.42. Beispiel. Wir betrachten Beispiele von Dreiecken, um die obige Aussage zu verstehen.
(1) Auf dem Zylinder $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z} \times \{0\}$ betrachte ein Dreieck mit den Eckpunkten $p_1 = [x_1, y_1]$, $p_2 = [x_2, y_2]$ und $p_3 = [0, 0]$ mit $0 < x_1 < x_2$ und x_1, $x_2 - x_1$ und $1 - x_2 < \frac{1}{2}$. Dann ist die Seite c_1 von p_2 nach p_3 kürzer als die eines Dreiecks mit den gleichen Koordinaten in $\mathbb{R}^2$, folglich ist der Winkel im Vergleichsdreieck kleiner, und das selbst bei konstanter Schnittkrümmung $K = \kappa$. Wir können also nicht wie im Satz 2.5 von Rauch die Ungleichungszeichen bei Voraussetzung und Abschätzung umdrehen. Für „kleine“ Dreiecke gilt so eine Abschätzung immerhin, siehe Aufgabe 1 von Blatt 10.

(2) Wir wollen jetzt nur noch verlangen, dass c_1 und c_2 kürzeste Geodätische sind. Dazu betrachten wir etwa auf $\mathbb{R}P^2$ ein Dreieck, dass sich auf S^2 wie folgt beschreiben lässt. Wähle auf dem Äquator zwei Punkte p_1, p_2 im Abstand $d < \frac{\pi}{2}$. Es sei p_3 ein Punkt auf der Nordhalbkugel mit

$$\frac{\pi - d}{2} < d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3) < \frac{\pi}{2} \, .$$

Wir betrachten die Bilder dieser Punkte in $\mathbb{R}P^2$ und wählen für c_1, c_2 die jeweils kürzesten Geodätischen, für c_3 hingegen die Geodätische der Länge $\pi - d$. Dann sind die Winkel γ_1, γ_2 stumpf. Im Vergleichsdreieck können die Winkel $\bar\gamma_1$, $\bar\gamma_2$ beliebig klein werden für $d(p_1, p_3) = d(p_2, p_3) \to \frac{\pi - d}{2}$. Auf der anderen Seite kann es passieren, dass $\bar\gamma_3 > \gamma_3$. Wir werden sehen, dass das daran liegt, dass c_3 keine kürzeste Geodätische ist.

(3) Es sei jetzt $M = S^n = M^n_\kappa$ die runde Sphäre mit $K = \kappa = 1$. Es seien p_2 und $p_3 = -p_2$ Antipoden und $p_1 \in S^n$ ein beliebiger weiterer Punkt. Dann bilden die Seiten c_2 und c_3 zusammen einen Halbkreisbogen, insbesondere gilt $\gamma_1 = \pi$. Für c_1 dürfen wir einen beliebigen Halbkreisbogen zwischen p_2 und p_3 wählen, dann folgt $\gamma_2 = \gamma_3$ und $\ell_1 = \pi = \ell_2 + \ell_3$. Jede andere Wahl von c_1 liefert ein Vergleichsdreieck, dessen Winkel bei p_2, p_3 durchaus kleiner als $\gamma_2 = \gamma_3$ werden können. Wir werden also im Satz von Toponogov bei der Wahl des Vergleichsdreiecks unter Umständen etwas aufpassen müssen.

Wir beginnen mit einigen Hilfsaussagen, bevor wir weiter unten den Satz beweisen.

2.43. Bemerkung. Es sei (M, g) vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, $K \subset M$ kompakt und $r > 0$. Wir erinnern uns an die Taylorentwicklung der Metrik $g^{\exp_p^{-1}}$ in Normalkoordinaten um p aus Proposition 1.84. Für $p \in K$ und v, $w \in T_pM$ mit $0 < \|v\| \le r$ betrachte den Ausdruck

$$\frac{\bigl|\|d_v \exp_p w\| - \|w\|\bigr|}{\|v\|^2\,\|w\|} = \frac{\Bigl|\sqrt{g_v^{\exp_p^{-1}}(w,w)} - \|w\|\Bigr|}{\|v\|^2\,\|w\|} = \frac{\bigl|\|w\|\,\sqrt{1 + O(v^2)} - \|w\|\bigr|}{\|v\|^2\,\|w\|} = O\bigl(\|v\|^0\bigr)$$

für kleine v; dieser Ausdruck ist also auch für sehr kleine v beschränkt.

Aufgrund der Kompaktheit der Menge

$$\bigl\{\,(p, v) \in TM \bigm| p \in K,\ v \in T_pM \text{ mit } \|v\| \le r\,\bigr\}$$

existiert also eine Zahl ϑ mit

$$\Bigl|\bigl\|d_v \exp_p w\bigr\| - \|w\|\Bigr| \le \vartheta\,\|v\|^2\,\|w\|$$

für alle $p \in K$ und v, $w \in T_pM$ mit $\|v\| \le r$. Daraus schließen wir folgendes.

(1) Für alle $0 < \varepsilon \le r$, alle $p \in K$ und alle Kurven $\gamma\colon [0,1] \to B_\varepsilon(0_p)$ gilt

$$\bigl|L(\exp_p \circ \gamma) - L(\gamma)\bigr| \le \varepsilon^2 \vartheta\, L(\gamma) \, .$$

Dazu integrieren wir obige Abschätzung über γ.

(2) Es sei $p \in M$ und q_i eine Folge von Punkten in M, die gegen p konvergiert, und es seien v_i, $w_i \in T_{q_i}M$ Folgen von Vektoren, die für $i \to \infty$ gegen 0_p konvergieren. Dann folgt

$$d\bigl(\exp_{q_i}(v_i), \exp_{q_i}(w_i)\bigr) = \|v_i - w_i\|_{q_i}\,\bigl(1 + O\bigl((\|v_i\| + \|w_i\|)^2\bigr)\bigr) \, ,$$

indem wir (1) zum einen auf die Strecke von v_i nach w_i in $T_{q_i}M$ anwenden, und zum anderen auf die kürzeste Verbindung in M, die einen Ball um q_i mit Radius $\|v_i\| + \|w_i\|$ nicht verlässt, siehe Bemerkung 2.10.

2.44. Proposition. *Es sei $\Delta c_1 c_2 c_3$ ein Dreieck in M mit einer kürzesten Seite c_2, wobei p_3 nicht auf der Seite c_3 liege. Es sei $t_i \in (0,1)$ eine Folge mit $t_i \searrow 0$ für $i \to \infty$, es seien $b_i \colon [0,1] \to M$ kürzeste Geodätische von p_3 nach $q_i = c_3(t_i)$, und es sei α_i der Winkel bei q_i im Dreieck $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$. Dann konvergiert die Folge α_i gegen einen Winkel $\alpha_\infty \le \gamma_1$.*

Auf der anderen Seite können die einzelnen α_i durchaus größer sein als der Winkel γ_1, wie man an einem Bild leicht erkennt.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass kein Häufungspunkt α_∞ der Folge α_i größer als γ_1 ist. Sei etwa α_∞ ein Häufungspunkt, dann können wir eine Teilfolge i_j auswählen, so dass die Winkel α_{i_j} gegen α_∞ und die Geodätischen b_{i_j} gegen eine kürzeste Geodätische b_∞ von p_3 nach p_1 konvergieren. Indem wir c_2 durch b_∞ ersetzen, sehen wir, dass α_∞ der größte Häufungspunkt sein muss, aber das gilt natürlich für jeden Häufungspunkt, also kann es nur einen Häufungspunkt geben. Da alle α_i im kompakten Intervall $[0,\pi]$ liegen, folgt, dass α_i gegen α_∞ konvergiert.

Wir fixieren eine große Konstante $1 \ll \tau \in \mathbb{R}$. Für $i \to \infty$ konvergiert $L(b_i) \to \ell_2 > 0$ und $q_i \to p_1$, folglich gilt $\tau\, d(p_1, q_i) \le L(b_i)$ für alle hinreichend großen i. Wir konstruieren Punkte

$$\begin{array}{llll} & r_i \text{ auf } b_i & \text{mit} & d(r_i, q_i) = \tau\, d(p_1, q_i) \\ \text{und} & s_i \text{ auf } c_2 & \text{mit} & d(s_i, p_1) = d(r_i, p_1)\ . \end{array}$$

Für $i \to \infty$ können wir Bemerkung 2.43 (2) auf die Urbilder von p_1, r_i in $T_{q_i}M$ unter $\exp_{q_i}$ anwenden, und erhalten mit dem Cosinussatz der euklidischen Geometrie, dass

$$\begin{aligned} d(p_1, s_i)^2 &= d(p_1, r_i)^2 \\ &= d(p_1, q_i)^2 + d(q_i, r_i)^2 - 2d(p_1, q_i)\, d(q_i, r_i)\, \cos(\pi - \alpha_i) + \varepsilon_i\, d(q_i, r_i)^2 \\ &= d(p_1, q_i)^2 \left(1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i + \varepsilon_i \tau^2\right)\ , \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon_i \to 0$ für $i \to \infty$.

Genauso verfahren wir mit den Urbildern der Punkte q_i und s_i in $T_{p_1}M$ unter $\exp_{p_1}^{-1}$, und erhalten

$$\begin{aligned} d(q_i, s_i)^2 &= d(p_1, q_i)^2 + d(p_1, s_i)^2 - 2d(p_1, q_i)\, d(p_1, s_i)\, \cos\gamma_1 + \varepsilon_i'\, d(p_1, s_i)^2 \\ &= d(p_1, q_i)^2 + d(p_1, q_i)^2 \left(1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i + \varepsilon_i\tau^2\right)(1 + \varepsilon_i') \\ &\qquad - 2\, d(p_1, q_i)^2\, \cos\gamma_1 \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i + \varepsilon_i\tau^2} \\ &= d(p_1, q_i)^2 \left(2 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i - 2\, \cos\gamma_1 \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i} + \varepsilon_i''\tau^2\right)\ , \end{aligned}$$

wobei ε_i' und ε_i'' weitere Nullfolgen sind.

Mehrfaches Anwenden der Dreiecksungleichung liefert

$$\begin{aligned} d(p_1, r_i) + d(r_i, p_3) &\ge d(p_1, p_3) = d(p_1, s_i) + d(s_i, p_3) \qquad \Longrightarrow \qquad d(r_i, p_3) \ge d(s_i, p_3)\ , \\ d(q_i, s_i) + d(s_i, p_3) &\ge d(q_i, p_3) = d(q_i, r_i) + d(r_i, p_3)\ , \\ \text{also} \quad d(q_i, s_i) &\ge d(q_i, r_i) + d(r_i, p_3) - d(s_i, p_3) \\ &\ge d(q_i, r_i) = \tau\, d(p_1, q_i)\ . \end{aligned}$$

Wir kombinieren das mit der obigen Gleichung und erhalten

$$d(p_1, q_i)^2 \left(2 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i - 2\, \cos\gamma_1 \sqrt{1 + \tau^2 + 2\tau\, \cos\alpha_i} + \varepsilon_i''\tau^2\right) = d(q_i, s_i) \ge \tau^2\, d(p_1, q_i)^2\ .$$

Nach Division durch 2τ folgt im Limes $i \to 0$, dass

$$\frac{1}{\tau} + \cos\alpha_\infty - \cos\gamma_1 \sqrt{1 + \frac{1}{\tau^2} + \frac{2}{\tau}\, \cos\alpha_i} \ge 0$$

für alle $\tau \in \mathbb{R}$. Im Limes $\tau \to \infty$ gilt wegen γ_i, $\alpha_\infty \in [0,\pi]$ also

$$\cos\alpha_\infty \geq \cos\gamma_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha_\infty \leq \gamma_1 . \quad \square$$

2.45. Bemerkung. Den meisten elementargeometrischen Überlegungen hier liegt der Seitencosinussatz für M^n_κ zugrunde. Im Dreieck $\Delta\bar c_1\bar c_2\bar c_3$ in M^n_κ gilt je nachdem, ob $\kappa > 0$, $\kappa = 0$ oder $\kappa < 0$, dass

$$\begin{aligned} \cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_3\bigr) &= \cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_2\bigr) + \sin\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\sin\bigl(\sqrt{\kappa}\,\bar\ell_2\bigr)\,\cos\bar\gamma_3 ,\\ \bar\ell_3^2 &= \bar\ell_1^2 + \bar\ell_2^2 - 2\,\bar\ell_1\,\bar\ell_2\,\cos\bar\gamma_3 ,\\ \text{bzw.}\qquad \cosh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_3\bigr) &= \cosh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\cosh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_2\bigr) - \sinh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_1\bigr)\,\sinh\bigl(\sqrt{-\kappa}\,\bar\ell_2\bigr)\,\cos\bar\gamma_3 , \end{aligned}$$

siehe Übung 1 von Blatt 12. In jedem Fall hängt die Seitenlänge $\bar\ell_3$ bei festgehaltenen Längen $\bar\ell_1$ und $\bar\ell_2$ streng monoton vom Winkel $\bar\gamma_3$ ab, außer im Fall $\kappa > 0$ und $\bar\ell_1 = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ oder $\bar\ell_2 = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$.

Wir können ein (kürzestes) Vergleichsdreieck in M^n_κ mit vorgegebenen Seitenlängen $\bar\ell_1$, $\bar\ell_2$, $\bar\ell_3$ im Fall $\kappa \leq 0$ konstruieren, wenn diese Zahlen alle Dreiecksungleichungen erfüllen. Im Falle $\kappa > 0$ benötigt man zusätzlich noch die Annahme

$$\bar\ell_1 + \bar\ell_2 + \bar\ell_3 \leq \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Aus ihr folgt mit der Dreiecksungleichung auch

$$\bar\ell_1 \leq \frac{\bar\ell_1 + \ell_2 + \ell_3}{2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} , \qquad \bar\ell_2 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad \bar\ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Diese Folgerungen besagen, dass kürzeste Geodätische nicht länger als $\operatorname{diam} M^n_\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ sein können. Analog folgt aus

$$\bar\ell_1 + \bar\ell_2 + \bar\ell_3 < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

auch

$$\bar\ell_1 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} , \qquad \bar\ell_2 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad \bar\ell_3 < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} ,$$

und in diesem Fall ist das Vergleichsdreieck bis auf Isometrie eindeutig.

Zur Begründung der obigen Behauptung betrachten wir den Fall $\kappa = 1$. Falls $\ell_1 = 0$, so folgt $\ell_2 = \ell_3 \in [0,\pi]$; falls $\ell_1 = \pi$, dann folgt $\ell_3 = \pi - \ell_2 \in [0,\pi]$; analoges gilt, falls $\ell_2 \in \{0,\pi\}$ oder $\ell_3 \in \{0,\pi\}$, alle diese Sonderfälle passen zu den obigen Bedingungen.

Ansonsten seien ℓ_1, $\ell_2 \in (0,\pi)$, dann können wir das Dreieck $\Delta\bar c_1\bar c_2\bar c_3$ konstruieren, sobald den Winkel $\bar\gamma_3$ bestimmt haben. Nach obigem gilt

$$\cos\bar\gamma_3 = \frac{\cos\bar\ell_3 - \cos\bar\ell_1\,\cos\bar\ell_2}{\sin\bar\ell_1\,\sin\bar\ell_2} .$$

Das ist lösbar, wenn die rechte Seite in $[-1,1]$ liegt, wenn also

$$\begin{aligned} \pm(\cos\bar\ell_3 - \cos\bar\ell_1\,\cos\bar\ell_2) &\leq \sin\bar\ell_1\,\sin\bar\ell_2 ,\\ \text{d.h., wenn} \qquad \cos(\bar\ell_1 + \bar\ell_2) \leq \cos\bar\ell_3 &\leq \cos(\bar\ell_1 - \bar\ell_2) . \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrien der Cosinusfunktion und da $\bar\ell_1$, $\bar\ell_2$, $\bar\ell_3 \in [0,\pi]$, ist die erste Ungleichung äquivalent zu

$$\bar\ell_3 \leq \bar\ell_1 + \bar\ell_2 \qquad \text{und} \qquad \bar\ell_3 \leq 2\pi - \bar\ell_1 - \bar\ell_2 ,$$

und die zweite zu

$$\bar\ell_3 \geq \bar\ell_2 - \bar\ell_1 \qquad \text{und} \qquad \bar\ell_3 \geq \bar\ell_1 - \bar\ell_2 ,$$

aber das sind genau die oben genannten Bedingungen im Falle $\kappa = 1$.

2.46. Bemerkung. Wir betrachten zwei aneinanderstoßende Dreiecke in M^2_κ mit den Eckpunkten p, q, s beziehungsweise q, r, s. Es gelte $d(p,q)+d(q,r) \le d(p,s)+d(s,r)$, und $\angle pqs+\angle sqr \le \pi$. Elementargeometrische Überlegungen liefern folgendes.

(1) Es gilt auch $\angle psq + \angle qsr \le \pi$. Im Falle $\kappa \le 0$ würden andernfalls q und s auf der gleichen Seite der Geodätischen durch p und r liegen, und das steht im Widerspruch zur Annahme $d(p,q) + d(q,r) \le d(p,s) + d(s,r)$. Im Falle $\kappa > 0$ überlegt man sich zunächst, das die kürzeste Geodätische von p nach r auf der selben Seite der Geodätischen durch p und q liegt wie r und umgekehrt, und zwar da $\angle pqs+\angle sqr \le \pi$. Anschließend argumentiert man weiter wie im Fall $\kappa \le 0$.

(2) Es sei $r' \in M^2_\kappa$ ein Punkt mit $d(r',s) = d(r,s)$ und $d(r',p) = d(p,q) + d(q,r)$. Dann gilt $\angle qps \ge \angle r'ps$ und $\angle qrs \ge \angle pr's$. Um die erste Aussage zu zeigen, betrachten wir zunächst den Punkt r'' auf der Fortsetzung der Geodätischen durch p, q mit $d(q,r'') = d(q,r)$, mithin $d(p,r'') = d(p,r')$. Aus dem Seitencosinussatz und der Voraussetzung an die Winkel bei q folgt $d(r'',s) \ge d(r,s)$. Wiederum aus dem Seitencosinussatz folgt

$$\angle qps = \angle r''ps \ge \angle r'ps \;.$$

Die zweite Aussage folgt analog, wenn man die Punkte p und r' gemeinsam so um s dreht, dass r' auf r zu liegen kommt.

Im Beweis werden die obigen Überlegungen und Proposition 2.44 benutzt, um den Satz von Toponogov von zwei Teildreiecken auf das ganze Dreieck zu übertragen. Dazu sei $\Delta c_1c_2c_3$ wie im Satz gegeben, insbesondere sind c_1, c_2 kürzeste Geodätische. Es sei $p' = c_3(t)$ für $t \in (0,1)$, es sei a' eine kürzeste Geodätische von p' nach p_3, und es sei b' Limes einer Folge kürzester Geodätischer von p_3 nach $c_3(t_i)$, wobei $t_i \searrow t$. Es seien α', β' die Winkel bei p' in den Dreiecken $\Delta a'c_2c_3|_{[0,t]}$ und $\Delta c_1b'c_3|_{[t,1]}$.

Wir setzen die Vergleichsdreiecke Δpqs und Δqrs in M^2_κ wie oben aneinander. Die obigen Voraussetzungen sind erfüllt, denn nach den Voraussetzungen im Satz 2.41 und Proposition 2.44 gilt

$$\begin{aligned} d(p,q) + d(q,r) = L(c_3|_{[0,t]}) + L(c_3|_{[t,1]}) = \ell_3 \le \ell_1 + \ell_2 = d(r,s) + d(p,s) \\ \text{und} \qquad \angle pqs + \angle sqr \le \alpha' + \beta' \le \pi \;. \end{aligned}$$

Das oben konstruierte Dreieck mit den Ecken p, r', s ist das Vergleichsdreieck für $\Delta c_1c_2c_3$. Wenn für $\Delta a'c_2c_3|_{[0,t]}$ und $\Delta c_1b'c_3|_{[t,1]}$ der Satz von Toponogov gilt, dann folgt aus den obigen Überlegungen insbesondere

$$\begin{aligned} \bar\gamma_1 &= \angle r'ps \ge \angle qps \ge \gamma_1 \\ \text{und} \qquad \bar\gamma_2 &= \angle pr's \ge \angle qrs \ge \gamma_2 \;. \end{aligned}$$

Über die Winkel γ_3 und $\bar\gamma_3$ können wir jeoch keine Aussage machen.

Im folgenden Beweis sind alle Kurven durch $[0,1]$ parametrisiert, solange nicht anders angegeben. Gelegentlich tritt $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ als obere Schranken für gewisse Größen auf, falls $\kappa \ge 0$. Im Fall $\kappa \le 0$ werden keine oberen Schranken benötigt. Um den Beweis übersichtlicher zu halten, legen wir hiermit fest, dass $\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} = \infty$ falls $\kappa \le 0$.

Beweis des Satzes 2.41. Im Verlauf des Beweises werden wir der Reihe nach immer „größere“ Dreiecke betrachten.

(a) *Kleine Dreiecke,* vgl. Übung 2 von Blatt 12. Es sei $\Delta c_1c_2c_3$ ein Dreieck in M, so dass ein Vergleichsdreieck $\Delta\bar c_1\bar c_2\bar c_3$ in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen existiert. Es sei $\Delta\bar c_1'\bar c_2'\bar c_3$ in M^n_κ ein weiteres Dreieck mit $\bar{p}_1' = \bar{p}_1$, $\bar{p}_2' = \bar{p}_2$ und

$$L(\bar{c}_2') = L(c_2) \qquad \text{und} \qquad \bar{\gamma}_1' := \angle_{\bar{p}_1}(-\dot{\bar{c}}_2'(1), \dot{\bar{c}}_3(0)) = \gamma_1 \; .$$

Wir nehmen an, dass $\Delta c_1c_2c_3$ in folgendem Sinne *klein* bei p_1 ist: die Seite c_1 ist kürzeste und es existiere eine sternförmige Menge $U \subset T_{p_1}M$ mit $-\dot{c}_2(1), \dot{c}_3(0) \in U$, auf der $\exp_{p_1}$ lokal invertierbar ist, und eine lineare Isometrie

$$\Phi\colon T_{p_1}M \to T_{\bar{p}_1}M^n_\kappa \qquad \text{mit} \qquad \Phi(-\dot{c}_2(1)) = -\dot{\bar{c}}_2'(1) \qquad \text{und} \qquad \Phi(\dot{c}_3(0)) = \dot{\bar{c}}_3(0) \; ,$$

so dass $\bar{c}_1'$ ganz in $\exp_{\bar{p}_1}(\Phi(U))$ verläuft. Diese „kleinen" Dreiecke können bereits bedeutend größer sein als die aus Übung 2 von Blatt 12, da hier der konjugierte Radius von p_1 und nicht der Injektivitätsradius die entscheidende Rolle spielt.

Hierzu ist folgendes zu bemerken.

(1) Nach dem Satz 2.5 von Rauch ist die Entfernung von p_1 auf einer Geodätischen bis zum ersten konjugierten Punkt höchstens so groß wie in M^n_κ. Folglich ist $\exp_{\bar{p}_1}$ auf $\Phi(U)$ ebenfalls lokal invertierbar, es folgt

$$U \subset B_{\frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}}(0_p) \; ,$$

was die Ausnahmefälle $L(\bar{c}_2') = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und $L(\bar{c}_3) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ in Bemerkung 2.45 aussschließt.

(2) Im Modellraum M^n_κ ist $\exp_{\bar{p}_1}$ auf $\Phi(U)$ injektiv, es existiert also eine eindeutige Kurve

$$\exp_{\bar{p}_1}^{-1} \circ \bar{c}_1' \colon [0,1] \to \Phi(U) \subset T_{\bar{p}_1}M^n_\kappa \; .$$

(3) Diese Kurve verläuft in dem von $-\dot{\bar{c}}_2'(1)$ und $\dot{\bar{c}}_3(0)$ aufgespannten, maximal zweidimensionalen Unterraum von $T_{\bar{p}_1}M^n_\kappa$. Insbesondere hängt die Kurve

$$c_1' = \exp_{p_1} \circ \Phi^{-1} \circ \exp_{\bar{p}_1}^{-1} \circ \bar{c}_1' \colon [0,1] \to M$$

nicht von der Wahl von Φ ab.

Im Dreieck $\Delta\bar{c}_1'\bar{c}_2'\bar{c}_3$ gilt wegen Folgerung 2.6, dass

$$L(\bar{c}_1') \geq L\big(\exp_{p_1} \circ \Phi^{-1} \circ \exp_{\bar{p}_1}^{-1} \circ \bar{c}_1'\big) \geq L(c_1) = L(\bar{c}_1) \; ,$$

denn wir hatten c_1 als kürzeste Geodätische vorausgesetzt. Da bei konstanten Seitenlängen $L(\bar{c}_2')$ und $L(\bar{c}_3)$ die Länge $L(\bar{c}_1')$ nach Bemerkung 2.45 streng monoton steigend vom Winkel $\bar{\gamma}_1'$ bei $\bar{p}_1$ abhängt, folgt

$$\bar{\gamma}_1 \leq \bar{\gamma}_1' = \gamma_1 \; .$$

(*b*) *Lange, schmale Dreiecke.* Wir betrachten ein Dreieck $\Delta c_1c_2c_3$ in M vom Umfang

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} \; .$$

Wie in Proposition 2.44 seien $q_i = c_3(t_i)$ Punkte mit $t_i \searrow 0$, also $q_i \to p_1$ für $i \to \infty$. Wir dürfen daher annehmen, dass $c_3|_{[0,t_i]}$ für alle i eine kürzeste Geodätische ist. Weiterhin seien a_i kürzeste Geodätische von q_i nach p_3, die wie im Beweis der Proposition 2.44 gegen eine kürzeste Geodätische a_∞ von p_1 nach p_3 konvergieren. Wir nehmen außerdem an, dass $a_\infty(t) = c_2(1-t)$ für alle $t \in [0,1]$. Denn andernfalls könnten wir c_2 durch $a_\infty(1-\,\cdot\,)$ ersetzen, wodurch der Winkel γ_1 nach Proposition 2.44 nicht durch einen größeren Winkel ersetzt wird.

Jetzt wollen wir zeigen, dass für alle hinreichend großen i alle Winkel im Dreieck $\Delta a_ic_2c_3|_{[0,t_i]}$ nicht kleiner sind als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichssdreieck mit den gleichen Seitenlängen in M^n_κ. Dabei unterstellen wir insbesondere, dass ein eindeutiges Vergleichsdreieck existiert. Das ist aber der Fall, denn im Dreieck $\Delta c_1a_i(1-\,\cdot\,)c_3|_{[t,1]}$ sind a_i und c_1 kürzeste, also gilt die Dreiecksungleichung

$$L(c_3|_{[t,1]}) \geq d(c_3(t_1), p_2) \geq L(c_1) - L(a_i) \; .$$

Aus der Dreiecksungleichung für das ursprünglich Dreieck $\Delta c_1 c_2 c_3$ schließen wir

$$L(c_3|_{[0,t]}) = L(c_3) - L(c_3|_{[t,1]}) \le L(c_1) + L(c_2) - L(c_1) + L(a_i) = L(c_2) + L(a_i)$$
$$\text{und} \qquad L(a_i) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]}) \le L(c_1) + L(c_3|_{[t,1]}) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]}) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$$

falls $\kappa > 0$. Die anderen beiden Dreiecksungleichungen folgen wie oben, da a_i und c_2 kürzeste Geodätische sind. Wegen Bemerkung 2.45 existiert also ein bis auf Isometrie eindeutiges Vergleichsdreieck $\Delta \bar{a}_i \bar{c}_2 \bar{c}'_{3,i}$ zu $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$.

Die Vereinigung K der Seiten c_2, c_3 und aller a_i ist kompakt, es folgt $\rho := \inf_{p\in K} \rho(p) > 0$. Für $\varepsilon > 0$ klein genug gilt

$$p' := c_2(1-\varepsilon) \in B_{\frac{\rho}{4}}(p_1) \qquad \text{und} \qquad q'_i := a_i(\varepsilon) \in B_{\frac{\rho}{4}}(q_i)\ .$$

Außerdem konvergiert $q'_i \to p'$ für $i \to \infty$. Es sei c'_i die kürzeste Geodätische von p' nach q'_i; diese ist für alle (hinreichend großen) i eindeutig.

Da c_2 und alle a_i kürzeste Geodätische sind, ist p' wegen Proposition 1.110 längs c_2 weder zu p_1 noch zu p_3 konjugiert, und q'_i längs a weder zu p_3 noch zu q_i. Folglich existiert ein $\varepsilon' > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) an allen Punkten in $T_{p'}M$ im Abstand $< \varepsilon'$ von $\exp_{p'}^{-1}(c_2)$ ist $\exp_{p'}$ lokal invertierbar;
(2) an allen Punkten in $T_{q'_i}M$ im Abstand $< \varepsilon'$ von $\exp_{q'_i}^{-1}(a_i)$ ist $\exp_{q'_i}$ lokal invertierbar; und
(3) an allen Punkten in $T_{p_3}M$ im Abstand $< \varepsilon'$ von $\exp_{p_3}^{-1}\big(c_2|_{[0,1-\varepsilon]} \cup \bigcup_i a_i|_{[\varepsilon,1]}\big)$ ist $\exp_{p_3}$ lokal invertierbar.

Für alle (hinreichend großen) i sind daher die folgenden Schlüsse möglich.

Das Dreieck mit den Ecken p', q'_i und p_3 ist klein um jeden seiner Punkte im Sinne von Schritt (a), folglich sind seine Winkel nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ mit gleichen Seitenlängen. Das gleiche gilt für das Dreieck mit den Ecken p_1, q'_i und p'. Damit sind nach Bemerkung 2.46 die Winkel bei p_1 und p_3 im Dreieck mit der Seite c_2 und gegenüberliegender Ecke q'_i ebenfalls nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ.

Dieses Dreieck ist aber auch klein um q'_i für (hinreichend große) i, da die Vergleichsdreiecke gegen ein entartetes Dreieck vom Umfang kleiner $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ konvergieren, und daher die Strecke $\Phi^{-1} \circ \exp_{\bar{p}_1}^{-1} \bar{c}'_1$ im Beweis von (a) für große i in einer Teilmenge von $T_{q'_i}M$ verläuft, auf der $\exp_{q'_i}$ lokal invertierbar ist. Also ist auch der Winkel bei q'_i im Dreieck mit der Seite c_2 und gegenüberliegender Ecke q'_i ebenfalls nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ.

Schließlich gilt das gleiche auch für das Dreieck mit den Ecken p, q_i und q'_i. Wieder nach nach Bemerkung 2.46 sind die Winkel bei q'_1 und p_3 im Dreieck $\Delta a_1 c_2 c_3|_{[0,t_i]}$ nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ.

Wir können aber auch spiegelbildlich argumentieren, indem wir die Rollen von p_1 und q_i sowie von p' und q'_i vertauschen, und erhalten die entsprechende Aussage dann auch für den Winkel bei p_1.

Wir fassen zusammen. Sei $\Delta c_1 c_2 c_3$ ein Dreieck wie im Satz 2.41 und vom Umfang $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Dann existiert $t > 0$ und eine kürzeste Verbindung a von $c_3(t)$ nach p_3, so dass die Winkel bei p_1 und p_3 im Dreieck $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t]}$ nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ mit gleichen Seitenlängen sind.

(c) *Dreiecke von kleinem Umfang.* Wir nehmen wieder an, dass der Umfang von $\Delta c_1 c_2 c_3$ kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ ist, und dass c_1 und c_2 kürzeste Geodätische sind.

Wir wollen die Behauptung des Satzes für den Winkel γ_1 beweisen, dazu definieren wir eine Menge

$$I := \left\{ t \in (0,1) \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Es gibt eine kürzeste Geodätische } a \text{ von } c_3(t) \text{ nach } p_3\text{, so dass die Winkel} \\ \text{bei } p_1 \text{ und } c_3(t) \text{ im Dreieck } \Delta a c_2 c_3|_{[0,t]} \text{ nicht kleiner ist als die entsprechen-} \\ \text{den Winkel in einem Vergleichsdreieck in } M^n_\kappa \text{ mit gleichen Seitenlängen.} \end{array} \right\} .$$

Wie in Schritt (b) schließen wir, dass alle Dreiecke $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t]}$ in der Definition von I tatsächlich eindeutige Vergleichsdreiecke besitzen.

Wegen Schritt (b) ist die Menge I nicht leer, falls $c_2(1-\,\cdot\,)$ Limes von kürzesten Verbindungen von $c_3(t_i)$ nach p_3 für $t_i \to 0$ ist. Aber wegen Proposition 2.44 ist diese Voraussetzung nicht nötig, solange uns der Winkel bei p_3 nicht interessiert. Somit ist I nicht leer.

Es gilt $\sup I \in I$, denn für eine geeignete Folge $t_i \nearrow t_\infty := \sup I$ konvergieren die kürzesten Geodätischen a_i von $c_3(t_i)$ nach p_3 gegen eine kürzeste Geodätische a_∞ von $c_3(t_\infty)$ nach p_3. Gleichzeitig konvergieren auch die Seitenlängen und Winkel der Dreiecke $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$ gegen die des Dreiecks $\Delta a_\infty c_2 c_3|_{[0,t_\infty]}$. Insbesondere ist die Dreiecksungleichung im Limes noch erfüllt, und der Umfang bleibt mit dem Argument aus Schritt (b) kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, so dass die Vergleichsdreiecke in M^n_κ für $\Delta a_i c_2 c_3|_{[0,t_i]}$ mit gemeinsamer Seite $\bar c_2$ gegen ein Vergleichdreieck für $\Delta a_\infty c_2 c_3|_{[0,t_\infty]}$ konvergieren. Im Limes sind die Winkel bei p_1 und $c_3(t_\infty)$ ebenfalls nicht kleiner als die Winkel in diesem Vergleichdreieck.

Wir nehmen an, dass $t_0 = \sup I < 1$ und wählen eine kürzeste Geodätische b von p_3 nach $c_3(t_0)$ als Limes einer Folge kürzester Geodätischer von p_3 nach $c_3(t'_i)$, wobei $t'_i \searrow t_0$. Dann betrachten wir das Dreieck $\Delta c_1 b c_3|_{[t_0,1]}$. Wie oben existiert $t_1 \in (t_0, 1]$ und eine kürzeste Geodätische a von $c_3(t_1)$ nach p_3, so dass das Dreieck $\Delta a b c_3|_{[t_0,t_1]}$ die Dreiecksungleichung erfüllt, Umfang $< \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ besitzt, und die Winkel bei $c(t_0)$, $c(t_1)$ nicht kleiner als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichdreieck in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen sind. Wir können also Bemerkung 2.46 anwenden und sehen, dass die Winkel bei p_1 und $c_3(t_1)$ im Dreieck $\Delta a c_2 c_3|_{[0,t_1]}$ nicht kleiner sind als die entsprechenden Winkel in einem Vergleichsdreieck in M^n_κ mit den gleichen Seitenlängen.

Der Fall $\max I < 1$ ist damit zum Widerspruch geführt. Für das Vergleichdreieck $\Delta \bar c_1 \bar c_2 \bar c_3$ mit den gleichen Seitenlängen folgt hieraus $\gamma_1 \geq \bar\gamma_1$, allerdings können wir über γ_2 (noch) nichts aussagen. Die entsprechende Aussage für γ_2 erhalten wir, indem wir die Rollen von p_1 und p_2 vertauschen, oder mit dem folgenden Argument. Wie oben kann man zeigen, dass es $t_i \in I$ gibt mit $t_i < 1$, $t_i \nearrow 1$, und der Satz gilt für den Winkel γ'_2 bei p_2 im Dreieck $\Delta a_\infty c_2 c_3$, wobei a_∞ Häufungspunkt von kürzesten Geodätischen von $c_3(t_i)$ nach p_3 ist. Wegen Proposition 2.44 gilt der Satz dann auch für $\Delta c_1 c_2 c_3$, da $\gamma_2 \geq \gamma'_2 \geq \bar\gamma_2$.

Also gilt der Satz für alle Dreiecke, die den Voraussetzungen des Satzes genügen und deren Umfang kleiner als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ ist. Im Falle $\kappa \leq 0$ trifft das auf jedes Dreieck zu, und der Satz ist bewiesen.

(d) *Dreiecke von großem Umfang.* Ab jetzt gelte also $\kappa > 0$. Es sei zunächst $\Delta c_1 c_2 c_3$ wie im Satz gegeben, und es gelte

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Im Falle $L(c_3) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ folgt $L(c_1) + L(c_2) = L(c_3)$. Also finden wir ein Vergleichsdreieck $\Delta \bar c_1 \bar c_2 \bar c_3$ mit $\bar\gamma_1 = \bar\gamma_2 = 0$, und der Satz ist bewiesen. Falls $\gamma_1 = \gamma_2 = \pi$, ist der Satz ebenfalls bewiesen, indem man als Vergleichsdreieck einen unterteilten Großkreis wählt.

Andernfalls gilt $L(c_3) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ und o.B.d.A. $\gamma_1 < \pi$. Wir wählen eine Folge $t_i \searrow 0$ und kürzeste Geodätische b_i von p_3 nach $c_3(t_i)$. Wegen Proposition 2.44 dürfen wir annehmen, dass die b_i gegen c_2 konvergieren. Wegen $\gamma_1 < \pi$ ist die Dreiecksungleichung im Dreieck mit den Ecken p_1, $c_3(t_i)$ und p_3

für große i strikt, und wir erhalten

$$L(c_1) + L(b_i) + L(c_3|_{[t_i,1]}) < L(c_1) + L(c_2) + L(c_3|_{[0,t_i]}) + L(c_3|_{[t_i,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Somit gilt der Satz für die Dreiecke $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$. Außerdem gilt

$$L(c_1) \leq \frac{L(c_1) + L(b_i) + L(c_3|_{[t_i,1]})}{2} < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Falls auch $L(c_2) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, so konvergieren die Vergleichsdreiecke für $i \to \infty$ gegen ein Vergleichsdreieck, dessen drei Winkel alle π sind. Insbesondere folgt $\gamma_2 = \pi$ und $\alpha_i \to \pi$, wegen Proposition 2.44 also auch $\gamma_1 = \pi$ im Widerspruch zur Annahme.

Es bleibt der Fall $L(c_2) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$, aber daraus folgt

$$L(c_1) + L(c_3) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} - L(c_2) = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Wäre $\gamma_2 < \pi$, so könnte man den Weg von p_1 über p_2 nach p_3 zu einem Weg der Länge $< \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ abkürzen. Also muss $\gamma_2 = \pi$ gelten, da c_2 kürzeste ist. Wir können ein Vergleichsdreieck mit $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$ wählen, und der Satz ist auch in diesem Fall bewiesen.

(*e*) *Dreiecke von übergroßem Umfang.* Es bleibt nur der Fall $\kappa > 0$ und

$$L(c_1) + L(c_2) + L(c_3) > \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

In diesem Fall gäbe es kein Vergleichsdreieck in M^n_κ, also ist zu zeigen, dass dieser Fall nicht eintritt.

Aus dem Satz 2.5 von Rauch oder dem Satz 2.14 von Bonnet-Myers folgt

$$L(c_1) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad L(c_2) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Nach Voraussetzung gilt auch $L(c_3) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$. Wegen der Stetigkeit der Abstandsfunktion existiert $t \in (0,1)$ mit

$$L(c_1|_{[0,1-t]}) + d(c_1(1-t), c_3(t)) + L(c_3|_{[t,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Da $t > 0$ folgt

$$L(c_1|_{[0,1-t]}) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} \qquad \text{und} \qquad L(c_3|_{[t,1]}) < \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} ,$$

also gilt $\gamma_2 = \pi$ wie in Schritt (*d*). Analog zeigt man auch $\gamma_1 = \pi$.

Es sei jetzt $t \in [0,1]$ minimal mit

$$L(c_1) + d(c_3(t), p_3) + L(c_3|_{[t,1]}) = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} ,$$

es sei t_i eine Folge mit $t_i \nearrow t$ und b_i eine Folge kürzester Geodätischer von p_3 nach $c_3(t_i)$. Dann haben die Dreiecke $\Delta c_1 b_i c_3|_{[t_i,1]}$ Umfang größer als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$, folglich sind die Winkel bei $c_3(t_i)$ wie oben stets π. Daraus folgt aber, dass b_i für alle i auf der Vereinigung von c_2 und $c_3|_{[0,t_i]}$ verläuft. Analoges gilt für die kürzeste Geodätische $b := \lim_{i\to\infty} b_i$, aber $L(b) < L(c_2) + L(c_3|_{[0,t]})$. Also ist $p_3 = b(0) \neq p_1$ entweder ein innerer Punkt auf c_2, was unmöglich ist, da c_2 kürzeste ist, oder auf $c_3|_{[0,t]}$ etwa $p_3 = c_3(t')$ mit $t' > 0$. Aber das führt auf einen Widerspruch, da

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} = L(c_1) + L(b) + L(c_3|_{[t,1]}) = L(c_1) + L(c_3|_{[t',1]}) < \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}} .$$

Folglich können Dreiecke vom Umfang größer als $\frac{2\pi}{\sqrt{\kappa}}$ nicht existieren, und der Satz ist vollständig bewiesen. □

Für die Anwendung des Satzes von Toponogov benötigen wir eine Übertragung des Satzes von der Situation SSS (Seite-Seite-Seite) auf die Situation SWS (Seite-Winkel-Seite).

2.47. Folgerung. *Es sei (M, g) vollständige Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $K \geq \kappa$, und es sei $\Delta c_1 c_2 c_3$ ein Dreieck in M mit kürzesten Seiten c_1 und c_2, und mit $\ell_3 \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ falls $\kappa > 0$. Dann existiert ein Vergleichsdreieck $\Delta \bar{c}_1 \bar{c}_2 \bar{c}_3$ in M mit $\bar{\gamma}_1 = \gamma_1$, $\bar{\ell}_2 = \ell_2$ und $\bar{\ell}_3 = \ell_3$, und es gilt $\ell_1 \leq \bar{\ell}_1$.*

Beweis. Das Vergleichsdreieck existiert in der Situation SWS immer und ist bis auf Isometrie eindeutig. Wir unterscheiden zwei Fälle.

(1) Es gilt die Dreiecksungleichung $\ell_3 \leq \ell_1 + \ell_2$. In diesem Fall liefert der Satz 2.41 von Toponogov ein weiteres Vergleichsdreieck $\Delta \bar{c}_1' \bar{c}_2' \bar{c}_3$ mit den gleichen Seitenlängen wie $\Delta c_1 c_2 c_3$ und einem Winkel $\bar{\gamma}_1' \leq \gamma_1 = \bar{\gamma}_1$. Aus Bemerkung 2.45 folgt $\ell_1 = \bar{\ell}_1' \leq \bar{\ell}_1$.

(2) Falls die obige Dreiecksungleichung verletzt ist, folgt aus der Dreiecksungleichung im Vergleichsdreieck, dass
$$\ell_1 < \ell_3 - \ell_2 = \bar{\ell}_3 - \bar{\ell}_2 \leq \bar{\ell}1 . \quad \square$$

Eine weitere interessanten Anwendung des Satzes von Toponogov war früher der topologische Sphärensatz. Wir erwähnen diesen Satz nur noch, denn mittlerweile ist der weitaus stärkere differenzierbare Spährensatz bewiesen. Bevor wir diesen formulieren, betrachten wir einen wichtigen Grenzfall.

2.48. Beispiel. Es sei (M, g) der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ der (reellen) Dimension $2n$ mit $n \geq 2$, versehen mit der Fubini-Study-Metrik wie jeweils in den Aufgaben 1 und 4 auf Blatt 5 und 10. Wir hatten dort gesehen, dass die Schnittkrümmung die Ungleichung $1 \leq K(E) \leq 4$ für alle Ebenen $E \subset TM$ erfüllt. Dabei wird $K = 1$ angenommen für reelle Ebenen $E = \operatorname{span}\{v, w\}$ mit $w \perp \{v, iv\}$, und $K = 4$ für komplexe Ebenen $E = \operatorname{span}\{v, iv\}$. Reskalierung um den Faktor $\frac{1}{2}$ liefert eine Metrik mit $\frac{1}{4} \leq K \leq 1$.

Der komplex projektive Raum ist nicht homöomorph zur Sphäre S^{2n}; es gibt mehrere Möglichkeiten, das zu sehen — allerdings leider nicht mit den Mitteln dieser Vorlesung.

(1) Die Räume haben unterschiedliche Euler-Charakteristiken
$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n + 1 > 2 = \chi(S^{2n}) ,$$
das folgt etwa durch Angabe von Zellzerlegungen oder aus dem Lefschetzschen Fixpunktsatz.

(2) Die Räume haben andere (Ko-) Homologiegruppen. Für $1 \leq k < n$ gilt nämlich
$$H^{2k}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \ncong 0 = H^{2k}(S^{2n}; \mathbb{Z}) .$$
Das folgt wahlweise aus der Existenz einer Morse-Funktion mit kritischen Punkten in den Geraden 0, 2, …, $2n$ oder einer entsprechenden Zellzerlegung von $\mathbb{C}P^n$, oder aus der Leray-Spektralsequenz für das Faserbündel $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$.

(3) Die Räume haben eine unterschiedliche zweite Homotopiegruppe
$$\pi_2(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z} \ncong 0 = \pi_2(S^{2n}) .$$
Das folgt etwa aus der langen exakten Sequenz der Homotopiegruppen im Bündel $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$, oder aus (1) und dem Satz von Hurewicz.

2.49. Satz (Topologischer Sphärensatz; Berger, Klingenberg). *Es sei M eine orientierbare, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ mit Schnittkrümmung $\kappa \leq K \leq 1$, wobei $\kappa > \frac{1}{4}$. Dann ist M homöomorph zur Sphäre S^{2n}.*

Beispiel 2.48 zeigt, dass $\frac{1}{4} < \kappa$ notwendig ist. Der Satz gilt auch im ungerade-dimensionalen Fall, wenn man außerdem „orientierbar“ durch „einfach zusammenhängend“ ersetzt.

Beweis. Zunächst wissen wir aus dem Satz 2.14 von Bonnet-Myers und dem Satz 2.37 von Klingenberg, dass

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} < \pi \leq \rho(M) \leq \operatorname{diam}(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}} < 2\pi \ .$$

Insbesondere ist M kompakt wegen Folgerung 1.100. Wir finden also Punkte p, $q \in M$ mit

$$d(p,q) = \operatorname{diam}(p,q) \ .$$

Da $\rho(M) \geq \pi$, erhalten wir Diffeomorphismen

$$\exp_p \colon B_\pi(0_p) \to B_\pi(p) \qquad \text{und} \qquad \exp_q \colon B_\pi(0_q) \to B_\pi(q) \ .$$

Wir zeigen zunächst, dass $M = B_\pi(p) \cup B_\pi(q)$, anschließend konstruieren wir den gesuchten Homöomorphismus.

Es sei $v \in T_pM \setminus \{0\}$. Wir zeigen, dass es eine kürzeste Geodätische $c \colon [0,1] \to M$ von p nach q mit $\angle_p(\dot{c}(0), v) \leq \frac{\pi}{2}$ gibt. Dazu betrachte die Geodätische c_v mit $c_v(0) = p$ und Startvektor $\dot{c}_v(0) = v$. Zu jedem $t > 0$ sei $c_t \colon [0,1] \to M$ eine kürzeste Verbindung von $c_v(t)$ nach q. Falls es eine Folge t_i gibt mit $t_i > 0$ und

$$\angle_{c_v(t_i)}(\dot{c}_v(t_i), \dot{c}_{t_i}(0)) \leq \frac{\pi}{2}$$

für alle i, so dass $t_i \searrow 0$, dann konvergiert eine Teilfolge der c_{t_i} gegen eine kürzeste Verbindung c mit

$$\angle_p(\dot{c}(0), v) \leq \frac{\pi}{2} \ .$$

Andernfalls erhalten wir einen Widerspruch wie folgt. Es gibt ein $t_0 > 0$, so dass

$$\angle_{c_v(t)}(\dot{c}_v(t), \dot{c}_t(0)) > \frac{\pi}{2} \qquad \text{für alle } t \in (0, t_0) \ .$$

Zu jedem $t > 0$ konstruiere eine Variation von $c_t = \gamma_0$ durch Kurven $\gamma_s \colon [0,1] \to M$ mit $\gamma_s(0) = c_v(t-s)$ und $\gamma_s(1) = q$. Aus der ersten Variationsformel aus Satz 1.64 folgt dann

$$\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} L(\gamma_s) = \left\langle \frac{\dot{c}_t(0)}{\|\dot{c}_t(0)\|}, \dot{c}_v(t) \right\rangle < 0 \ ,$$

insbesondere existiert ein $t' \in [0,t)$, so dass

$$d(c_v(u), q) = L(c_u) \leq L(\gamma_{t-u}) < L(c_t) = d(c_v(t), q) \qquad \text{für alle } u \in (t', t) \ .$$

Da dieses Argument für alle $t \in (0, t_0)$ funktioniert, ist die Funktion $t \mapsto d(c_v(t), q)$ streng monoton steigend auf dem Intervall $(0, t_0)$, im Widerspruch zur Maximalität von $d(p,q) = d(c(0), q) = \operatorname{diam}(M)$.

Wir betrachten jetzt einen weiteren Punkt $r \in M \setminus B_\pi(p)$ und wählen kürzeste Geodätische a, $b \colon [0,1] \to M$ von q nach r und von r nach p. Nach dem soeben gezeigten finden wir eine kürzeste Geodätische c von p nach q mit

$$\alpha = \angle_p(-\dot{b}(1), \dot{c}(0)) \leq \frac{\pi}{2} \ .$$

Es seien $\Delta\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ und $\Delta\bar{a}'\bar{b}'\bar{c}$ Vergleichsdreiecke in M^n_κ mit Seitenlängen

$$L(\bar{b}) = L(\bar{b}') = L(b) \in \left[\pi, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right] \qquad \text{und} \qquad L(\bar{c}) = L(c) \in \left[\pi, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right] \subset \left(\frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}}, \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}\right]$$

und eingeschlossenen Winkeln

$$\bar{\alpha} = \alpha \quad \leq \quad \bar{\alpha}' = \frac{\pi}{2} \ .$$

Mit dem Seitencosinussatz für $\kappa > 0$ berechnen wir

$$\cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,L(\bar a')\bigr) = \underbrace{\cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,L(\bar b')\bigr)}_{<0} \cdot \underbrace{\cos\bigl(\sqrt{\kappa}\,L(\bar c)\bigr)}_{<0} > 0\ ,$$

und aus Bemerkung 2.45 und der Folgerung 2.47 aus dem Satz von Toponogov folgt

$$L(a) \le L(\bar a) \le L(\bar a') < \frac{\pi}{2\sqrt{\kappa}} < \pi\ .$$

Somit $r \in B_\pi(q)$, und da r beliebig war, folgt insgesamt

$$M = B_\pi(p) \cup B_\pi(q)\ .$$

Es sei wieder c_v eine Geodätische mit Startvektor $v \in S_pM$. Wir wenden den Zwischenwertsatz auf die Funktion

$$f_v\colon [0,\pi] \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad f_v(t) = d(c_v(t),q) - d(c_v(t),p) = d(c_v(t),q) - t$$

an. Da $f_v(0) = \operatorname{diam}(M) > 0$ und nach dem obigen $f_v(\pi) < 0$, finden wir einen Wert $\ell_v \in (0,\pi)$ mit $f_v(\ell_v) = 0$. Insbesondere ist $c_v(\ell_v)$ von p und q gleich weit entfernt.

Der Wert ℓ_v ist auch eindeutig. Denn sei $f_v(\ell) = f_v(\ell') = 0$ für $\ell < \ell' < \pi$, dann folgt

$$d(c_v(\ell'),q) = d(c_v(\ell'),p) = d(c_v(\ell'),c_v(\ell)) + d(c_v(\ell),p) = d(c_v(\ell'),c_v(\ell)) + d(c_v(\ell),q)\ .$$

Aber das ist nur möglich, wenn q auch auf der Geodätischen c_v liegt, und zwar auf der gleichen Seite von $c_v(\ell')$ wie $c_v(\ell)$ und im gleichen Abstand wie p. Es folgt also $p = q$, ein Widerspruch.

Aus der Stetigkeit der Abstandsfunktionen und der Eindeutigkeit von $\ell(v) := \ell_v$ folgt leicht, dass die Funktion ℓ auf S_pM stetig ist. Mit dem Gauß-Lemma ließe sich sogar zeigen, dass ℓ differenzierbar ist.

Um einen Homöomorphismus $F\colon S^{2n} \to M$ zu konstruieren, fixieren wir zunächst eine Isometrie $\Phi\colon S^{2n-1} \to S_pM$. Dann definieren wir

$$F\begin{pmatrix}\sin h \cdot x\\ \cos h\end{pmatrix} = \begin{cases} \exp_p\bigl(\frac{2h}{\pi}\,\ell_{\Phi(x)}\,\Phi(x)\bigr) & \text{für } h \in [0,\frac{\pi}{2}]\ \text{, und}\\ \exp_q\bigl(\bigl(2 - \frac{2h}{\pi}\bigr)\ (\exp_q^{-1}\circ\exp_p)\bigl(\ell_{\Phi(x)}\cdot\Phi(x)\bigr)\bigr) & \text{für } h \in [\frac{\pi}{2},\pi]\ . \end{cases}$$

für alle $h \in [0,\pi]$ und alle $x \in S^{2n-1}$. Man beachte insbesondere, dass die Definitionen für $h = \frac{\pi}{2}$ zusammenpassen, und dass $h = 0$ bzw. $h = \pi$ unabhängig von x stets den Wert p bzw. q liefern. Es folgt die Stetigkeit von F.

Es sei $S^{2n}_\pm \subset S^{2n}$ die Menge der Punkte mit $\pm h \ge 0$. Man sieht leicht, dass F auf der abgeschlossenen Nordhalbkugel S^{2n}_+ injektiv ist, da $\exp_p$ auf ganz $B_\pi(p)$ injektiv ist, und da $\ell_v < \pi$ für alle $v \in T_pM$. Mit dem gleichen Argument ist auch $F|_{S^{2n}_-}$ injektiv. Nun gilt aber

$$r \in F(S^{2n}_\pm) \quad\Longleftrightarrow\quad \pm(d(p,r) - d(q,r)) \ge 0$$

für alle $r \in M$. und hieraus folgt globale Injektivität.

Zur Surjektivität betrachte wieder $r \in M$. Falls $d(p,r) - d(q,r) \ge 0$, betrachte die kürzeste Geodätische $c_v\colon [0, d(p,r)]$ von p nach r mit Startvektor $v \in S_pM$, dann gilt

$$r = F\begin{pmatrix}\sin h \cdot x\\ \cos h\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = \Phi^{-1}(v) \quad \text{und} \quad h = \frac{\pi\, d(p,r)}{2\ell_v}\ .$$

Falls $d(p,r) - d(q,r) \le 0$, betrachte die kürzeste Geodätische $c_w\colon [0, d(q,r)]$ von q nach r mit Startvektor $w \in S_pM$. Wie oben existiert genau ein ℓ_w, so dass $d(c_w(\ell_w),p) = d(c_w(\ell_w),q)$. Es folgt

$$r = F\begin{pmatrix}\sin h \cdot x\\ \cos h\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad x = \Phi^{-1}\biggl(\frac{(\exp_p^{-1}\circ\exp_q)(\ell_w\cdot w)}{\ell_w}\biggr) \quad \text{und} \quad h = \pi - \frac{\pi\, d(q,r)}{2\ell_w}\ .$$

Ein einfaches topologisches Argument zeigt, dass bijektive, stetige Abbildungen zwischen Kompakta Homöomorphismen sind. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

2.50. Satz (Differenzierbarer Sphärensatz; Brendle-Schoen). *Es sei M kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, und für alle $p \in M$ und alle Ebenen E, $E' \subset T_pM$ gelte $0 < K(E') \leq 4K(E)$. Dann ist M entweder diffeomorph zu einer Sphäre S^n oder isometrisch zum komplex projektiven Raum $\mathbb{C}P^k$, zum quaternionisch projektiven Raum $\mathbb{H}P^k$, oder zur Cayley-Ebene $\mathbb{O}P^2$.*

KAPITEL 3

Lie Gruppen und symmetrische Räume

Im zweiten Teil der Vorlesung geht es im weitesten Sinne um sogenannte „spezielle Holonomie“. Das heißt mit anderen Worten, es geht um zusätzliche parallele geometrische Strukturen oder Größen auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. In diesem Kapitel beginnen wir mit der einfachsten und zugleich speziellsten Situation, in der dieses Phänomen auftaucht. Symmetrische Räume enthalten soviel „parallele Strukturen“, das sie starr genug sind, um komplett mit Methoden der Algebra beschrieben werden zu können. Das tun mit mit Hilfe von Lie-Gruppen. Später treten Lie-Gruppen wieder als Holonomiegruppen Riemannscher Mannigfaltigkeiten auf. Als erstes Beispiel untersuchen wir die Holonomiegruppen symmetrischer Räume. Als Begleitbuch empfehle ich das Buch von Besse [**Be**].

3.1. Symmetrische und lokal symmetrische Räume

Wir geben drei auf den ersten Blick unterschiedliche Begriffe und zeigen dann, wie sie miteinander zusammenhängen.

3.1. Definition. Es sei (M, g^{TM}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit.

(1) Wir nennen (M, g^{TM}) einen *Riemannschen symmetrischen Raum,* wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Isometrie I_p von M mit Fixpunkt p und $d_pI_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$ gibt. Wir nennen I_p auch die (*Punkt-*) *Spiegelung am Punkt p.*
(2) Wir nennen (M, g^{TM}) einen *Riemannschen homogenen Raum,* wenn es zu je zwei Punkten p, $q \in M$ eine Isometrie F von M mit $F(p) = q$ gibt.
(3) Wir nennen (M, g^{TM}) einen *Riemannschen lokalsymmetrischen Raum,* wenn die kovariante Ableitung des Krümmungstensors verschwindet, das heißt, wenn für alle U, V, W, $X \in \mathfrak{X}(M)$ gilt, dass
$$0 = (\nabla_X R)_{Y,Z}W = \nabla_X(R_{Y,Z}W) - R_{\nabla_X Y,Z}W - R_{Y,\nabla_X Z}W - R_{Y,Z}\nabla_X W\ .$$

Man kann symmetrische und homogene Räume auch in anderen Kontexten betrachten. Daher haben wir hier das Adjektiv „Riemannsch“ hinzugefügt. Da wir in Zukunft nur noch Riemannsche homogene oder symmetrisch Räume betrachten wollen, lassen wir das Adjektiv ab sofort weg.

3.2. Beispiel. Wir betrachten die drei einfachsten Beispiele.

(1) Der Euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, g^{\mathrm{eukl}})$ ist ein symmetrischer Raum. Für $p \in \mathbb{R}^n$ beschreibt
$$I_p(q) = 2p - q$$
die Punktspiegelung, die offensichtlich eine Isometrie ist. Der Euklidische Raum ist auch homogen, mit Isometriegruppe
$$E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes O(n) \qquad \text{wobei} \qquad (v, A)(q) = v + A \cdot q \in \mathbb{R}^n$$
für alle v, $q \in \mathbb{R}^n$ und $A \in O(n)$. Dabei bedeutet das Symbol „$\rtimes$“, dass Gruppenelemente nicht komponentenweise multipliziert werden, sondern
$$(v, A) \cdot (w, B) = (v + Aw, AB)\ .$$

Da der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet, ist er offensichtlich parallel, also ist $(\mathbb{R}^n, g^{\text{eukl}})$ auch lokalsymmetrisch.

(2) Es sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n, +$ eine diskrete Untergruppe der additiven Gruppe des Vektorraums $\mathbb{R}^n$. Dann übertragen sich die obigen Symmetrien auf den Quotienten $\mathbb{R}^n/\Gamma$, denn sei $\gamma \in \Gamma$ und p, $q \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$I_p(q+\gamma) = 2p - q - \gamma = I_p(q) - \gamma \ ,$$

und $-\gamma \in \Gamma$. Insbesondere sind flache Tori symmetrische Räume; hierbei wird $\Lambda \cong \mathbb{Z}^n$ erzeugt von einer Basis von $\mathbb{R}^n$.

(3) Die Sphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit der vom Euklidischen Raum induzierten runden Metrik ist ebenfalls symmetrisch, mit $I_p(q) = -q + 2\langle p, q\rangle\, p$. Die Isometriegruppe ist $O(n+1)$. Der Krümmungstensor lässt sich schreiben als

$$R_{X,Y}Z = \langle Y, Z\rangle\, X - \langle X, Z\rangle\, Y \ .$$

Da die Metrik nach Definition 1.39 (2) parallel ist, ist R ebenfalls parallel.

(4) Wir haben in Beispiel 1.36 das Poincaré-Modell $(B_1^n(0), g^{\text{hyp}})$ des hyperbolischen Raums kennengelernt. Am einfachsten lässt sich die Punktspiegelung am Punkt p geoemtrisch beschreiben: man läuft von einem beliebigen Punkt q entlang der eindeutigen Geodätischen durch den Punkt p bis zum Punkt p und dann noch einmal so weit, und endet am Punkt $I_p(q)$. In Satz 3.4 sehen wir, dass I_p dann eine Isometrie ist. Die Isometriegruppe ist die Lorentz-Gruppe

$$SO(n,1) = \left\{ A \in M_{n+1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^t \left(\begin{smallmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) A = \left(\begin{smallmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \ .$$

Ihre Wirkung wollen wir hier nicht angeben. Wir müssen aber noch den Krümmungstensor betrachten: er ist wieder parallel, und wird gegeben durch

$$R_{X,Y}Z = \langle X, Z\rangle\, Y - \langle Y, Z\rangle\, X \ .$$

Man beachte, dass die Krümmungstensoren sich in der obigen Darstellung nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden. Tatsächlich bilden Sphäre und hyperbolischer Raum ein Paar zueinander dualer symmetrischer Räume, siehe Bemerkung 3.18.

3.3. Proposition. *Symmetrische Räume sind vollständig. Zusammenhängende symmetrische Räume sind homogen. Symmetrische Räume sind lokal symmetrisch.*

Beweis. Wir benutzen den Satz 1.95 von Hopf-Rinow, um Vollständigkeit zu zeigen. Dazu sei $p \in M$ beliebig, und $c\colon (-a,a) \to M$ sei eine beliebige Geodätische durch $p = c(0)$. Es sei $q = c\big(\frac{a}{2}\big)$. Da Isometrien Geodätische auf Geodätische abbilden, ist die Kurve $I_q \circ I_p \circ c\colon (-a,a) \to M$ wieder eine Geodätische.

Zunächst gilt

$$(I_p \circ c)(0) = I_p(p) = p = c(0) \qquad \text{und} \qquad (I_p \circ c)^{\cdot}(0) = d_pI_p\big(\dot c(0)\big) = -\dot c(0) \ .$$

Da Geodätische durch Anfangspunkt und Anfangsvektor eindeutig bestimmt sind, folgt

$$(I_p \circ c)(t) = c(-t) \qquad \text{für alle } t \in (-a,a) \ .$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} &(I_q \circ I_p \circ c)\Big(-\frac{a}{2}\Big) = (I_q \circ c)\Big(\frac{a}{2}\Big) = I_q(q) = q = c\Big(\frac{a}{2}\Big) \\ \text{und}\qquad &(I_q \circ I_p \circ c)\Big(-\frac{a}{2}\Big) = d_qI_q\bigg((I_p \circ c)^{\cdot}\Big(-\frac{a}{2}\Big)\bigg) = d_qI_q\bigg(-\dot c\Big(\frac{a}{2}\Big)\bigg) = \dot c\Big(\frac{a}{2}\Big) \ . \end{aligned}$$

Hieraus schließen wir, dass $I_q \circ I_p \circ c(t) = c(t+a)$ für alle $t \in (-a, 0)$ gilt. Aber das bedeutet, dass wir das Definitionsintervall von c Schritt für Schritt auf $(-a, na)$ für $n \in \mathbb{N}$ ausdehnen können. Mit der inversen Isometrie $I_p \circ I_q$ können wir es sogar auf $(-na, na)$ ausdehnen. Per Induktion sehen wir, dass c auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzbar ist. Also ist (M, g^{TM}) vollständig.

Um zu zeigen, dass M homogen ist, nehmen wir an, dass M zusammenhängend ist. Seien $p, r \in M$, dann existiert eine Geodätische c und $a > 0$, so dass $c(0) = p$ und $c(a) = r$. Wir konstruieren $q = c\bigl(\frac{a}{2}\bigr)$ wie oben. Dann bildet die Isometrie I_q den Punkt p auf den Punkt r ab.

Um zu zeigen zeigen, dass (M, g^{TM}) lokalsymmetrisch ist, überlegen wir uns zunächst, dass für p, q, $r \in M$ und c wie oben das Differential von $I_p \circ I_q$ gerade die Parallelverschiebung entlang von c von T_pM nach T_rM beschreibt. Dazu sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von T_pM. Wir setzen $(e_1, \dots, e_n)$ zu parallelen Vektorfeldern entlang von c fort. Da I_q und I_p Isometrien sind, bilden ihre Differentiale die obigen Vektorfelder auf parallele Vektorfelder entlang der Geodätischen $t \mapsto c(-t)$ beziehungsweise $t \mapsto c(t + a)$ ab. Aus $d_pI_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$ schließen wir, dass

$$d_pI_p(e_i(0)) = -e_i(0) \qquad \text{und daher} \qquad d_{c(t)}I_p(e_i(t)) = -e_i(-t)$$

gilt. Und da $c\bigl(\frac{a}{2}\bigr) = q$ und $d_qI_q = -\mathrm{id}_{T_qM}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{c(-\frac{a}{2})}(I_q \circ I_p)\Bigl(e_i\Bigl(-\frac{a}{2}\Bigr)\Bigr) &= d_{c(\frac{a}{2})}I_q\Bigl(-e_i\Bigl(\frac{a}{2}\Bigr)\Bigr) = e_i\Bigl(\frac{a}{2}\Bigr) \\ \text{und daher} \qquad d_{c(t)}(I_q \circ I_p)(e_i(t)) &= e_i(t + a) \; . \end{aligned}$$

Sei jetzt $p \in M$ beliebig und $v \in T_pM$ ein beliebiger Einheitsvektor, dann sei c die Geodätische durch $c(0) = p$ mit Startvektor $\dot c(0) = v$. Zu jeder Zeit $a \in \mathbb{R}$ können wir q, r wie oben bestimmen. Da I_p, I_q Isometrien sind und der Riemannsche Krümmungstensor R allein durch die Metrik g auf M bestimmt sind, folgt unmittelbar, dass

$$\langle R_{e_i(a),e_j(a)}e_k(a), e_\ell(a)\rangle_r = \langle R_{e_i(0),e_j(0)}e_k(0), e_\ell(0)\rangle_p$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle Indizes $1 \le i,\ j,\ k,\ \ell \le n$. Da der Levi-Civita-Zusammenhang Riemannsch ist und die Vektorfelder e_i, $_j$, $_k$, e_ℓ parallel sind, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \langle R_{e_i(t),e_j(t)}e_k(t), e_\ell(t)\rangle_{c(t)} &= \langle \nabla_v(R_{e_i,e_j}e_k), e_\ell\rangle + \langle R_{e_i,e_j}e_k, \nabla_v e_\ell\rangle \\ &= \langle \nabla_v(R_{e_i,e_j}e_k) - R_{\nabla_v e_i,e_j}e_k - R_{e_i,\nabla_v e_j}e_k - R_{e_i,e_j}\nabla_v e_k, e_\ell\rangle \; . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich die in Definition 3.1 (3) geforderte Gleichung. □

3.4. Satz. *Jeder zusammenhängende, vollständige, lokal symmetrische Raum hat eine symmetrische universelle Überlagerung.*

Wir geben hier nur eine Beweis-Skizze.

Beweis. Die Parallelität des Krümmungstensors bleibt unter Riemannschen Überlagerungen erhalten. Also nehmen wir an, dass M ein vollständiger, zusammenhängender und einfach zusammenhängender lokal symmetrischer Raum ist.

Sei $p \in M$ gegeben. Sei $q \in M$ ein weiterer Punkt und c eine Geodätische von $p = c(0)$ nach $q = c(t)$. Dann versuchen wir, eine Spiegelung am Punkt p zu definieren durch $I_p(q) = c(-t)$. Diese Abbildung ist zunächst nur auf einer Umgebung U von p wohldefiniert, genauer, außerhalb des Schnittortes von p. Wir verlangen nämlich, dass es für alle $q \in U$ eine eindeutige kürzeste Geodätische von p nach q gibt, und dass c diese Kürzeste ist. Der Beweis hat zwei Schritte. Zunächst zeigen wir, dass I_p auf U eine Riemannsche Isometrie ist. Anschließend zeigen wir, dass sich I_p auf ganz M fortsetzen lässt.

Sei $V \subset T_pM$ die Umgebung von 0 aus Folgerung 1.114 (1) und $U = \exp_p(V)$. Wir schreiben

$$I_p|_U = \exp_p \circ(-\mathrm{id}_{T_pM}) \circ (\exp_p|_V)^{-1} \; .$$

Dann ist I_p genau dann eine Isometrie, wenn die zurückgeholten Metriken $\exp_p^* g^{TM}$ an den Stellen v und $-v$ übereinstimmen, für alle $v \in V$.

Wir zeigen das für alle $tv \in T_pM$, wobei $\|v\| = 1$ und $t > 0$ sei. Für den ersten Schritt wählen wir wie oben eine Orthonormalbasis $(e_1, \dots, e_n)$ von T_pM und setzen sie parallel längs c fort. Der Einfachheit halber sei $v = e_1$ und $\dot c(t) = e_1(t)$. Wir erinnern uns, dass

$$d_{tv} \exp_p(e_i) = \frac{1}{t} \, Y_i(t) \;,$$

wobei Y das Jacobifeldes längs c mit Startwert $Y(0) = 0$ und Ableitung

$$\dot Y(0) = \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} Y(t)|_{t=0} = e_i$$

sei. Wir schreiben Y_i in der obigen Basis als

$$Y_i(t) = \sum_j y_i^j(t) \, e_j(t) \;.$$

Da R parallel ist, gibt es Konstanten R_{ijk}^ℓ für alle Indizes $1 \le i,\, j,\, k,\, \ell \le n$, so dass

$$R_{e_i(t),e_j(t)} e_k(t) = \sum_\ell R_{ijk}^\ell \, e_\ell(t) \qquad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \;.$$

Da Y_i die Jacobigleichung aus Definition 1.79 erfüllt, gilt

$$0 = \left\langle \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} \nabla^c_{\frac{\partial}{\partial t}} Y_i + R_{Y_i,\dot c} \dot c, e_j \right\rangle = \ddot y_i^j + \sum_k y_i^k \, R_{k11}^j \;.$$

Insbesondere erfüllt das Jacobifeld Y eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Man überprüft leicht, dass das mit dI_p gespiegelte Vektorfeld $t \mapsto -Y_i(-t)$ die gleiche Differentialgleichung erfüllt. Hieraus folgt, dass bezüglich der gegebenen Basen $d_{tv} \exp_p$ und $d_{-tv} \exp_p$ durch die gleiche Matrix dargestellt werden. Aber dann sind auch die zurückgeholten Metriken gleich, und I_p ist eine Isometrie.

Für den zweiten Schritt nehmen wir an, dass $\exp_p(v) = \exp_p(w) = q$ für $q \ne w$ gilt. Für den Fall, dass es eine Kurve γ in T_pM von v nach w gibt, so dass $\exp_p(\gamma(s)) = q$ für alle s gilt, zeigt unser obiges Argument, dass für alle s das Jacobi-Feld längs $c_{\gamma(s)}$ zur obigen Variation bei $t = 1$ eine Nullstelle hat. Aber dann hat dieses Feld auch bei $t = -1$ eine Nullstelle, und wir sehen, dass jeder Vektor $\gamma(s) \in T_pM$ den gleichen „Wert“ für I_p liefert.

Im Allgemeinen wird das jedoch nicht gehen. Da aber M einfach zusammenhängend ist, findet man zwischen den beiden Geodätischen c_v und c_w von p nach q zumindest eine Homotopie. Wir können diese Homotopie so konstruieren, dass sie für jeden Wert des Homotopie-Parameters s eine gebrochene Geodätische ist, das heißt, eine Folge von Geodätischen, so dass der Endpunkt der vorigen gerade der Anfangspunkt der nächsten ist. Indem wir entlang dieser Kurven wieder parallele Orthonormalbasen konstruieren, können wir an jedem Knickpunkt kodieren, in welche Richtung die jeweilige stückweise Geodätische weiterläuft. Auf diese Weise bestimmen wir wieder eine „Bildkurve“ unter I_p. Indem wir dann die Jacobifelder entlang dieser gebrochenen geodätischen Variation mit obigem Argument vergleichen, sehen wir, dass alle s den gleichen Bildpunkt liefern. Somit ist I_p auch im Allgemeinen wohldefiniert. $\square$

3.2. Lie-Gruppen und Lie-Algebren

Wir wollen jetzt den Zusammenhang zwischen homogenen und symmetrischen Räumen besser verstehen.

3.5. Definition. Eine *Lie-Gruppe* ist eine glatte Mannigfaltigkeit G mit einem *neutralen Element* $e \in G$, einer glatten *Multiplikation* $\cdot : G \times G \to G$ und einer glatten *Inversenbildung* ${}^{-1}\colon G \to G$, so dass $(G, \cdot, e, {}^{-1})$ eine Gruppe bildet.

Eine *Unter-Lie-Gruppe* einer Lie-Gruppe G ist eine glatte Untermannigfaltigkeit $U \subset G$, die gleichzeitig eine Untergrupe von G bildet.

Eine *glatte (Links-) Gruppenwirkung* einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine glatte Abbildung $F\colon G \times M \to M$, so dass für alle $g, h \in G$ und alle $p \in M$ gilt

$$F(e,p) = p \qquad \text{und} \qquad F(g \cdot h, p) = F(g, F(h,p)) \ .$$

Eine Gruppen-Wirkung heißt *transitiv,* wenn es zu je zwei Punkten $p, q \in M$ ein $g \in G$ mit $F(g,p) = q$ gibt. Sie heißt *effektiv,* wenn $F(g, \cdot\,) = \mathrm{id}_M$ nur dann gilt, wenn $g = e$. Analog definieren wir *Rechts-Lie-Gruppen-Wirkungen.*

Lineare Wirkungen auf $\Bbbk$-Vektorräumen (für $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$) heißen auch *Darstellungen.*

Bezeichnungen aus der Gruppen- und Mannigfaltigkeitstheorie behalten ihre übliche Bedeutung. Beispielsweise haben Lie-Gruppen eine Dimension als Mannigfaltigkeit, und Untergruppen können Normalteiler sein. Eine Gruppenwirkung kann frei sein, eine Gruppenwirkung auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit kann isometrisch sein, siehe Definition 1.120. Für Gruppenwirkungen schreiben wir oft $g(p)$ anstelle von $F(g,p)$. In Einzelfällen müssen wir eventuell mehrere verschiedene Wirkungen von einer und derselben Lie-Gruppe auf ein und derselben Mannigfaltigkeit betrachten; in diesem Fall benutzen wir die obige ausführliche Schreibweise.

3.6. Beispiel.

(1) Jede Gruppe Γ mit der diskreten Topologie ist eine nulldimensionale Lie-Gruppe. Eine Operation von Γ auf M wie in Definition 1.120 ist eine Links-Lie-Gruppen-Wirkung (kurz: Linkswirkung).
(2) Die additive Gruppe eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums ist eine abelsche Lie-Gruppe, insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ eine Lie-Gruppe für alle n. Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Untergruppe wie in Beispiel 3.2 (2), dann ist $\mathbb{R}^n/\Gamma$ ebenfalls eine Lie-Gruppe.
(3) Die Gruppen $GL(n, \Bbbk)$ für $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ sind Lie-Gruppen der Dimension $n^2 \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk$, denn eine Matrix $A \in M_n(\Bbbk)$ liegt genau dann in $GL(n, \Bbbk)$, wenn ihre Determinante nicht 0 ist (im Fall $\Bbbk = \mathbb{H}$ betrachten wir A allerdings als Element von $M(2n, \mathbb{C})$ oder $M(4n, \mathbb{R})$, damit wir überhaupt eine Determinante bilden können), und somit ist $GL(n, \Bbbk) \subset M_n(\Bbbk)$ eine offene Teilmenge, also eine Untermannigfaltigkeit.
(4) Viele Untergruppen der Gruppen $GL(n, \Bbbk)$ sind Lie-Gruppen (Übung), beispielsweise
$$SL(n,\Bbbk) \subset GL(n,\Bbbk) \ , \qquad O(n), SO(n), O(p,q), SO(p,q) \subset GL(n,\mathbb{R}) \ ,$$
$$U(n), SU(n), U(p,q), SU(p,q) \subset GL(n,\mathbb{C}) \ , \qquad Sp(n), Sp(p,q) \subset GL(n,\mathbb{H}) \ ,$$
wobei jeweils $p + q = n$. Für die Gruppe $O(n)$ betrachen wir beispielsweise die Abbildung $A \mapsto A^t A$ von $GL(n, \mathbb{R})$ in den Raum der symmetrischen Matrizen und zeigen, dass die Einheitsmatrix E_n ein regulärer Wert ist.
(5) Die Gruppe $GL(n + 1, \mathbb{R})$ wirkt auf S^n. Wenn wir die Standardmetrik betrachten, ist die Untergruppe $O(n + 1)$ gerade die Isometriegruppe von S^n.
(6) Die Gruppe $GL(n + 1, \mathbb{C})$ wirkt auf $\mathbb{C}P^n$. Wenn wir $\mathbb{C}P^n$ mit der Fubini-Study-Metrik versehen, wirkt die Untergruppe $U(n)$ isometrisch.

Die Lie-Gruppen aus (3) und (4) heißen auch *Matrixgruppen.* Im Folgenden betrachten wir fast nur Lie-Gruppen von diesem Typ. Eine Lie-Gruppe ist genau dann eine Matrixgruppe, wenn sie eine effektive endlich-dimensionale Darstellung besitzt.

Jede Lie-Gruppe wirkt durch Multiplikation von links oder rechts auf sich selbst; für jedes $g \in G$ erhalten wir also zwei Abbildungen

$$\ell_g, r_g \colon G \longrightarrow G \qquad \text{mit} \qquad \ell_g(h) = gh \qquad \text{und} \qquad r_g(h) = hg \;.$$

Wir erinnern uns an F-verwandte Vektorfelder aus Definition 1.25.

3.7. Definition. Ein Vektorfeld X auf einer Lie-Gruppe heißt *linksinvariant* (*rechtsinvariant*), wenn es zu sich selbst ℓ_g-verwandt (r_g-verwandt) ist für alle $g \in G$. Der Raum der linksinvarianten Vektorfelder auf einer Lie-Gruppe G heißt *Lie-Algebra* von G und wird typischerweise mit $\mathfrak{g}$ bezeichnet.

Entsprechend bezeichnen wir die Lie-Algebren von $GL(n, \Bbbk)$, $SO(n)$, … mit $\mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$, $\mathfrak{so}(n)$, …

3.8. Bemerkung. Es seien X, $Y \in \mathfrak{g}$ zwei linksinvariante Vektorfelder. Nach Satz 1.27 (3) ist ihre Lie-Klammer $[X, Y]$ dann auch linksinvariant, somit $[X, Y] \in \mathfrak{g}$. Insbesondere ist $(\mathfrak{g}, [\,\cdot\,,\,\cdot\,])$ eine Lie-Algebra im üblichen Sinne.

Auswerten am neutralen Element $e \in G$ liefert stets einen Isomorphismus $\mathfrak{g} \cong T_eG$. Denn sei $x \in T_eG$ gegeben, dann erhalten wir ein linksinvariantes Vektorfeld X mit

$$X_g = d_e\ell_g(x) \;.$$

Man überprüft leicht, dass Auswerten am neutralen Element und linksinvariantes Fortsetzen zueinander inverse Operationen sind.

Wir wollen uns jetzt die Lie-Klammer auf T_eG anschauen. Da alle Matrixgruppen Untergruppen allgemeiner linearer Gruppen sind, brauchen wir wegen Satz 1.27 (3) nur letztere zu betrachten. Da $GL(n, \Bbbk) \subset M_n(\Bbbk) \cong \mathbb{R}^{n^2 \dim_{\mathbb{R}} \Bbbk}$ eine offene Teilmenge ist, können wir Vektorfelder durch Abbildungen $GL(n, \Bbbk) \to M_n(\Bbbk)$ beschreiben. Sei $x \in T_eGL(n, \Bbbk) = M_n(\Bbbk)$, dann hat die linksinvariante Fortsetzung die Gestalt

$$X_g = g \cdot x \in T_gGL(n, \Bbbk) \;.$$

Zur Berechnung der Lie-Klammer dürfen wir Satz 1.27 (2) anwenden. Seien also X, $Y \in \mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$ zu x, $y \in M_n(\Bbbk)$ wie oben gegeben, dann folgt

$$[X, Y]_g = X_g(Y) - Y_g(X) = g \cdot x \cdot y - g \cdot y \cdot x = g \cdot (x \cdot y - y \cdot x) \;,$$

also ist $[X, Y]$ die linksinvariante Fortsetzung der Lie-Klammer für Matrizen.

Im Folgenden identifizieren wir der Einfachheit halber T_eG mit $\mathfrak{g}$.

3.9. Beispiel. Es sei $g \colon [a, b] \to O(n)$ eine Kurve durch $g(0) = e$ mit Ableitung $X = \dot g(0) \in \mathfrak{o}(n)$. Nach Definition von $SO(n)$ gilt $g(t)^t \cdot g(t) = e$. Ableiten bei $t = 0$ liefert

$$0 = \dot g(0)^t \cdot g(0) + g(0)^t \cdot \dot g(0) = X^t + X \;,$$

somit besteht die Lie-Algebra $\mathfrak{o}(n)$ von $O(n)$, genauer, der Tangentialraum $T_eO(n)$, aus schiefsymmetrischen Matrizen. Die Lie-Klammer sollte nach der obigen Bemerkung wieder schiefsymmetrisch sein, und tatsächlich gilt

$$[X, Y]^t = (X \cdot Y - Y \cdot X)^t = (Y^t \cdot X^t - X^t \cdot Y^t) = X \cdot Y - X \cdot Y = -[X, Y] \;.$$

Übrigens haben orthogonale Matrizen Determinante ± 1, und $SO(n)$ ist einfach eine Zusammenhangskomponente von $O(n)$. Es folgt $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

3.10. Satz und Definition. *Für jede Lie-Gruppe G existiert eine eindeutige glatte Abbildung* $\exp \colon \mathfrak{g} \to G$*, die* Exponentialabbildung *von G, so dass*

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp(tX) = d_e\ell_{\exp(tX)}(X) = d_er_{\exp(tX)}(X) \qquad \textit{und} \qquad \exp((s + t)X) = \exp(sX) \cdot \exp(tX)$$

für alle s, $t \in \mathbb{R}$. Für $X \neq 0$ nennt man die Abbildung $\mathbb{R} \to G$ mit $t \mapsto \exp(tX)$ auch die von X erzeugte Einparameteruntergruppe *von G.*

Man beachte, dass Einparameteruntergruppen nicht unbedingt abgeschlossenes Bild in G haben müssen. Insbesondere sind Einparameteruntergruppen nicht immer Untergruppen von G.

Beweis. Wir betrachten ein festes Element $X \in \mathfrak{g}$ als linksinvariantes Vektorfeld auf G und erhalten mit dem Satz 1.72 von Picard-Lindelöf zunächst eine Integralkurve $\gamma\colon (a,b) \to G$ durch den Punkt $\gamma(0) = e$ mit

$$\dot\gamma(t) = X_{\gamma(t)} = d_e\ell_{\gamma(t)}(X)\ .$$

Für festes $s \in (a,b)$ ist dann $t \mapsto \gamma(s)\cdot\gamma(t-s)$ wegen Linksinvarianz von X wieder eine Integralkurve auf $(a+s, b+s)$. Wegen der Eindeutigkeit der Integralkurven können wir diese Integralkurven sukzessive zu einer Abbildung $\mathbb{R} \to G$ zusammensetzen, außerdem sehen wir, dass

$$\exp((s+t)X) = \exp(sX)\cdot\exp(tX)$$

für alle s und t. Indem wir die obige Gleichung bei $s = 0$ nach s ableiten, erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp(tX) = d_e r_{\exp(tX)}(X)\ .$$

Schließlich folgt die Glattheit von exp wiederum aus der Differenzierbarkeitsaussage 1.72 (2) im Satz von Picard-Lindelöf. □

3.11. Bemerkung. Im Falle von Matrixgruppen wird die Exponentialabbildung beschrieben durch

$$\exp(A) = e^A = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,A^n$$

für alle $A \in \mathfrak{g} \subset M_n(\Bbbk)$ (Übung). Man beachte, dass im Allgemeinen $\exp(A+B)$ nicht das gleiche liefert wie $\exp A\cdot\exp B$. Diese Gleichung gilt aber, wenn A und B kommutieren.

3.3. Homogene und Symmetrische Räume

Wir schreiben homogene Räume als Quotienten von Lie-Gruppen und finden ein Kriterium, dass die symmetrischen Räume unter den homogenen Räumen auszeichnet.

3.12. Definition. Eine *Submersion* ist glatte Abbildung $F\colon M \to N$ zwischen Mannigfaltigkeiten, so dass für alle $p \in M$ das Differential $d_pF\colon T_pM \to T_{F(p)}N$ surjektiv ist.

Seien (M, g^{TM}) und (N, g^{TN}) Riemannsche Mannigfaltigkeiten, dann heißt eine Submersion $F\colon M \to N$ *Riemannsch,* wenn für alle $p \in M$ die von dF_p induzierte Abbildung

$$d_pF|_{T_p^HM}\colon \bigl(T_p^HM, g|_{T_p^HM}\bigr) \longrightarrow (T_{F(p)}M, h)$$

eine lineare Isometrie ist, hierbei sei $T_p^HM = \ker(d_pF)^\perp \subset T_pM$ der zum Kern des Differentials senkrechte sogenannte *horizontale Unterraum* des Tangentialraums.

3.13. Beispiel. Wir betrachten die Hopf-Faserung $p\colon S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$. Die Sphäre $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ trage wie üblich die runde Metrik. Auf $\mathbb{C}P^n$ wählen wir die Fubini-Study-Metrik g^{FS}, das heißt, für Vektoren V, $W \in \mathbb{C}^{n+1}$ und $Z \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ gelte

$$g^{\mathrm{FS}}(d_Z\pi V, d_Z\pi W) = \mathrm{Re}\biggl(\frac{\langle V,W\rangle}{\|Z\|^2} - \frac{\langle V,Z\rangle\langle Z,W\rangle}{\|Z\|^4}\biggr)\ ;$$

hierbei sei $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ das Standard-Hermitesche Produkt auf $\mathbb{C}^{n+1}$, und $\pi\colon \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}P^n$ sei die Projektionsabbildung. Dann ist die Hopf-Faserung eine Riemannsche Submersion. Denn für $Z\in S^{2n+1}$ gilt $\|Z\|=1$, und für V, $W\in T_Z^H S^{2n+1}$ gilt $\langle V,Z\rangle=\langle W,Z\rangle=0$, so dass jetzt

$$g^{\mathrm{FS}}(d_Z\pi V, d_Z\pi W)=\operatorname{Re}\langle V,W\rangle=g^{\mathrm{sph}}(V,W)\;.$$

Man beachte, dass für $V\in T_Z S^{2n+1}$ im Allgemeinen nur $\operatorname{Re}\langle V,Z\rangle=0$ gilt, so dass wir oben einen zusätzlichen Term der Form $\operatorname{Im}\langle V,Z\rangle\operatorname{Im}\langle W,Z\rangle$ erhielten, falls V und W nicht in $T_Z^H S^{2n+1}$ lägen.

3.14. Bemerkung. Es folgen ohne Beweis einige wichtige Aussagen zu Lie-Gruppen und homogenen Räumen. Als Beispiel möge die runde Sphäre $M=S^n$ dienen, die beteiligten Lie-Gruppen sind $G=O(n+1)$ und $H=O(n)$, eingebettet als Gruppe von Blockmatrizen mit einer 1 als rechtem unteren Eintrag.

(1) Es sei (M,g^{TM}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann bilden die Isometrien eine Lie-Gruppe $G=\operatorname{Isom}(M,g^{TM})$, und die Wirkung von $\operatorname{Isom}(M,g^{TM})$ auf M ist glatt im Sinne von Definition 3.5.

(2) Es sei (M,g^{TM}) ein Riemannscher homogener Raum mit Isometriegruppe G. Es sei $p\in M$, dann ist die *Isotropie-* oder *Standgruppe* von p definiert als

$$H=\left\{\,g\in G\;\middle|\;g(p)=p\,\right\}\;.$$

Da H durch Isometrien wirkt, erhalten wir eine Abbildung $H\to O(T_pM)$ mit $h\mapsto d_ph$, die sogenannte *Isotropiedarstellung* von H auf T_pM. Diese Abbildung ist injektiv (man sagt auch, H wirkt *effektiv*), denn sei $d_ph=\mathrm{id}_{T_pM}$, dann folgt $h(\exp_p v)=\exp_p(d_ph(v))=\exp_p v$, also ist h das neutrale Element der Isometriegruppe G. Außerdem ist das Bild von H in $O(T_pM)$ abgeschlossen, da ein Grenzwert von Isometrien von M wieder eine Isometrie ist. Da die Lie-Gruppe $O(T_pM)\cong O(n)$ kompakt ist, ist auch H kompakt.

(3) Die natürliche Abbildung $\pi\colon G\to M$ mit $g\mapsto g(p)$ induziert eine Bijektion vom Quotienten G/H, das heißt, vom Raum der H-Linksnebenklassen $gH\subset G$, nach M, denn

$$g(p)=g'(p)\quad\Longleftrightarrow\quad p=(g^{-1}g')(p)\quad\Longleftrightarrow\quad g^{-1}g'\in H\quad\Longleftrightarrow\quad g'\in gH\;.$$

Die differenzierbare Struktur auf G ist so definiert, dass π zu einer Submersion wird. Wir betrachten die Abbildungen

$$0\longrightarrow\mathfrak{h}\xhookrightarrow{\iota}\mathfrak{g}\xrightarrow{d_e\pi}T_pM\longrightarrow 0$$

und wollen zeigen, dass sie eine exakte Sequenz bilden. Exaktheit ist klar an den äußeren Stellen. Sei $X\in\mathfrak{g}=T_eG$. Wir betrachten das glatte Vektorfeld

$$X_M=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}F(\exp(-tX),\,\cdot\,)\in\mathfrak{X}(M)\qquad\text{mit}\qquad X_M(p)=-d_e\pi(X)\;,$$

mit Integralkurven der Form $t\mapsto F(\exp(-tX),\,\cdot\,)$. Für $X\in\mathfrak{h}$ folgt $F(\exp(-tX),p)=p$ und $d_e\pi(X)=-X_M(p)=0$. Für $X\in\ker d_e\pi$ gilt umgekehrt $X_M(p)=0$, somit folgt $F(\exp(-tX),p)=p$ für alle t, also $\exp(-tX)\in H$ und $X\in\mathfrak{h}$. Übrigens ist die Zuordnung $X\mapsto X_M$ ein *Lie-Algebren-Homomorphismus* $\mathfrak{g}\to\mathfrak{X}(M)$, das heißt, es gilt $[X,Y]_M=[X_M,Y_M]$ für alle X, $Y\in\mathfrak{g}$ (Übung).

(4) Es sei G eine Lie-Gruppe und $H\subset G$ eine kompakte Untergruppe. Dann gibt es genau eine differenzierbare Struktur auf dem Quotienten $M=G/H$, so dass die Quotientenabbildung $\pi\colon G\to M$ zu einer Submersion wird. Außerdem kann man eine Metrik auf M wählen, so dass G durch Isometrien wirkt.

In gewissem Sinne ist (2) die Umkehrung von (4). Allerdings stimmt das nicht ganz, denn die Isometriegruppe in (2) muss nicht mit der Gruppe G in (4) übereinstimmen.

3.15. Beispiel. Wir werden später diverse Darstellungen der runden Sphäre als homogene Räume betrachten. Die zugehörigen Gruppen sind Kandidaten für spezielle Holonomiegruppen. Wir geben eine (nicht vollständige) Liste der beteiligten Gruppen und Quotienten an.

G	$(S)O(n)$	$(S)U(n)$	$Sp(n)$	$Sp(n)\cdot Sp(1)$	$Sp(n)\cdot U(1)$
H	$(S)O(n-1)$	$(S)U(n-1)$	$Sp(n-1)$	$Sp(n-1)\cdot Sp(1)$	$Sp(n-1)\cdot U(1)$
G/H	S^{n-1}	S^{2n-1}	S^{4n-1}	S^{4n-1}	S^{4n-1}

G	G_2	$\mathrm{Spin}(7)$	$\mathrm{Spin}(9)$
H	$SU(3)$	G_2	$\mathrm{Spin}(7)$
G/H	S^6	S^7	S^{15}

Die ersten beiden Spalten sind in Wirklichkeit zwei Serien, je nachdem, ob wir Determinante 1 („S“) fordern oder nicht. Die Gruppe $Sp(n)$ wirkt von links auf der Einheitsspäre im quaternionischen Vektorraum $\mathbb{H}^n$. Wir können von rechts eine Untergruppe der Skalare wirken lassen, beispielsweise $U(1)$ oder $Sp(1) \subset \mathbb{H}$. Da das Element $(-E_n, -1)$ trivial wirkt, erhalten wir die Gruppen

$$Sp(n)\cdot Sp(1) = (Sp(n)\times Sp(1))/(\mathbb{Z}/2)\ , \quad \text{sowie} \quad Sp(n)\cdot U(1) = (Sp(n)\times U(1))/(\mathbb{Z}/2)\ ;$$

sie entsprechen in etwa denen der ersten zwei Spalten ohne „S“. Die letzten drei Spalten ergeben zusammen eine weitere „endliche Serie“, die auf der Oktonionen-Algebra basiert. Wir werden die zugehörigen Gruppen und ihre Wirkungen zu gegebenem Zeitpunkt beschreiben.

Für die nächste Definition sammlen wir hier ein paar Begriffe. Eine *Involution* ist eine Abbildung F einer Menge in sich, so dass $F \circ F = \mathrm{id}$.

Ein *Lie-Gruppen-Automorphismus* ist ein Diffeomorphismus $F\colon G \to G$, der gleichzeitig ein Gruppenautomorphismus ist. Man überlegt sich leicht, dass die Fixpunktmenge G^F eines Gruppenautomorphismus F immer eine Untergruppe ist.

Wir bezeichnen die Zusammenhangskomponente einer Lie-Gruppe G, die das neutrale Elements e enthält, mit G_0. Da Multiplikation und Inversenbildung stetig sind, ist G_0 eine Untergruppe von G. Offensichtlich haben G und G_0 die gleiche Lie-Algebra, da $T_eG = T_eG_0$.

3.16. Definition. Wir nennen einen glatten Gruppenautomorphismus $I \neq \mathrm{id}_G$ einer Lie-Gruppe G eine *Cartan-Involution,* wenn $I^2 = \mathrm{id}_G$ gilt und die Zusammenhangskomponente $(G^I)_0$ der Fixpunktmenge von I, die e enthält, kompakt ist.

Wir kombinieren Links- und Rechtstranslation zur Wirkung von G auf sich selbst durch *Konjugation*

$$G \times G \longrightarrow G \qquad \text{mit} \qquad (g,h) \longmapsto ghg^{-1}\ .$$

Im Gegensatz zur Links- und Rechtsmultiplikation wirkt die Konjugation durch *Gruppenautomorphismen,* das heißt, für alle g, h, $k \in G$ gilt

$$g(h\cdot k)g^{-1} = ghg^{-1}\cdot gkg^{-1}\ .$$

Wir leiten nach dem zweiten Argument ab und erhalten die *adjungierte Darstellung* $\mathrm{Ad}\colon G\times\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$. Umgekehrt gilt (wegen der Eindeutigkeitsaussage im Satz 1.72 von Picard-Lindelöf), dass

$$\exp(\mathrm{Ad}_g X) = g\exp(X)g^{-1}\ .$$

Die adjungierte Darstellung erhält die Lie-Klammer, das heißt, für alle $g \in G$ und X, $Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$\mathrm{Ad}_g[X,Y] = [\mathrm{Ad}_gX, \mathrm{Ad}_gY]\ .$$

In Matrixgruppen wird die adjungierte Darstellung einfach gegeben durch

$$\mathrm{Ad}_gX = gXg^{-1} \in \mathfrak{g}\ . \tag{3.1}$$

Leiten wir Ad auch noch nach g ab, so erhalten wir wieder die Lie-Klammer. Dafür schreibt man auch $\mathrm{ad}_Y X = [Y, X]$.

Riemannsche symmetrische Räume lassen sich durch Lie-Gruppen mit einer Cartan-Involution beschreiben.

3.17. Satz. (1) *Es sei (M, g) ein Riemannscher symmetrischer Raum mit Isometriegruppe G, es sei $p \in M$ und $I_p \in G$ die Punktspiegelung am Punkt p. Dann wird eine Cartan-Involution I von G gegeben durch Konjugation mit I_p. Für die Isotropiegruppe $H \subset G$ von p gilt dann*

$$(G^I)_0 \subset H \subset G^I \; . \tag{*}$$

(2) *Es sei G eine Lie-Gruppe mit einer Cartan-Involution I und $H \subset G$ eine kompakte Untergruppe, so dass (*) gilt. Dann existiert eine G-invariante Riemannsche Metrik g auf $M = G/H$, so dass (M, g) zu einem Riemannschen symmetrischen Raum wird.*

Punkt (2) ist fast die Umkehrung von (1). Allerdings ist weder klar, dass die Gruppe G in (2) die volle Isometriegruppe von (M, g) ist noch dass sie effektiv wirkt.

Beweis. Die Punktspiegelung I_p am Punkt p ist eine Isometrie, die p festhält, also ein Element $h_0 = I_p \in H \subset G$, und es gilt $I_p^2 = \mathrm{id}_M$, also $h_0^2 = e \in G$. Es sei I die Konjugation mit h_0, also $I(g) = h_0 \cdot g \cdot h_0$, da $I_p^{-1} = I_p$. Für Elemente $g \in G^I$ folgt aus $g = h_0 \cdot g \cdot h_0$, dass

$$g(p) = (h_0 \cdot g \cdot h_0)(p) = I_p(g(p)) \; ,$$

also ist $g(p)$ ein Fixpunkt von I_p. Da I_p in einer hinreichend kleinen Umgebung von p keine weiteren Fixpunkte hat, hält die Zusammenhangskomponente $(G^I)_0$ von e den Punkt p fest und ist somit in H enthalten. Da H nach Bemerkung 3.14 (2) kompakt und $(G^I)_0 \subset H$ abgeschlossen ist, ist $(G^I)_0$ kompakt, und I tatsächlich eine Cartan-Involution.

Sei jetzt $h \in H$, somit gilt $h(p) = p$. Sei $q \in M$ ein weiterer Punkt in M, und sei $c = c_v$ eine Geodätische von $p = c_v(0)$ nach $q = c_v(t)$ mit Startvektor $v = \dot c(0) \in T_pM$. Dann gilt

$$(h_0 \circ h \circ h_0)(q) = I_p(h(c_v(-t))) = I_p\big(c_{d_eh(v)}(-t)\big) = c_{d_eh(v)}(t) = h(c_v(t)) = h(q) \; .$$

Da das für alle $q \in M$ gilt, folgt $h \in G^I$, und somit $H \subset G^I$. Das beweist (1). Insbesondere kommutiert h_0 mit allen Elementen von H; man sagt, h liegt im *Zentrum* Z_H von H.

Sei jetzt I eine Cartan-Involution von G und $H \subset G$ wie in (2) gegeben. Falls es kein Element $h_0 \in H \subset G$ mit $h_0^2 = e$ gibt, so dass $I(g) = h_0 \cdot g \cdot h_0$, betrachten wir die Lie-Gruppen

$$\bar H = H \rtimes (\mathbb{Z}/2) \quad \subset \quad \bar G = G \rtimes (\mathbb{Z}/2) \; ,$$

dabei wirke $1 \in \mathbb{Z}/2$ als I auf G, so dass $(g, 1)(h, a) = (g \cdot I(h), 1 + a)$. Insbesondere gilt $\bar H \cong H \times (\mathbb{Z}/2)$, Konjugation mit $\bar h_0 = (e, 1)$ wirkt wie $\bar I = I \times \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2}$ auf $\bar G$, und es gilt

$$\big(\bar G^{\bar I}\big)_0 \subset \bar H \subset \bar G^{\bar I} \; .$$

Die Inklusion $G \hookrightarrow \bar G$ induziert einen Diffeomorphismus

$$M = G/H \cong \bar G / \bar H \; ,$$

und $\bar h_0$ wirkt als Involution, die den Punkt $(e, 0)\bar H \in \bar G/\bar H$ festhält. Ab sofort ersetzen wir daher $H \subset G$ durch $\bar H \subset \bar G$ und I durch $\bar I$.

Es existiere also $h_0 \in Z_H$, so dass I gerade Konjugation mit h_0 ist. Wir definieren Punktspiegelungen am Punkt gH durch Multiplikation mit $g h_0 g^{-1} \in G$, das heißt, für g, $g' \in G$ sei

$$I_{gH}(g'H) = (g h_0 g^{-1}) g' H \in M \; .$$

Da $h_0 \in Z_H$, erhalten wir für h, $h' \in H$, dass

$$I_{ghH}(g'h'H) = g h h_0 (gh)^{-1} g' h' H = g h_0 g^{-1} \cdot g' H = I_{gH}(g'H) \; ,$$

somit ist die Punktspiegelung I_{gH} für alle Punkte $gH \in M$ wohldefiniert. Außerdem überprüft man leicht, dass $I_{gH}(gH) = gH$ und dass $I_{gH}^2 = \mathrm{id}_M$ gilt.

Es bleibt zu zeigen, dass es eine G-invariante Metrik g^{TM} auf M gibt. Da $\exp(t\mathrm{Ad}_{h_0}X) = I(\exp(tX))$ für alle $X \in \mathfrak{g}$ und alle $t \in \mathbb{R}$, wirkt Ad_{h_0} wie d_eI auf $\mathfrak{g} = T_eG$. Da $I^2 = \mathrm{id}_G$, gilt auch $\mathrm{Ad}_{h_0}^2 = \mathrm{id}_{T_eG}$. Daher zerfällt T_eG in die Eigenräume von $\mathrm{Ad}_{h_0} = d_eI$ zu den Eigenwerten ± 1 von Ad_{h_0}; dabei ist $\mathfrak{h}$ wegen (*) gerade der d_eI-Eigenraum zum Eigenwert 1. Es bezeichne $\mathfrak{p}$ den Eigenraum zum Eigenwert -1. Da $H \subset G^I$, vertauscht d_eI mit Ad_h für alle $h \in H$, somit ist $\mathfrak{p}$ ein Ad_H-invarianterm Unterraum. Es sei $p = eH \in M$, und $\pi\colon G \to M$, $g \mapsto gH = g(p)$ bezeichne die Quotientenabbildung. Da $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$, spaltet die kurze exakte Sequenz aus Bemerkung 3.14 (2), und wir erhalten einen Isomorphismus

$$d_e\pi\colon \mathfrak{p} \longrightarrow T_pM \; .$$

Indem wir $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ als Unterraum der linksinvarianten Vektorfelder auffassen, erhalten wir völlig analog Isomorphismen

$$d_g\pi\colon \mathfrak{p} \longrightarrow T_{\pi(g)}M \; , \tag{3.2}$$

die allerdings von der Wahl von $g \in gH$ abhängen.

Sei $g_0^{\mathfrak{p}}$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathfrak{p}$. Da H nach Voraussetzung kompakt ist, existiert ein rechtsinvariantes Volumenmaß $d\mathrm{vol}_H$ auf H von endlichem Gesamtvolumen, nämlich das Volumenmaß zu einer Riemannschen Metrik der Form $g_h^{TH} = d_er_{h^{-1}}^*g^{\mathfrak{h}}$. Wir definieren ein neues Skalarprodukt auf $\mathfrak{p}$ durch „Mittelung" über H, genauer

$$g^{\mathfrak{p}}(X,Y) = \int_H g_0^{\mathfrak{p}}(\mathrm{Ad}_hX, \mathrm{Ad}_hY)\, d\mathrm{vol}_H(h) \; .$$

Dieses Skalarprodukt ist Ad_k-invariant für alle $k \in H$, denn

$$g^{\mathfrak{p}}(\mathrm{Ad}_kX, \mathrm{Ad}_kY) = \int_H g_0^{\mathfrak{p}}(\mathrm{Ad}_{hk}X, \mathrm{Ad}_{hk}Y)\, d\mathrm{vol}_H(h) = \int_H g_0^{\mathfrak{p}}(\mathrm{Ad}_hX, \mathrm{Ad}_hY)\, d\mathrm{vol}_H(h) = g^{\mathfrak{p}}(X,Y) \; .$$

Im letzten Schritt definieren wir eine Riemannsche Metrik auf M durch

$$g^{TM}(d_g\pi(X), d_g\pi(Y)) = g^{\mathfrak{p}}(X,Y)$$

für alle linksinvariant fortgesetzten Vektorfelder X, $Y \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$. Zur Wohldefiniertheit überlegen wir uns für X, $X' \in \mathfrak{p}$, und g, $g' \in G$, dass $d_g\pi(X) = d_{g'}\pi(X')$ genau dann gilt, wenn $g' \in gH$, das heißt, wenn es ein $h \in H$ mit $g' = gh$ gibt, und wenn $X' = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}(X)$, denn

$$d_{gh}\pi(X') = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} gh\exp(tX')H = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g\exp(t\mathrm{Ad}_hX')H = d_g\pi(\mathrm{Ad}_hX') \; . \tag{3.3}$$

Aus der Ad_h-Invarianz von $g^{\mathfrak{p}}$ folgt jetzt Wohldefiniertheit, denn

$$\begin{aligned} g^{TM}(d_{gh}\pi(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}X), d_{gh}\pi(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}Y)) &= g^{\mathfrak{p}}(\mathrm{Ad}_{h^{-1}}X, \mathrm{Ad}_{h^{-1}}Y) \\ &= g^{\mathfrak{p}}(X,Y) = g^{TM}(d_g\pi(X), d_g\pi(Y)) \; . \end{aligned}$$

Analog zeigt man G-Invarianz. □

3.18. Bemerkung. Die verschiedenen Wahlen für H liefern endliche Quotienten von $G/(G^I)_0$; letzterer Raum ist einfach zusammenhängend, wenn G einfach zusammenhängend ist. In jedem Fall hängt die lokale Geometrie des symmetrischen Raumes G/H nur von G und I ab, nicht von der Wahl von H, solange (*) erfüllt ist. Daher ist der obige Satz nützlich zur Klassifikation aller symmetrischer Räume.

Dazu schränkt man sich zunächst auf einfach zusammenhängende Räume ein. Das Riemannsche Produkt zweier symmetrischer Räume ist wieder symmetrisch, und wir sehen später, dass man flache (d.h., Euklidische) Räume immer als Faktoren abspalten kann. Also sucht man einfach zusammenhängende, unzerlegbare symmetrische Räume, das heißt, man sucht Lie-Gruppen G mit

Cartan-Involution I, die sich nicht als Produkte zerlegen lassen. Alle irreduziblen symmetrischen Räume sind klassifiziert, und man unterscheidet vier Typen.

Im Typ I ist G eine kompakte Lie-Gruppe, die sich nicht als Produkt zerlegen lässt. Ein typisches Beispiel ist $S^n = SO(n+1)/SO(n)$ mit der runden Metrik für $n = 2$ oder $n \geq 4$. Hier ist I die Konjugation mit der Blockmatrix $\left(\begin{smallmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Im Typ II ist H eine kompakte Lie-Gruppe, $G = H \times H$, und $I(h_1, h_2) = (h_2, h_1)$. Dann ist G^I gerade die *Diagonale*

$$\Delta H = \left\{ (h, h) \,\middle|\, h \in H \right\} ,$$

und es gilt $G/\Delta H \cong H$ vermittels der Abbildung $(h_1, h_2) \mapsto h_1 h_2^{-1}$. Ein typisches Beispiel ist $S^3 \cong SU(2)$ mit der runden Metrik. Tatsächlich gilt $SO(4) \cong (SU(2) \times SU(2))/\Delta\{\pm E_2\}$.

Man fasst I und II auch zusammen als *kompakter Typ*. Um den *nicht-kompakten Typ,* also die Typen III und IV zu verstehen, bemerken wir zunächst, dass

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h} , \qquad [\mathfrak{h}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \qquad \text{und} \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{h} . \tag{3.4}$$

Während die ersten zwei Relationen daraus folgen, dass H sowohl auf $\mathfrak{h}$ als auch auf $\mathfrak{p}$ wirkt, benutzen wir für die letzte Relation, dass

$$d_e I([X, Y]) = \mathrm{Ad}_{h_0}[X, Y] = [\mathrm{Ad}_{h_0} X, \mathrm{Ad}_{h_0} Y] = [-X, -Y] = [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

falls X, $Y \in \mathfrak{p}$. Wir betten $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ in $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ als total reellen Unterraum ein und definieren

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{h} \oplus i\mathfrak{p} . \tag{3.5}$$

Dann ist $\mathfrak{g}'$ wieder eine reelle Lie-Algebra wegen (3.4).

Aus Typ I wird so Typ III. Hier ist G eine nicht kompakte, einfache Lie-Gruppe, und H ist eine maximale kompakte Untergruppe. Das zu S^n duale Beispiel ist der hyperbolische Raum $H^n = SO(n, 1)/SO(n)$.

Aus Typ II wird Typ IV. Hier ist G die „Komplexifizierung“ von H, und H ist umgekehrt eine reelle kompakte Untergruppe von G. Als Beispiel erhalten wir den hyperbolischen Raum $H^3 \cong SL(2, \mathbb{C})/SU(2)$. Tatsächlich gilt $SO(3, 1)_0 \cong SL(2, \mathbb{C})/\{\pm E_2\}$.

3.4. Krümmung und Holonomie

Zum Schluss dieses Kapitels wollen wir den Krümmungstensor eines symmetrischen Raumes berechnen und feststellen, dass die Holonomiegruppe von G/H stets eine Untergruppe von H ist.

Dazu erinnern wir uns an den Beweis von Satz 3.17 (2) und zerlegen wieder $\mathfrak{g} \cong T_e G$ in die $d_e I$-Eigenräume $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{p}$. Aufgrund des Isomorphismus (3.2) können wir jedes Vektorfeld $V \in \mathfrak{X}(M)$ eindeutig als eine Abbildung $\hat{V} \colon G \to \mathfrak{p}$ darstellen, so dass für alle $g \in G$ gilt

$$V_{gH} = d_g \pi\big(\widehat{V}(g)\big) \qquad \text{mit} \qquad \widehat{V}(gh) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \widehat{V}(g) \tag{3.6}$$

für alle $h \in H$ wegen (3.3). Man beachte, dass $\hat{V} \in \mathfrak{X}(G)$ ein π-verwandtes Vektorfeld zu $V \in fX(M)$ ist. Insgesamt erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathfrak{X}(M) \cong \left\{ \hat{V} \colon G \to \mathfrak{p} \,\middle|\, \widehat{V}(gh) = \mathrm{Ad}_{h^{-1}} \widehat{V}(g) \text{ für alle } h \in H \right\} .$$

Im folgenden Satz bezeichnen wir die Lie-Klammer von Vektorfeldern auf M und G mit $[\,\cdot\,, \cdot\,]_M$ beziehungsweise $[\,\cdot\,, \cdot\,]_G$. Auf der anderen Seite sei $[\widehat{V}, \widehat{W}]_{\mathfrak{g}}(g) \in \mathfrak{h}$ die Lie-Klammer der Elemente $\widehat{V}(g)$, $\widehat{W}(g) \in \mathfrak{p}$, und analog sei $[\widehat{A}, \widehat{W}]_{\mathfrak{g}}(g) \in \mathfrak{p}$ die Lie-Klammer der Elemente $\widehat{A}(g) \in \mathfrak{h}$, $\widehat{W}(g) \in \mathfrak{p}$. Da wir $\widehat{W}$ als eine $\mathfrak{p}$-wertige Funktion auf G auffassen können, können wir ohne Angabe eines Zusammenhangs nach einem anderen Vektorfeld auf G ableiten, zum Beispiel nach $\widehat{V}$.

3.19. Satz. *Es sei $M = G/H$ ein symmetrischer Raum. Mit der obigen Notation gilt für Lie-Klammer, Levi-Civita-Zusammenhang und Riemannschen Krümmungstensor*

$$\widehat{[V,W]_M} = \bigl[\widehat{V},\widehat{W}\bigr]_G - \bigl[\widehat{V},\widehat{W}\bigr]_{\mathfrak{g}} , \tag{1}$$

$$\widehat{\nabla_V W} = \widehat{V}\bigl(\widehat{W}\bigr) , \tag{2}$$

$$\widehat{R_{U,V}W} = -\bigl[[\widehat{U},\widehat{V}]_{\mathfrak{g}},\widehat{W}\bigr]_{\mathfrak{g}} . \tag{3}$$

für alle U, V, $W \in \mathfrak{X}(M)$.

Beweis. Da $\widehat{V}$ zu V und $\widehat{W}$ zu W verwandt sind, folgt

$$[V,W]_M \circ \pi = d\pi \circ \bigl[\widehat{V},\widehat{W}\bigr]_G ,$$

somit ist $\widehat{[V,W]_M}$ gerade der $\mathfrak{p}$-wertige Anteil von $[\widehat{V},\widehat{W}]_G \colon G \to \mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$. Um $[\widehat{V},\widehat{W}]_G$ zu bestimmen, wählen wir eine linksinvariante Basis $e_1, \dots, e_n$ von $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}$ und schreiben

$$\widehat{V} = \sum_i v^i e_i \qquad \text{und} \qquad \widehat{W} = \sum_j w^j e_j .$$

In einer Übung haben wir gesehen, dass $[X, fY] = X(f) + f[X,Y]$. Es folgt

$$\bigl[\widehat{V},\widehat{W}\bigr]_G = \sum_j \widehat{V}(w^j)e_j - \sum_i \widehat{W}(v^i)e_i + \sum_{i,j} v^i w^j\,[e_i,e_j] = \underbrace{\widehat{V}\bigl(\widehat{W}\bigr) - \widehat{W}\bigl(\widehat{V}\bigr)}_{\in\mathfrak{p}} + \underbrace{\bigl[\widehat{V},\widehat{W}\bigr]_{\mathfrak{g}}}_{\in\mathfrak{h}}$$

und die Behauptung (1) ergibt sich.

Indem wir $\widehat{V}$, $\widehat{W}$ als $\mathfrak{p}$-wertige Funktionen und $g^{\mathfrak{p}}$ als konstantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{p}$ auffassen, dürfen wir

$$\begin{aligned} \bigl(U(g^{TM}(V,W))\bigr) \circ \pi &= \widehat{U}\bigl(g^{\mathfrak{p}}(\widehat{V},\widehat{W})\bigr) = g^{\mathfrak{p}}\bigl(\widehat{U}(\widehat{V}),\widehat{W}\bigr) + g^{\mathfrak{p}}\bigl(\widehat{V},\widehat{U}(\widehat{W})\bigr) \\ \text{und} \qquad g^{TM}([U,V],W) \circ \pi &= g^{\mathfrak{p}}\bigl(\widehat{U}(\widehat{V}) - \widehat{V}(\widehat{U}),W\bigr) \end{aligned}$$

schreiben. Aus der Koszul-Formel aus Satz 1.41 folgt (2).

Schließlich berechnen wir den Krümmungstensor mit (1) und (2) als

$$\widehat{R_{U,V}W} = \widehat{U}\bigl(\widehat{V}(\widehat{W})\bigr) - \widehat{V}\bigl(\widehat{U}(\widehat{W})\bigr) - \widehat{[U,V]_M}\bigl(\widehat{W}\bigr) = \bigl(\bigl[\widehat{U},\widehat{V}\bigr]_G - \widehat{[U,V]_M}\bigr)\bigl(\widehat{W}\bigr) = \bigl[\widehat{U},\widehat{V}\bigr]_{\mathfrak{g}}\bigl(\widehat{W}\bigr) .$$

Nun hat $[\widehat{U},\widehat{V}]_{\mathfrak{g}}$ Werte in $\mathfrak{h}$. Wegen (3.6) ergibt sich (3), denn

$$\begin{aligned} \bigl(\bigl[\widehat{U},\widehat{V}\bigr]_{\mathfrak{g}}\bigl(\widehat{W}\bigr)\bigr)(g) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \widehat{W}\bigl(g \exp(t[\widehat{U}(g),\widehat{V}(g)]_{\mathfrak{g}})\bigr) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{\exp(-t[\widehat{U}(g),\widehat{V}(g)]_{\mathfrak{g}})} \widehat{W}(g) \\ &= -\bigl[\underbrace{[\widehat{U}(g),\widehat{V}(g)]_{\mathfrak{g}}}_{\in\mathfrak{h}},\widehat{W}(g)\bigr]_{\mathfrak{g}} \in \mathfrak{g} . \end{aligned}$$

□

3.20. Bemerkung. Um die Schnittkrümmung zu bestimmen, ist es am einfachsten, wenn wir das Skalarprodukt $g^{\mathfrak{p}}$ auf $\mathfrak{p}$ zu einer Ad_G-invarianten reellen Bilinearform auf ganz $\mathfrak{g}$ fortsetzen. Für die Gruppen $GL(n,\Bbbk)$ bieten sich hierzu die Bilinearformen

$$B_{\pm}(X,Y) = \pm\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(XY) \tag{3.7}$$

an. Für alle X, Y, $Z \in \mathfrak{gl}(n,\Bbbk)$ und alle $g \in GL(n,\Bbbk)$ gilt

$$\begin{aligned} B_\pm(\mathrm{Ad}_g X, \mathrm{Ad}_g Y) &= \pm\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\big(gXg^{-1}\,gYg^{-1}\big) = B_\pm(X,Y) \\ \text{und}\qquad B_\pm([X,Y],Z) &= \pm\frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(XYZ - YXZ) = B_\pm(X,[Y,Z]) \;. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Kompakte Untergruppen $G \subset GL(n,\Bbbk)$ sind stets konjugiert zu einer Untergruppe der maximal kompakten Untergruppen

$$O(n) \subset GL(n,\mathbb{R}) \;, \qquad U(n) \subset GL(n,\mathbb{C}) \;, \qquad \text{beziehungsweise} \qquad Sp(n) \subset GL(n,\Bbbk) \;.$$

Für symmetrische Räume vom kompakten Typ I oder II und $X \in \mathfrak{g}$ gilt somit stets $X^* = -X$, und $B_-(X,X) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(X^*X) > 0$ ist ein Vielfaches der Euklidischen Norm.

Wegen der Konstruktion (3.5) wählen wir für symmetrische Räume vom nichtkompakten Typ III oder IV die Form B_+, denn für Elemente $X \in \mathfrak{p}$ gilt jetzt $X^* = X$, so dass $B_+|_\mathfrak{p}$ positiv und $B_+|_\mathfrak{h}$ negativ definit ist.

Mit (3.8) erhalten wir in jedem Fall

$$g^{TM}(R_{U,V}W,X) \circ \pi = -B_\pm\big(\big[[\widehat{U},\widehat{V}]_\mathfrak{g},\widehat{W}\big]_\mathfrak{g},\widehat{X}\big) = -B_\pm\big(\underbrace{\big[\widehat{U},\widehat{V}\big]_\mathfrak{g}}_{\in\mathfrak{h}}\underbrace{\big[\widehat{W},\widehat{X}\big]_\mathfrak{g}}_{\in\mathfrak{h}}\big) \;.$$

Für den Fall, dass U und V orthonormal sind, erhalten wir die Schnittkrümmung der aufgespannten Ebene $E_{U,V}$ als

$$K(E_{U,V}) = B_\pm\big(\big[\widehat{U},\widehat{V}\big]_\mathfrak{g},\big[\widehat{U},\widehat{V}\big]_\mathfrak{g}\big) \;.$$

Während sich die vier Vorfaktoren i in (3.5) wegheben, führt das unterschiedliche Vorzeichen von $B_\pm$ dazu, dass sich die Schnittkrümmungen zueinander dualer symmetrischer Räume genau im Vorzeichen unterscheiden.

3.21. Beispiel. Wir betrachten den komplex projektiven Raum $\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(n)U(1)$. Wir haben

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{u}(n+1) = \big\{\, X \in M_n(\mathbb{C}) \;\big|\; X^* = -X \,\big\} \;, \\ \mathfrak{h} &= \mathfrak{u}(n) \oplus \mathfrak{u}(1) = \big\{\, \big(\begin{smallmatrix} Y & 0 \\ 0 & z \end{smallmatrix}\big) \;\big|\; Y \in \mathfrak{u}(n), z \in i\mathbb{R} \,\big\} \;, \\ \mathfrak{p} &= \big\{\, \big(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ -v^* & 0 \end{smallmatrix}\big) \;\big|\; v \in \mathbb{C}^n \,\big\} \;. \end{aligned}$$

Der Vektor $V = \big(\begin{smallmatrix} 0 & v \\ -v^* & 0 \end{smallmatrix}\big)$ am Punkt $p = e_{n+1}$ entspricht dabei genau dem Vektor

$$V \cdot p = \big(\begin{smallmatrix} v \\ 0 \end{smallmatrix}\big) \in \mathbb{C}^n \;,$$

und es gilt $B_-(V,V) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}(V^*V) = \|v\|^2$, somit induziert B_- genau die Fubini-Study-Metrik aus Beispiel 3.13.

Wir berechnen die Schnittkrümmung von $\mathbb{C}P^n$. Für komplexe Ebenen $E_{v,iv}$, beispielsweise für $v = e_1$, erhalten wir

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & i \\ & \ddots & \\ i & & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2i & & & & \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 2i \end{pmatrix} \;,$$

so dass $K(E_{v,iv}) = 4$. Für total reelle Ebenen $E_{v,w}$, beispielsweise für $v = e_1$, $w = e_2$, erhalten wir

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & & -1 \\ & \ddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & 0 & & -1 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 & & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \;,$$

so dass in diesem Falle $K(E_{v,w}) = 1$.

Im Vorgriff auf Satz 3.26 bemerken wir, dass $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ hier nur eine zu $\mathfrak{u}(n)$ isomorphe Unter-Liealgebra von $\mathfrak{su}(n+1)$ aufspannt. Korrekterweise sollten wir daher $\mathbb{C}P^n$ als $SU(n+1)/U(n)$ darstellen, wobei wir $g \in U(n)$ mit der Blockmatrix $\left(\begin{smallmatrix} g & 0 \\ 0 & \det g^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ identifizieren.

3.22. Bemerkung. Schließlich folgt aus Satz 3.19, dass irreduzible symmetrische Räume vom nichtkompakten Typ stets nicht-positive Schnittkrümmung haben. Nach dem Satz 2.11 von Hadamard-Cartan ist die Exponentialabbildung $\exp_p \colon T_pM \to M$ für diese Räume also immer eine zusammenziehbare universelle Überlagerung.

Wir erinnern uns an die Parallelverschiebung von Vektoren entlang von Kurven in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g^{TM}). Sei speziell $p \in M$ und $\gamma \colon [a,b] \to M$ eine stückweise glatte Schleife in p, das heißt, es gilt $\gamma(a) = \gamma(b) = p$, dann existiert zu jedem Vektor $v \in T_pM$ ein paralleles Vektorfeld $V \colon [a,b] \to TM$ längs γ mit $V(a) = v$, und wir setzen

$$P_\gamma(w) = V(b) \in T_pM \;.$$

Da der Levi-Civita-Zusammenhang die Metrik erhält, ist $P_\gamma \colon T_pM \to T_pM$ eine lineare Isometrie.

3.23. Definition. Es sei (M, g^{TM}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Die (*Riemannsche*) *Holonomiegruppe* von (M, g^{TM}) im Punkt p ist definiert als

$$\mathrm{Hol}_p\bigl(M, g^{TM}\bigr) = \bigl\{\, P_\gamma \in \mathrm{End}(T_pM) \bigm| \gamma \text{ ist Schleife im Punkt } p \,\bigr\} \;,$$

ihre Wirkung auf T_pM heißt *Holonomie-Darstellung,* das Paar aus Holonomiegruppe und -darstellung bezeichnen wir auch kurz mit *Holonomie.* Die *eingeschränkte* (*Riemannsche*) *Holonomiegruppe* von (M,p) ist definiert als

$$\mathrm{Hol}^0_p\bigl(M, g^{TM}\bigr) = \bigl\{\, P_\gamma \in \mathrm{End}(T_pM) \bigm| \gamma \text{ ist zusammenziehbare Schleife im Punkt } p \,\bigr\} \;.$$

Tatsächlich ist die Angabe der Holonomiegruppe ohne Angabe ihrer Holonomiedarstellung eigentlich nicht sinnvoll. Später haben wir allerdings das Glück, dass bei verschiedenen Holonomien in den meisten Fällen bereits die zugehörigen Holonomiegruppen nicht isomorph sind.

3.24. Bemerkung. Wir sammeln einige elementare Eigenschaften.

(1) Die Holonomiegruppe ist eine Untergruppe der orthogonalen Gruppe $\bigl(T_pM, g^{TM}_p\bigr) \cong O(n)$, wobei $n = \dim M$. Wir erhalten das Inverse von P_γ, indem wir γ rückwärts durchlaufen, und $P_\gamma \circ P_\beta$, indem wir die zusammengesetzte Schleife $\beta\gamma$ betrachten. Die Holonomiedarstellung ist die Einschränkung der Standard-Darstellung von $O(n)$ auf $\mathrm{Hol}_p(M,g)$.

(2) Wenn wir eine Schleife γ zur konstanten Schleife im Punkt p zusammenziehen können, erhalten wir einen Pfad von P_γ zur Identität in $\mathrm{Hol}_p(M, g^{TM})$, da Parallelverschiebung als Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung glatt von den Parametern abhängt. Da die Determinante lokal konstant ist, ist die eingeschränkte Holonomiegruppe $\mathrm{Hol}^0_p(M, g^{TM})$ sogar isomorph zu einer zusammenhängenden Untergruppe der Gruppe $SO(n)$.

(3) Sei jetzt β ein Weg von p nach q, dann induziert Parallelverschiebung entlang von β Isomorphismen

$$\begin{array}{lrcl} & T_pM \longrightarrow T_qM & \text{mit} & v \longmapsto P_\beta(v) \\ \text{und} & \mathrm{Hol}_p\bigl(M, g^{TM}\bigr) \longrightarrow \mathrm{Hol}_q\bigl(M, g^{TM}\bigr) & \text{mit} & P_\gamma \longmapsto P_{\beta^{-1}\gamma\beta} = P_\beta P_\gamma P_\beta^{-1} \;, \end{array}$$

so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hol}_p(M, g^{TM}) \times T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{Hol}_q(M, g^{TM}) \times T_qM & \longrightarrow & T_qM \;. \end{array}$$

Wann immer für zwei Paare aus je einer Gruppe und einer Darstellung ein solches Diagramm existiert, nennen wir diese Paare *isomorph.* Insbesondere sind alle Holonomien von (M, g^{TM}) zueinander isomorph, wenn M zusammenhängend ist.

(4) Anstatt das Paar $(\mathrm{Hol}_p(M,g), T_pM)$ zu betrachten, können wir auch T_pM isometrisch mit $\mathbb{R}^n$, versehen mit dem Standard-Skalarprodukt, identifizieren. Dann ist $\mathrm{Hol}_p(M,g)$ zu einer Untergruppe der $O(n)$ isomorph. Man kann zeigen, dass diese Untergruppe der $O(n)$ bis auf Konjugation mit einem Element aus $O(n)$ eindeutig ist. Aus diesem Grund redet man etwas salopp kurz von „der“ Holonomiegruppe von $(M, g^{TM}) \subset O(n)$ auf. Man beachte, dass die Holonomiedarstellung zur Einschränkung der Standard-Darstellung von $O(n)$ auf $\mathrm{Hol}_p(M,g)$ isomorph ist.

3.25. Satz. *Es sei (M, g^{TM}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$, dann gilt für alle u, $v \in T_pM$, dass*

$$R_{u,v} \in \mathfrak{hol}_p\big(M, g^{TM}\big) \subset \mathrm{End}(T_pM)\;.$$

Beweis. Es sei $F\colon (-\varepsilon,\varepsilon)^2 \to M$ eine glatte Abbildung mit $F(0,0) = p$ und $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = u$, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = v$. Indem wir einen Vektor $w \in T_pM$ zunächst längst $y \mapsto F(0,y)$ und dann für festes y längs $x \mapsto F(x,y)$ parallel verschieben, erhalten wir ein Vektorfeld $W \in \mathfrak{X}(F)$ längs F, so dass für dem Levi-Civita-Zusammenhang ∇^F längs F gilt

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial x}} W = 0 \qquad \text{und} \qquad \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial y}} W\big|_{x=0} = 0\;.$$

Um $\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial y}} W$ zu bestimmen, berechnen wir

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial x}} \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial y}} W = R^F_{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}} W + \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial y}} \underbrace{\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial x}} W}_{=0} + \nabla^F_{\underbrace{[\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}]}_{=0}} W = R^F_{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}} W\;.$$

und erhalten in einer geeigneten Karte die Taylor-Entwicklung

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial y}} W\big|_{(x,y)} = x\, R^F_{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}}|_{(0,0)} W + O\big(\|(x,y)\|^2\big) = x\, R_{u,v}|_p W + O\big(\|(x,y)\|^2\big)\;.$$

Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von T_pM, die wir wie oben zu Vektorfeldern e_1, $\dots$, e_n längs F forstsetzen. In dieser Basis sei

$$R_{ij} = \big\langle R^F_{\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}} e_i, e_j\big\rangle_{(0,0)} = \big\langle R_{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y}} e_i, e_j\big\rangle_p\;.$$

Wir betrachten für $0 < \varepsilon < r$ den Rand des Quadrates $[0,r]^2$ als Schleife $\gamma_r\colon [0,4] \to (-\varepsilon,\varepsilon)^2$ von $(0,0)$ über $(r,0)$, (r,r) und $(0,r)$ zurück nach $(0,0)$. Sei jetzt V_i ein paralleles Vektorfeld längs $F \circ \gamma_r$ mit Startwert e_i. Wir bestimmen Koeffizientenfunktionen

$$V_i = \sum_j v_i^j\, e_j \circ \gamma_r\;.$$

Dann stimmt V_i längs des ersten Abschnitts $t \in [0,1]$ mit e_i überein, also gilt auf dem ersten Abschnitt $v_i^j = \delta_i^j$. Für den zweiten Abschnitt folgt aus

$$0 = \nabla^{F\circ\gamma_r}_{\frac{\partial}{\partial t}} V_i = \sum_j \big(\dot v_i^j e_j + v_i^j (\nabla^F_{r\frac{\partial}{\partial y}} e_j\big) = \sum_j \left(\dot v_i^j + r^2 \sum_k R_{kj} v_i^k\right) e_j + O(r^3)$$

für $1 \le t \le 2$, dass

$$v_i^j(t-1) = \delta_i^j - r^2 t \sum_k R_{kj} v_i^k + O(r^3)$$

Auf den letzten beiden Abschnitten bleiben die Koeffizienten wieder konstant.

Die Familie von Schleifen $F \circ \gamma_{\sqrt{s}} \colon [0,4] \to M$ liefert somit einen Weg P_{γ_s} in $\mathrm{Hol}_p(M,g)$ mit Ableitung

$$-R_{u,v} = \frac{d}{ds} P_{\gamma_s}|_{s=0} \in \mathfrak{hol}_p(M,g) . \qquad \square$$

3.26. Satz. *Es sei G eine Lie-Gruppe mit Cartan-Involution I, es sei $H \subset G$ kompakte Untergruppe mit $(G^I)_0) \subset H \subset G^I$, und es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ die Aufspaltung in d_eI-Eigenräume. Für den symmetrischen Raum $M = G/H$ mit Riemannscher Metrik g^{TM} und $p = eH \in M$ identifizieren wir H mit einer Untergruppe von $O(T_pM)$. Dann gilt*

$$\mathrm{Hol}_p(M, g^{TM}) \subset H \qquad \textit{und} \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{hol}_p(M,g) \subset \mathfrak{h} .$$

Wenn G gerade die von allen Parallelverschiebungen erzeugte Untergruppe der Isometriegruppe ist, dann gilt $\mathrm{Hol}_p(M, g^{TM}) = H$. Für jeden symmetrischen Raum lässt sich G so wählen. Anhand von Beispiel 3.21 sehen wir aber, dass man die Gruppen $H \subset G$ auch anders wählen kann, und oben teils echte Inklusionen erhält.

Beweis. Wir zeigen hier nur

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{hol}_p(M, g^{TM}) \subset \mathfrak{h} ,$$

das reicht, falls $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{h}$ gilt. Die linke Inklusion folgt aus den Sätzen 3.19 und 3.25.

Sei γ eine Schleife in M mit $\gamma(0) = \gamma(1) = p = eH$. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf finden wir eine Kurve $\bar\gamma$ in G mit $\bar\gamma(0) = e$, so dass

$$\dot{\bar\gamma}(t) \in d_e\ell_{\bar\gamma(t)}\mathfrak{p} \qquad \text{für alle } t \in [0,1] .$$

Eine solche Kurve heißt auch *horizontaler Lift* von γ. Sei jetzt $v \in T_pM \cong \mathfrak{p}$ gegeben. Dann erhalten wir wegen Satz 3.19 (2) ein paralleles Vektorfeld V längs $\gamma(t)$ der Form

$$V(t) = d_p\ell_{\bar\gamma(t)}(v) .$$

Da $\gamma(1) = p$ folgt $\bar\gamma(1) \in H$, und somit wird die Parallelverschiebung längs γ durch ein Element von H gegeben. Es folgt $\mathrm{Hol}_p(M, g^{TM}) \subset H$ und $\mathfrak{hol}_p(M, g^{TM}) \subset \mathfrak{h}$. $\square$

Nachdem wir gesehen haben, dass die Holonomiegruppe $\mathrm{Hol}(M,g)$ eines symmetrischen Raumes $M = G/H$ sehr eng mit der Isotropiegruppe H verwandt ist, wollen wir noch eine Entsprechung zu G finden. Das führt uns zu Prinzipalbündeln.

3.27. Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und H eine Lie-Gruppe. Ein *Prinzipalbündel* (P, π, ρ) mit *Strukturgruppe H* (kurz *H-Prinzipalbündel*) über M ist eine glatte Mannigfaltigkeit P mit einer glatten H-Rechtswirkung $\rho \colon P \times H \to P$ und einer Abbildung $\pi \colon P \to M$, so dass für jeden Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U \subset M$ von P und eine eine Abbildung $\psi \colon \pi^{-1}(U) \to H$ mit folgenden Eigenschaften existiert.

(1) Die Abbildung $\pi \times \psi \colon \pi^{-1}(U) \to U \times H$ ist ein Diffeomorphismus.
(2) Für alle $q \in \pi^{-1}(U)$ und alle $h \in H$ gilt

$$\pi(\rho(q,h)) = \pi(q) \qquad \text{und} \qquad \psi(\rho(q,h)) = \psi(q) \cdot h \in H .$$

Insbesondere wirkt H frei und transitiv von rechts auf den Fasern $P_p = \pi^{-1}(p)$ von π. Die Fasern sind zu H diffeomorph, bilden aber selbst keine Lie-Gruppen. Anstelle von $\rho(q,h)$ schreiben wir oft auch kurz $q \,.\, h$ oder qh. Für das Tripel (P, π, ρ) schreiben wir oft nur kurz P, wenn die Fußpunkt-Projektion π und die Gruppenwirkung ρ klar sind.

Wie alle Bündel auch kann man Prinzipalbündel längs glatter Abbildungen $f \colon M \to N$ zurückziehen. Sei (P, π, ρ) ein H-Prinzipalbündel, dann ist

$$f^*P = \left\{ (p,x) \in M \times P \;\middle|\; \pi(x) = f(p) \right\}$$

ein Prinzipalbündel mit

$$(f^*\pi)(p,x) = p \qquad \text{und} \qquad (f^*\rho)\big((p,x),h\big) = \big(p,\rho(x,h)\big) \;.$$

Außerdem induziert f auch eine Abbildung F zwischen den Totalräumen mit $F(p,x) = x$. Einen weiteren Typ von Morphismen zwischen Prinzipalbündeln lernen wir in den folgenden Beispielen kennen.

3.28. Bemerkung. Wir geben drei typische Beispiele, ohne Beweis.

(1) Sei (M, g^{TM}) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension n. Wir wollen Orthonormalbasen von T_qM für alle $q \in M$ beschreiben, was das gleiche ist wie lineare Isometrien von $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt nach T_qM („Basisabbildungen“). Wir betrachten daher

$$P_O(M, g^{TM}) = \big\{\, B \colon \mathbb{R}^n \to T_qM \;\big|\; q \in M \text{ und } B^*g^{TM}_q = \langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \,\big\} \;,$$

sei $\pi \colon P_O(M, g^{TM}) \to M$ die offensichtliche Fußpunktabbildung, und $H = O(n)$ wirke durch „Basiswechsel“ $\rho(\ell, h) = \ell \circ h \colon \mathbb{R}^n \to T_qM$. Dann ist $P_O(M, g^{TM})$ ein $O(n)$-Prinzipalbündel über M (Übung), das sogenannte (*orthogonale*) *Rahmenbündel* von TM. Wenn M orientiert ist und wir nur orientierungserhaltende Isometrien erlauben, erhalten wir analog ein $SO(n)$-Prinzipalbündel $P_{SO}(M, g^{TM})$. Wenn wir die Riemannsche Metrik vergessen und alle (orientierungserhaltenden) Isomorphismen $\mathbb{R}^n \to T_qM$ betrachten, erhalten wir ein $GL(n,\mathbb{R})$-Prinzipalbündel $P_{GL}(M)$ beziehungsweise ein $SL(n,\mathbb{R})$-Prinzipalbündel $P_{SL}(M)$. Mit der Wahl der Strukturgruppe H legen wir also fest, wieviel Struktur von M wir kodieren möchten.

(2) Es sei $M = G/H$ ein Riemannscher homogener Raum, dann ist $\pi \colon G \to M$ ein H-Prinzipalbündel. Da wir uns nicht um die differenzierbare Struktur auf G/H gekümmert haben, wollen wir das hier nicht beweisen.

Wir konstruieren eine Abbildung $G \to P_O(M, g^{TM})$. Dazu identifizieren wir $\mathbb{R}^n$ isometrisch mit T_pM für $p = eH$ und stellen zunächst $d_ph \in \operatorname{End} T_pM$ für alle $h \in H$ als Matrizen $\mu(h) \in O(n)$ dar. Dann setzen wir

$$F(g) = d_pg \colon \mathbb{R}^n \cong T_pM \xrightarrow{\cong} T_{gH}M \;,$$

das ist mit den Rechtswirkungen und μ verträglich, genauer

$$F(gh) = \rho(F(g), \mu(h)) \;, \qquad \text{da } d_p(gh) = d_pg \circ d_ph \;.$$

(3) Es sei (M, g^{TM}) Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Wir erhalten ein $\mathrm{Hol}_p(M, g^{TM})$-Prinzipalbündel

$$P_{\mathrm{Hol}}(M, g^{TM}) = \big\{\, P_\gamma \colon T_pM \to T_qM \;\big|\; \gamma \text{ ist ein Weg von } p \text{ nach } q \,\big\} \;.$$

Die Fußpunktprojektion bildet P_γ auf den Punkt q ab. Die Holonomiegruppe wirkt durch Verkettung: sei δ Schleife in p, dann bildet P_δ die Abbildung P_γ auf $P_\gamma P_\delta = P_{\delta\gamma}$ ab. Für einen Riemannschen symmetrisch Ähnlich wie oben erhalten wir auch hier eine Abbildung

$$P_{\mathrm{Hol}}(M, g^{TM}) \longrightarrow P_O(M, g^{TM}) \;,$$

die mit den Rechtswirkungen der beteiligten Gruppen verträglich ist. Im Falle eines Riemannschen symmetrischen Raumes $M = G/H$ faktorisiert diese Abbildung über G wie in (2).

Wir werden später lernen, wie man das Tangentialbündel aus dem Rahmenbündel rekonstruieren und Zusammenhänge auf Vektorbündeln durch Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln beschreiben kann.

3.29. Definition. Es sei $\mu\colon K \longrightarrow H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, und es seien P_H, $P_K \to M$ Prinzipalbündel über M mit Strukturgruppe H beziehungsweise K. Eine *Reduktion der Strukturgruppe* von H zu K ist eine glatte Abbildung $F\colon P_K \to P_H$, die mit den Projektionsabbildungen nach M vertauscht, so dass

$$F(\rho(x,k)) = \rho(F(x),\mu(k)) \qquad \text{für alle } x \in P_K \text{ und alle } k \in K\ .$$

Insbesondere kommutieren die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} P_K & \xrightarrow{F} & P_H \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & = & M \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} P_K \times K & \xrightarrow{F\times\mu} & P_H \times H \\ {\scriptstyle\rho}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho} \\ P_K & \xrightarrow{F} & P_H\ . \end{array}$$

Beispielsweise entspricht eine Riemannsche Metrik nach Bemerkung 3.28 (1) einer Reduktion der Strukturgruppe des Rahmenbündels von $GL(n,\mathbb{R})$ auf $O(n)$, und eine Orientierung einer Reduktion der Strukturgruppe von $GL(n,\mathbb{R})$ auf $SL(n,\mathbb{R})$, beziehungsweise im Riemannschen Fall von $O(n)$ nach $SO(n)$. Wir können eine Reduktion der Strukturgruppe des Rahmenbündels also dadurch erhalten, dass wir zusätzliche Strukturen auf TM festlegen. Die Abbildungen in Bemerkung 3.28 (2) und (3) sind weitere Reduktionen der Strukturgruppe auf die Isotropiegruppe eines homogenen Raums, beziehungsweise auf die Holonomiegruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit.

KAPITEL 4

Kähler-Geometrie

Eine komplexe n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer Riemannschen Metrik heißt Kähler-Mannigfaltigkeit, wenn die punktweise Multiplikation J mit dem Element $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs parallel ist. Ein Beispiel ist der komplex projektive Raum. Komplexe Untermannigfaltigkeiten von Kähler-Mannigfaltigkeiten mit der induzierten komplexen Struktur und der induzierten Metrik sind wieder Kähler-Mannigfaltigkeiten, wodurch auf einen Schlag alle glatten projektiven Varietäten über $\mathbb{C}$ zu Kähler-Mannigfaltigkeiten werden. Auf diese Weise eröffnet sich ein differentialgeometrischer Zugang zu einem Teilgebiet der algebraischen Geometrie. Wir werden einige Resultate der algebraischen Geometrie kennenlernen, die sich mit differentialgeometrischen Methoden beweisen lassen.

Da J parallel ist, ist J insbesondere unter der Holonomiegruppe invariant. Diese ist daher automatisch eine Untergruppe von $U(n) \subset O(2n)$. Sei umgekehrt (M, g) eine $2n$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Holonomiegruppe $U(n) \subset O(2n)$, dann kann man zeigen, dass eine komplexe Struktur existiert, die M zu einer Kähler-Mannigfaltigkeit macht. Sollte die Holonomie sogar in $SU(n)$ enthalten sein, ist M darüberhinaus Ricci-flach. Solche Mannigfaltigkeiten heißen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Mehr zu diesem Thema findet sich in den Büchern von Ballmann [**Ba**] und Huybrechts [**H**].

4.1. Kähler-Mannigfaltigkeiten

Wir definieren komplexe Mannigfaltigkeiten und versehen sie mit besonders gut angepassten Riemannschen Metriken. Auf diese Weise erhalten wir den Begriff einer Kähler-Mannigfaltigkeit. Kähler-Mannigfaltigkeiten tragen stets eine fast komplexe Struktur und eine symplektische Form. Wir motivieren und definieren zunächst diese Begriffe.

Wir erinnern uns an den Begriff einer *holomorphen,* das heißt, komplex differenzierbaren Abbildung. Eine Abbildung heißt *biholomorph,* wenn sie holomorph ist und eine holomorphe Umkehrabbildung besitzt. Analog zu Definition 1.4 erhalten wir den Begriff einer komplexen Mannigfaltigkeit.

4.1. Definition. Ein Atlas $\mathcal{A}$ einer glatten, $2n$-dimensionalen Mannigfaltigkeit M heißt *holomorph,* wenn alle Karten auf offene Teilmengen von $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ abbilden und alle Kartenwechsel biholomorphe Abbildungen sind.

Eine n-dimensionale *komplexe Mannigfaltigkeit* ist ein Paar aus einer $2n$-dimensionalen glatten Mannigfaltigkeit und einem maximalen holomorphen Atlas.

Eine *holomorphe Abbildung* F zwischen komplexen Mannigfaltigkeiten M und N ist eine Abbildung, die bezüglich der holomorphen Atlanten durch holomorphe Abbildungen zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}^{\dim M}$ und $\mathbb{C}^{\dim N}$ dargestellt wird.

Die komplexen Mannigfaltigkeiten mit den holomorphen Abbildungen bilden eine Kategorie. Indem wir die Karten einer komplexen Mannigfaltigkeit als reellwertige Karten auffassen, erhalten wir aus einer komplexen Mannigfaltigkeit M die *zugrundeliegende glatte* (*reelle*) *Mannigfaltigkeit,* die wir für den Moment mit $M_{\mathbb{R}}$ bezeichnen wollen. Das liefert uns einen vergesslichen Funktor von der Kategorie der komplexen Mannigfaltigkeiten in die Kategorie der glatten Mannigfaltigkeiten aus Bemerkung 1.11.

Insbesondere ist die Dimension einer komplexen Mannigfaltigkeit stets als Dimension über $\mathbb{C}$ zu verstehen, und daher halb so groß wie die Dimension der zugrundeliegenden glatten Mannigfaltigkeit, die wir stets als Dimension über $\mathbb{R}$ verstehen.

4.2. Bemerkung. Wenn wir auf einer komplexen Mannigfaltigkeit Tangentialräume wie in Definition 1.13 (2) über Karten einführen, erhalten wir komplexe Vektorräume T_pM für $p \in M$. Wenn wir den Grundkörper von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{R}$ verkleinern, erhalten wir die Tangentialräume $T_pM_{\mathbb{R}}$ der zugrundeliegenden glatten Mannigfaltigkeit.

Die „algebraische" Definition 1.13 (1) funktioniert, wenn wir nur holomorphe Funktion betrachten, die auf kleinen Umgebung des betrachteten Punktes $p \in M$ definiert sind. Man beachte, dass es nicht immer ausreichend viele global definierte holomorphe Funktionen gibt. Auf kompakten komplexen Mannigfaltigkeiten etwa sind aufgrund des Satzes von Liouville alle holomorphen Funktionen bereits konstant.

Für die „geometrische" Definition 1.13 (2) könnten wir holomorphe Abbildungen von kleinen offenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ nach M betrachten.

In jedem Fall wirkt skalare Multiplikation mit $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ als Endomorphismus auf T_pM. Wenn wir die komplexe Struktur vergessen, erhalten wir einen Endomorphismus J von $T_pM_{\mathbb{R}}$ mit $J^2 = -\mathrm{id}_{T_pM_{\mathbb{R}}}$.

4.3. Definition. Eine *fast komplexe Struktur* auf einer glatten Mannigfaltigkeit M ist ein glatter Endomorphismus J von TM mit $J^2 = -\mathrm{id}_{TM}$.

Falls M einen holomorphen Atlas trägt, heißt der von der Multiplikation mit i induzierte Endomorphismus von TM die *induzierte fast komplexe Struktur.*

Ein ungerade-dimensionaler reeller Vektorraum V lässt keinen Endomorphismus J mit $J^2 = -\mathrm{id}$ zu; das folgt beispielsweise aus $(\det J)^2 = (-1)^{\dim V}$. Daher existieren fast komplexe Strukturen nur auf gerade-dimensionalen reellen Mannigfaltigkeiten.

Wir lernen im nächsten Abschnitt sogenannte *Integrabilitäts-Bedingungen* an J kennen, die es erlauben, eine komplexe Struktur auf M zu definieren, so dass J zur dadurch induzierten fast komplexen Struktur wird.

Als letztes tragen Kähler-Mannigfaltigkeiten stets eine symplektische Form. Solche Formen sind nicht ausgeartet. Da wir diesen Begriff später nicht nur für $k = 2$ benötigen, führen wir ihn hier entsprechend allgemein ein.

4.4. Definition. Eine alternierende k-Form auf M heißt *nicht ausgeartet,* wenn es für alle p und je $k-1$ linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_{k-1} \in T_pM$ einen weiteren Vektor $v_k \in T_pM$ gibt, so dass $\omega(v_1, \dots, v_k) \neq 0$.

Eine alternierende 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$ heißt *symplektisch,* wenn sie geschlossen und nicht ausgeartet ist. Eine *symplektische Mannigfaltigkeit* (M, ω) ist ein Paar aus einer glatten Mannigfaltigkeit und einer symplektischen Form.

Einer glatten Funktion h auf einer symplektischen Form ordnet man ihren *symplektischen Gradienten* $X_h \in \mathfrak{X}(M)$ zu, so dass $V(h) = \omega(X_h, V)$ für alle $V \in \mathfrak{X}(M)$. In diesem Formalismus lässt sich Hamiltonsche Mechanik auf Mannigfaltigkeiten beschreiben. In der Physik braucht man das beispielsweise für Bewegungen unter Zwangsbedingungen.

4.5. Beispiel. Auf $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ wähle Koordinaten $z_1, \dots, z_n$ mit $z^j = x^j + iy^j$. Dann liefert Multiplikation mit i eine fast komplexe Struktur J mit

$$J \tfrac{\partial}{\partial x^j} = \tfrac{\partial}{\partial y^j} \qquad \text{und} \qquad J \tfrac{\partial}{\partial y^j} = -\tfrac{\partial}{\partial x^j} \ .$$

Wir betrachten das Standard-Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ und die *Standard-symplektische Form*

$$\omega = g(J\,\cdot\,, \cdot\,) = dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + \dots + dx^n \wedge dx^n \ .$$

Wir fassen beide zusammen zur *Standard-Hermiteschen Metrik*

$$h(z,w) = (g + i\omega)(z,w) = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i \, w_i \ .$$

Wenn wir J wieder als Multiplikation mit $i = \sqrt{-1}$ verstehen, ist h im ersten Argument antilinear und im zweiten linear.

4.6. Definition. Es sei (M, J) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Eine Riemannsche Metrik g auf M heißt *kompatibel* zu J, wenn J bezüglich g schiefadjungiert ist. In diesem Fall definieren wir $\omega = g(J\,\cdot\,, \,\cdot\,) \in \Omega^2(M)$ und eine *Hermitesche Metrik* $h = g + i\omega$ auf TM.

Sei g eine kompatible Metrik auf einer (fast) komplexen Mannigfaltigkeit M und h die zugehörige Hermitesche Metrik, dann nennen wir (M, h) eine *(fast) Hermitesche Mannigfaltigkeit.*

4.7. Bemerkung. Wir erhalten $g = \operatorname{Re} h$ und $\omega = \operatorname{Im} h$ aus h zurück. Je zwei der drei Daten g, J und $\omega = g(J\,\cdot\,, \,\cdot\,)$ bestimmen das dritte, also legt h auch J fest. Es sind äquivalent (Übung):

(1) die Metrik g ist kompatibel zu J,
(2) die Metrik g ist J-invariant,
(3) die Form $\omega = g(J\,\cdot\,, \,\cdot\,)$ ist alternierend,
(4) der Ausdruck $h = g + i\omega$ definiert ein Hermitesches Skalarprodukt.

Kompatible Metriken existieren stets, denn sei (M, J) fast komplexe Mannigfaltigkeit und g_0 eine beliebige Riemannsche Metrik, dann ist $g = g_0 + g_0(J\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$ zu J kompatibel.

Es sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang zur Metrik g. Wir nennen J *parallel,* wenn

$$(\nabla_X J)Y = \nabla_X(JY) - J\nabla_X Y = 0 \ .$$

4.8. Satz und Definition. *Es sei (M, h) eine fast Hermitesche Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g, fast komplexer Struktur J und alternierender 2-Form ω, so dass $\omega = g(J\,\cdot\,, \,\cdot\,)$. Dann sind äquivalent:*

(1) *die fast komplexe Struktur J ist parallel,*
(2) *die fast komplexe Struktur J wird von einer komplexen Struktur induziert und ω ist geschlossen und somit symplektisch.*

Falls diese Bedingungen erfüllt sind, heißt (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit.

Insbesondere sind ω und h auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit genau dann parallel, wenn J parallel ist. Aus $\omega = g(J\,\cdot\,, \,\cdot\,)$ folgt insbesondere, dass ω nicht ausgeartet ist, also ist ω symplektisch, wenn $d\omega = 0$. Das einfachste Beispiel einer Kähler-Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{C}^n$ mit der Standard-Hermiteschen Metrik.

Während auf Riemannschen Mannigfaltigkeit nach Definition 1.39 (2) die Riemannsche Metrik parallel ist, ist eine Kähler-Mannigfaltigkeit eine komplexe Mannigfaltigkeit mit paralleler Hermitescher Metrik. In diesem Sinne ist also Kähler-Geometrie ein natürliches komplexes Analogon der Riemannschen Geometrie.

Beweis. Zu (1) $\Longrightarrow$ (2) müssen wir zunächst zeigen, dass eine parallele fast komplexe Struktur integrabel ist. Dieser Schritt ist nicht einfach, stattdessen verweisen wir auf den Satz von Newlander-Nirenberg, der das impliziert.

Anschließend wählen wir eine komplexe Karte $\varphi\colon U \to V \subset \mathbb{C}^n$ und setzen drei Vektoren x, y, $z \in T_pM$ zu konstanten Vektorfeldern X, Y und Z auf V fort. Dann kommutieren X, JX, Y, JY,

Z und JZ paarweise. Cartans Formel für die äußere Ableitung liefert

$$\begin{aligned}
d\omega(X,Y,Z) &= X\big(g(JY,Z)\big) + Y\big(g(JZ,X)\big) + Z\big(g(JX,Y)\big)\\
&= g\big((\nabla_X J)Y,Z\big) + g\big(J\nabla_X Y,Z\big) - g\big(Y,J\nabla_X Z\big)\\
&\qquad + g\big((\nabla_Y J)Z,X\big) + g\big(J\nabla_Y Z,X\big) - g\big(Z,J\nabla_Y X\big)\\
&\qquad + g\big((\nabla_Z J)X,Y\big) + g\big(J\nabla_Z X,Y\big) - g\big(X,J\nabla_Z Y\big)\\
&= g\big((\nabla_X J)Y,Z\big) + g\big((\nabla_Y J)Z,X\big) + g\big((\nabla_Z J)X,Y\big) = 0\;.
\end{aligned}$$

Zu (2) $\Longrightarrow$ (1) wählen wir X, Y und Z auf V wie oben und benutzen die Koszul-Formel und Cartans Formel für die äußere Ableitung. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
2g\big((\nabla_X J)Y,Z\big) &= 2g\big(\nabla_X(JY),Z\big) + 2g\big(\nabla_X Y,JZ\big)\\
&= X\big(g(JY,Z)\big) + (JY)\big(g(Z,X)\big) - Z\big(g(X,JY)\big)\\
&\qquad + X\big(g(Y,JZ)\big) + Y\big(g(JZ,X)\big) - (JZ)\big(g(X,Y)\big)\\
&= X\big(\omega(Y,Z)\big) + Y\big(\omega(Z,X)\big) + Z\big(\omega(X,Y)\big)\\
&\qquad - X\big(\omega(JY,JZ)\big) - (JY)\big(\omega(JZ,X)\big) - (JZ)\big(\omega(X,JY)\big)\\
&= d\omega(X,Y,Z) - d\omega(X,JY,JZ) = 0\;. \qquad\square
\end{aligned}$$

4.9. Bemerkung. Es sei $M = G/H$ ein symmetrischer Raum mit Riemannscher Metrik g, und es sei $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{p}$ die Zerlegung aus dem Beweis von Satz 3.17. Wenn der reelle Vektorraum $\mathfrak{p}$ eine Ad_H-invariante komplexe Struktur $J_{\mathfrak{p}}$ trägt, dann induziert $J_{\mathfrak{p}}$ eine G-invariante fast komplexe Struktur J auf M. Wenn J schiefadjungiert ist, ist g kompatibel zu J, und wir erhalten eine fast Hermitesche Mannigfaltigkeit (M,h).

In der Darstellung von (3.6) gilt

$$\widehat{J(V)} = J_{\mathfrak{p}}(\widehat{V}) \qquad \text{für alle } V \in \mathfrak{X}(M)\;,$$

und wegen Satz 3.19 (2) ist J parallel. Nach Definition 4.8 ist (M,h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Solche Mannigfaltigkeiten heißen *Hermitesch symmetrische Räume.*

4.10. Beispiel. Wir geben einige Beispiele hermitesch symmetrischer Räume.

(1) Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ ist Hermitesch symmetrisch, denn die komplexe Struktur auf $\mathfrak{p} \cong \mathbb{C}^n$ ist isotropie-invariant, siehe Beispiel 3.21.

(2) Die k-dimensionalen komplexen Unterräume von $\mathbb{C}^n$ bilden einen reell $2k(n-k)$-dimensionalen symmetrischen Raum

$$\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \cong U(n)/(U(n-k)\times U(k))\;.$$

Hier trägt $\mathfrak{p} \cong M_{n-k,k}(\mathbb{C})$ ebenfalls eine isotropie-invariante, $k(n-k)$-dimensionale komplexe Struktur, und wir erhalten eine Hermitesche Metrik $h^{\mathfrak{p}}(A,B) = \mathrm{tr}(A^*B)$.

(3) Die orientierten zweidimensionalen Ebenen im $\mathbb{R}^n$ bilden einen symmetrischen Raum

$$\widetilde{\mathrm{Gr}}_2(\mathbb{R}^n) \cong SO(n)/(SO(n-2)\times SO(2))\;.$$

Hier ist $\mathfrak{p} \cong M_{n-2,2}(\mathbb{R})$, und Rechtsmultiplikation mit $\left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ definiert eine isotropie-invariante komplexe Struktur auf $\mathfrak{p}$. Wieder sind g und J kompatibel, also ist $\widetilde{\mathrm{Gr}}_2(\mathbb{R})$ ebenfalls ein $(n-2)$-dimensionaler Hermitesch symmetrischer Raum.

(4) Sei schließlich $M = G/H$ ein Hermitesch symmetrischer Raum, dann ist auch der duale symmetrische Raum G'/H aus Bemerkung 3.18 wieder Hermitesch, denn wegen (3.5)

können wir auch auf $\mathfrak{p}'$ wieder eine H-invariante komplexe Struktur definieren. Zum Beispiel ist der komplex projektive Raum zum komplex hyperbolischen Raum dual, und letzterer trägt ebenfalls eine komplexe Struktur.

Unter einer *fast komplexen Untermannigfaltigkeit* einer fast komplexen Mannigfaltigkeit (M, J) verstehen wir eine Untermannigfaltigkeit $N \subset M$, so dass $T_q N$ für alle $q \in N$ unter J_q invariant ist. In diesem Fall schränken wir J auf TN ein und erhalten eine fast komplexe Struktur auf N.

4.11. Proposition. *Eine fast komplexe Untermannigfaltigkeit einer Kähler-Mannigfaltigkeit ist wieder eine Kähler-Mannigfaltigkeit.*

Beweis. Es sei (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit fast komplexer Struktur J und Riemannscher Metrik g. Wir versehen eine fast komplexe Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ mit der fast komplexen Struktur $J|_{TN}$ und der Hermiteschen Metrik $h|_{TN}$. Für die Levi-Civita-Zusammenhänge ∇^{TM}, ∇^{TN} von (M, g) und $(N, g|_{TN})$ gilt dann

$$g\big(\nabla^{TN}_U V, W\big) = g\big(\nabla^{TM}_U V, W\big)$$

für alle Vektorfelder U, V, $W \in \mathfrak{X}(N)$, vergleiche Bemerkung 1.42. Wir berechnen

$$g\big((\nabla^{TN}_U J)V, W\big) = g\big(\nabla^{TN}_U (JV), W\big) - g\big(J\nabla^{TN}_U V, W\big) = g\big(\nabla^{TM}_U (JV), W\big) - g\big(J\nabla^{TM}_U V, W\big) = 0 \;.$$

Also ist $J|_{TN}$ bezüglich ∇^{TN} parallel, und $(N, h|_{TN})$ ist eine Kähler-Mannigfaltigkeit. □

4.12. Bemerkung. Insbesondere sind fast komplexe Untermannigfaltigkeiten des komplex projektiven Raumes mit der von der Fubini-Study-Metrik induzierten Hermiteschen Metrik Kähler-Mannigfaltigkeiten; hierunter fallen insbesondere alle glatten komplexen projektiven Varietäten. Somit sind Kähler-Mannigfaltigkeiten auf der einen Seite spezieller als komplexe Mannigfaltigkeiten, aber allgemeiner als glatte projektive Varietäten über $\mathbb{C}$.

Hierunter fallen insbesondere alle Hermitesch symmetrischen Räume vom kompakten Typ. Beispielsweise ist die orientierte reelle Grassmann-Mannigfaltigkeit $\widetilde{\mathrm{Gr}}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ aus Beispiel 4.10 (3) isomorph zur Quadrik

$$M = \big\{\, [z_0 : \dots : z_{n+1}] \in \mathbb{C}P^{n+1} \;\big|\; z_0^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 0 \,\big\}$$

mit der induzierten Metrik (Übung).

Aus dem Satz von Chow folgt umgekehrt, dass fast komplexe Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{C}P^n$ bereits algebraische Varietäten sind.

Am Ende dieses Abschnitts wollen wir die Kähler-Eigenschaft als Holonomie-Eigenschaft der zugrundeliegenden Riemannschen Mannigfaltigkeit beschreiben.

4.13. Proposition. *Es sei (M, g) eine zusammenhängende, $2n$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann existieren J, ω und h auf M, so dass (M, h) zu einer Kähler-Mannigfaltigkeit wird, genau dann, wenn die Holonomie von M zu einer Untergruppe $H \subset U(n)$ mit der Standard-Darstellung auf $\mathbb{C}^n$ isomorph ist.*

Beweis. Diese Aussage folgt aus dem Holonomieprinzip. Es sei $\mathrm{Hol}_p(M, g) \subset U(n) \subset O(2n)$, dann trägt T_pM eine $\mathrm{Hol}_p(M, g)$-invariante komplexe Struktur, so dass die Multiplikation J_p mit $i = \sqrt{-1}$ schiefadjungiert ist.

Sei $\gamma\colon [0, 1] \to M$ eine stückweise glatte Kurve von p zu einem beliebigen Punkt $q \in M$, und sei $P_\gamma\colon T_pM \to T_qM$ die Parallelverschiebung entlang γ. Dann setzen wir

$$J_q = P_\gamma \circ J_p \circ P_\gamma^{-1} \;.$$

Sei γ' eine weitere derartige Kurve, dann ist $\gamma'\bar\gamma$ eine Schleife im Punkt p, wobei $\bar\gamma(t) = \gamma(1-t)$ die rückwärts durchlaufene Kurve bezeichne. Somit ist J_p invariant unter $P_{\gamma'\bar\gamma} = P_\gamma^{-1} \circ P_{\gamma'}$, und

$$P_{\gamma'} \circ J_p \circ P_{\gamma'}^{-1} = P_\gamma \circ P_{\gamma'\bar\gamma}^{-1} \circ J_p \circ P_{\gamma'\bar\gamma} \circ P_\gamma^{-1} = P_\gamma \circ J_p \circ P_\gamma^{-1} = J_q \ .$$

Die obige Zuordnung ist wohldefiniert, und J ist offensichtlich parallel. Es sei h die zugehörige Hermitesche Metrik, dann ist (M, h) nach Definition 4.8 also eine Kähler-Mannigfaltigkeit. □

Im Falle $\mathrm{Hol}_p(M, g) \cong U(n)$ ist die Kähler-Struktur eindeutig. Wir werden später aber auch Holonomien kennenlernen, die mehr als eine komplexe Struktur zulassen. Der einfachste Fall ist offenbar $\mathbb{R}^{2n}$ mit der Euklidischen Metrik.

4.2. Dolbeault-Kohomologie

Wir zerlegen den Raum der Differentialformen mit Hilfe der komplexen Struktur. Auf Kählermannigfaltigkeiten ist diese Zerlegung mit dem äußeren Differential verträglich, und wir erhalten eine analoge Zerlegung der de Rham-Kohomologie. Wenn wir den Satz von Hodge voraussetzen, können wir kompakte Mannigfaltigkeiten am Ende den sogenannten harten Lefschetz-Satz beweisen.

Wir beginnen mit etwas linearer Algebra. Es sei V ein $2n$-dimensionaler reeller Vektorraum und $J \in \operatorname{End} V$ ein Endomorphismus mit $J^2 = -\mathrm{id}_V$. Somit ist J bereits eine komplexe Struktur auf V. Dennoch komplexifizieren wir V zu einem $2n$-dimensionalen komplexen Vektorraum $V_\mathbb{C} = V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$. Wir müssen also strikt trennen zwischen der komplexen Struktur auf V und der Multiplikation mit $i \in \mathbb{C}$. Wir bezeichnen die komplex lineare Fortsetzung von J auf $V_\mathbb{C}$ wieder mit J. Sie ist diagonalisierbar mit Eigenwerten i und $-i$, und wir bezeichnen die zugehörigen Eigenräume mit V' und V''; beide haben komplexe Dimension n. Man nennt V' auch den *holomorphen* Unterraum von $V_\mathbb{C}$ und V'' den *antiholomorphen* Unterraum. Komplexe Konjugation definiert einen reellen, komplex antilinearen Isomorphismus von V' nach V''. Wenn wir eine reelle Basis von V der Form

$$(e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n) \tag{4.1}$$

gegeben haben, definieren wir Basen von V' und V'' durch

$$\left(\frac{e_1 - iJe_1}{2}, \dots, \frac{e_n - iJe_n}{2}\right) \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \left(\frac{e_1 + iJe_1}{2}, \dots, \frac{e_n + iJe_n}{2}\right) . \tag{4.2}$$

Es bezeichne jetzt $V^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{R})$ den reellen Dualraum, dann ist $V_\mathbb{C}^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(V_\mathbb{C}, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{C})$ die Komplexifizierung von V. Wenn wir J als Multiplikation mit i auffassen, zerfällt $V_\mathbb{C}^*$ in einen *holomorphen* Unterraum $V^{*\prime}$ und einen *antiholomorphen* Unterraum $V^{*\prime\prime}$, so dass

$$\begin{aligned} V^{*\prime} &= \left\{\, \alpha \in V_\mathbb{C}^* \;\middle|\; \alpha(Jv) = i\alpha(v) \text{ für alle } v \in V \,\right\} \\ \text{und} \qquad V^{*\prime\prime} &= \left\{\, \alpha \in V_\mathbb{C}^* \;\middle|\; \alpha(Jv) = -i\alpha(v) \text{ für alle } v \in V \,\right\} . \end{aligned}$$

Nachgeschaltete komplexe Konjugation (also $\bar\alpha(v) = \overline{\alpha(v)}$) liefert einen reellen, komplex antilinearen Isomorphismus von $V^{*\prime}$ nach $V^{*\prime\prime}$. Für alle $v \in V'$, $\bar v \in V''$ und alle $\alpha \in V^{*\prime}$, $\bar\alpha \in V^{*\prime\prime}$ gilt

$$\alpha(\bar v) = -i\alpha(i\bar v) = -i\alpha(-J\bar v) = i^2\alpha(\bar v) = -\alpha(\bar v) = 0$$

und genauso $\bar\alpha(v) = 0$. Da $V^{*\prime} \oplus V^{*\prime\prime} = V_\mathbb{C}^*$ zu $V_\mathbb{C} = V' \oplus V''$ dual ist, ist somit $V^{*\prime}$ zu V' und $V^{*\prime\prime}$ zu V'' dual. Seien $(e_1, \dots, e_n)$ wie in (4.1) gegeben, dann definieren wir $e^1, \dots, e^n \in V^*$ so, dass $e^i(e_j) = \delta^i_j$ und $e^i(Je_j) = 0$ für alle i, j. Wir erhalten Basen von $V^{*\prime}$ und $V^{*\prime\prime}$ der Form

$$\left(e^1 - ie^1 \circ J, \dots, e^n - ie^n \circ J\right) \qquad \text{beziehungsweise} \qquad \left(e^1 + ie^1 \circ J, \dots, e^n + ie^n \circ J\right) , \tag{4.3}$$

diese sind dual zu den entsprechenden Basen aus (4.2).

Wir können auf der einen Seite die äußere Algebra $\Lambda^\bullet V^*$ komplexifizieren zu $\Lambda_\mathbb{C}^\bullet V^*$, das heißt, wir bilden erst die reelle äußere Algebra und komplexifizieren anschließend. Auf der anderen Seite definieren wir die komplexen äußeren Algebren $\Lambda^\bullet V^{*\prime}$ der *holomorphen* und $\Lambda^\bullet V^{*\prime\prime}$ der *antiholomorphen* Formen auf V. Da wir reelle Vektoren in holomorphe und antiholomorphe Formen einsetzen dürfen, erhalten wir Abbildungen

$$\Lambda^\bullet V^{*\prime} \hookrightarrow \Lambda^\bullet_{\mathbb{C}} V^* \qquad \text{und} \qquad \Lambda^\bullet V^{*\prime\prime} \hookrightarrow \Lambda^\bullet_{\mathbb{C}} V^* \;.$$

Indem wir Vektoren und Formen in den Basen aus (4.2) und (4.3) darstellen, sehen wir, dass das Dachprodukt von holomorphen und antiholomorphen Formen einen Isomorphismus

$$\wedge\colon \Lambda^\bullet V^{*\prime} \otimes \Lambda^\bullet V^{*\prime\prime} \xrightarrow{\cong} \Lambda^\bullet_{\mathbb{C}} V^*$$

liefert. Fortan schreiben wir

$$\Lambda^{p,q} V^* = \Lambda^p V^{*\prime} \wedge \Lambda^q V^{*\prime\prime} \subset \Lambda^{p+q}_{\mathbb{C}} V^* \;.$$

Als nächstes nehmen wir an, dass (M,J) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit ist, siehe Definition 4.3. Wir zerlegen $T_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, $T^*_xM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $\Lambda^\bullet_{\mathbb{C}} T^*_x M$ wie oben.

4.14. Definition. Es sei (M,J) eine (fast) komplexe Mannigfaltigkeit. Dann definieren wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}'(M) &= \bigl\{\, V \in \mathfrak{X}(M)_{\mathbb{C}} \bigm| X(x) \in T'_x M \text{ für alle } x \in M \,\bigr\} \\ \text{und} \qquad \mathfrak{X}''(M) &= \bigl\{\, V \in \mathfrak{X}(M)_{\mathbb{C}} \bigm| X(x) \in T''_x M \text{ für alle } x \in M \,\bigr\} \;. \end{aligned}$$

Vektorfelder in $\mathfrak{X}'(M)_{\mathbb{C}}$ heißen *(fast) komplex.*

Für p, $q \geq 0$ definieren wir

$$\Omega^{p,q}(M) = \bigl\{\, \alpha \in \Omega^{p+q}(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \bigm| \alpha_x \in \Lambda^{p,q}_x T^*M \text{ für alle } x \in M \,\bigr\} \;.$$

Elemente $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ heißen *Formen vom Typ (p,q)* oder kurz *(p,q)-Formen.*

Da die obigen Zerlegungen glatt vom Basispunkt $x \in M$ abhängen, folgt

$$\Omega^k(M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(M) \;.$$

Es sei $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine glatte Funktion, dann zerlegen wir $df = \partial f + \bar\partial f$ mit $\partial f \in \Omega^{1,0}(M)$ und $\bar\partial f \in \Omega^{0,1}(M)$. Völlig analog sei $\alpha \in \Omega^{1,0}(M)$ gegeben, dann zerlegen wir

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar\partial\alpha + R\,\alpha \qquad \text{mit } \partial\alpha \in \Omega^{2,0}(M),\ \bar\partial\alpha \in \Omega^{1,1}(M) \text{ und } R\,\alpha \in \Omega^{0,2}(M) \;.$$

Eine analoge Zerlegung erhalten wir für $d\bar\alpha = \overline{d\alpha}$.

4.15. Proposition (Integrabilitätsbedingungen). *Es sei (M,J) eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Dann sind äquivalent:*

(1) *Die Lie-Klammer zweier fast komplexer Vektorfelder ist wieder fast komplex,*
(2) *Für alle $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ gilt*

$$d\alpha = \partial\alpha + \bar\partial\alpha \qquad \textit{mit} \qquad \partial\alpha \in \Omega^{p+1,q}(M) \qquad \textit{und} \qquad \bar\partial\alpha \in \Omega^{p,q+1}(M) \;,$$

(3) *Für alle reellen Vektorfelder X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ verschwindet der* Nijenhuis-Tensor

$$N(X,Y) = 2\bigl([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y]\bigr) \;,$$

(4) *Die fast komplexe Struktur J ist* integrierbar, *das heißt, sie wird von einem holomorphen Atlas auf M induziert.*

Auf einer Kähler-Mannigfaltigkeit (M,h) sind diese Bedingungen erfüllt.

Tatsächlich kann mit Lemma 1.48 überprüfen, dass N ein Tensor ist. Die Aussagen (1)–(3) heißen auch *Integrabilitätsbedingungen* an die fast komplexe Struktur J. Wenn sie gelten, heißt J *integrabel.*

Beweis. Wir zeigen hier die Äquivalenz von (1)–(3), und, dass diese Bedingungen sowohl für Kähler- als auch für komplexe Mannigfaltigkeiten gelten. Mit dem Satz von Newlander-Nirenberg folgt (4) aus (1)–(3).

Für „(1) $\Leftrightarrow$ (2)“ betrachte zunächst eine $(1,0)$-Form $\alpha \in \Omega^{1,0}(M)$. Nach Cartans Formel für die äußere Ableitung gilt

$$d\bar{\alpha}(X,Y) = X(\bar{\alpha}(Y)) - Y(\bar{\alpha}(X)) - \bar{\alpha}([X,Y]) .$$

Wenn X und Y fast komplex sind, verschwinden die ersten beiden Terme. Wenn (1) gilt, verschwindet auch der letzte Term. In diesem Fall hat $d\bar{\alpha}$ keine Komponente in $\Omega^{2,0}(M)$. Indem wir komplex konjugieren, sehen wir, dass $d\alpha$ keine Komponente in $\Omega^{0,2}(M)$ besitzt. Jetzt können wir jede (p,q)-Form als $C^\infty(M;\mathbb{C})$-Linearkombination von Produkten aus p Formen vom Typ $(1,0)$ und q Formen vom Typ $(0,1)$ schreiben, und erhalten Behauptung (2) aus der Produktregel für die äußere Ableitung. Für die Rückrichtung setzen wir für $\bar{\alpha}$ in der obigen Gleichung eine lokale Basis des Bündels $T^{*\prime\prime}M$ ein, um zu testen, ob die Lie-Klammer zweier fast komplexer Vektorfelder einen Anteil in $\mathfrak{X}''(M)$ hat.

Zu „(1) $\Leftrightarrow$ (3)“ seien X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ die Realteile zweier fast komplexer Vektorfelder; diese haben dann die Gestalt $X - iJX$, $Y - iJY \in \mathfrak{X}'(M)$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}[X - iJX, Y - iJY] &= [X,Y] - [JX,JY] - i\big([X,JY] + [JX,Y]\big) \\ &= -\frac{1}{2}N(X,Y) - (J+i)\big([X,JY] + [JX,Y]\big) .\end{aligned}$$

Der Nijenhuis-Tensor ist reell, und seine Anteile in $\mathfrak{X}'(M)$ und $\mathfrak{X}''(M)$ sind somit immer zueinander komplex konjugiert. Der letzte Term ist ein fast komplexes Vektorfeld, somit ist die Lie-Klammer zweier fast komplexer Vektorfelder genau dann fast komplex, wenn der Nijenhuis-Tensor ihrer Realteile verschwindet.

Wenn (M,h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist, nutzen wir aus, dass der Levi-Civita-Zusammenhang torsionsfrei und J parallel ist. Dann verschwindet der Nijenhuis-Tensor. Wenn (M,J) eine komplexe Mannigfaltigkeit ist, liefern Karten lokale biholomorphe Abbildungen nach $\mathbb{C}^n$, und $\mathbb{C}^n$ mit der Standard-Hermiteschen Metrik ist eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Also folgt (2) aus (4). $\square$

4.16. Bemerkung. Wir nehmen ab jetzt an, dass J integrabel ist. Aus $d^2 = 0$ und (2) folgt

$$\partial^2 = 0 , \qquad \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial = 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{\partial}^2 = 0 .$$

Insbesondere bildet $(\Omega^{p,\bullet}(M), \bar{\partial})$ einen Koketten-Komplex. Außerdem folgt aus der Produktregel für die äußere Ableitung, dass

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = (\partial\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \partial\beta \qquad \text{und} \qquad \bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) = (\bar{\partial}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge \bar{\partial}\beta .$$

4.17. Definition. Es sei (M,J) eine integrable fast komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist die (p,q)-te *Dolbeault-Kohomologie* von M definiert als

$$H^{p,q}(M) = H^q\big(\Omega^{p,\bullet}(M), \bar{\partial}\big) .$$

Man beachte, dass die Definition von $H^{p,q}(M)$ nicht symmetrisch in p und q ist. Tatsächlich sind $H^{p,q}(M)$ und $H^{q,p}(M)$ für allgemeine komplexe Mannigfaltigkeiten nicht isomorph. Es ist eine Besonderheit von Kähler-Mannigfaltigkeiten (und somit insbesondere auch von projektiven Varietäten) dass hier Isomorphie gilt.

Man kann auch die Dolbeault-Kohomologie von holomorphen Vektorbündeln über komplexen Mannigfaltigkeiten M definieren (Übung). Dabei entspricht $H^{p,q}(M)$ der q-ten Dolbeault-Kohomologie des holomorphen Bündels $\Lambda^p T^{*\prime}M \to M$.

4.18. Definition. Es sei $\pi\colon E \to M$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang r. Ein *holomorpher Vektorbündel-Atlas* für E ist eine Menge von lokalen Trivialisierungen der Form $\psi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{C}^r$, so dass die offenen Mengen U ganz M überdecken und alle Trivialisierungswechsel holomorphe Abbildungen mit Werten in $GL(r, \mathbb{C})$ sind.

Ein *holomorphes Vektorbündel* über einer komplexen Mannigfaltigkeit M ist ein komplexes Vektorbündel $\pi\colon E \to M$ mit einem maximalen holomorphen Vektorbündel-Atlas.

Wir schreiben $\Omega^{p,q}(M; E)$ für Schnitte des komplexen Vektorbündels $\Lambda^{p,q}T^*M \otimes_{\mathbb{C}} E$ und definieren die Dolbeault-Kohomologie $H^q_{\mathrm{Dol}}(M; E) = H^q\big(\Omega^{0,\bullet}(M; E), \bar\partial\big)$. Wir werden den folgenden Satz nicht beweisen, geben aber einige technische Hilfsmittel an, die wir im nächsten Abschnitt brauchen.

4.19. Satz (Dolbeault, siehe [**H**, Cor 2.6.21, 2.6.25]). *Es sei (M, J) eine komplexe Mannigfaltigkeit und $E \to M$ ein holomorphes Vektorbündel. Dann stimmt die Dolbeault-Kohomologie mit der Kohomologie der Garbe der holomorphen Schnitte von E überein.*

Wir skizzieren wenigstens eine Vorstufe des eindimensionalen Poincaré-Lemmas. Es sei $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige, aber nicht notwendig komplex differenzierbare Funktion. Wir identifizieren $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$, und bezeichnen die Standard-Koordinaten mit $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_n = x_n + iy_n$. In Analogie mit (4.2) definieren wir

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar z_i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + i\frac{\partial f}{\partial y_i}\right) .$$

Die *Cauchy-Riemann-Gleichungen* reduzieren sich damit auf $\frac{\partial f}{\partial \bar z_i} = 0$. Eine Funktion, die sie erfüllt, heißt *holomorph.* Wir müssen jedoch auch andere Funktionen betrachten.

In Analogie mit (4.3) definieren wir außerdem

$$dz_i = dx_i + i\,dy_i \in \Omega^{1,0}(\mathbb{C}^n) \qquad \text{und} \qquad d\bar z_i = dx_i - i\,dy_i \in \Omega^{0,1}(\mathbb{C}^n) .$$

Dann können wir ∂f und $\bar\partial f$ jetzt schreiben als

$$\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i}\,dz_i \qquad \text{und} \qquad \bar\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar z_i}\,d\bar z_i . \tag{4.4}$$

Eine Funktion f ist also genau dann holomorph, wenn $\bar\partial f = 0$.

4.20. Bemerkung. Die nullte Dolbeault-Kohomologie $H^0_{\mathrm{Dol}}(M; E)$ ist gerade der Kern von $\bar\partial$, also enthält sie genau die globalen holomorphen Schnitte von E. Entsprechend enthält $H^{p,0}(M)$ genau die holomorphen p-Formen. Das erklärt, warum wir zur Berechnung der *holomorphen* Kohomologiegruppen von M die holomorphe Welt verlassen und stattdessen den Operator $\bar\partial$ und die (für $q \geq 1$ nicht mehr holomorphen) Bündel $\Lambda^{p,0}T^*M$ betrachten. Sobald wir Holomorphie aufgeben, haben wir Abschneidefunktionen und Partitionen der Eins zur Verfügung. Hieraus folgt beispielsweise, dass die Garben der glatten Schnitte von $\Lambda^{p,q}T^*M$ und $\Lambda^q T^{*\prime\prime}M \otimes_{\mathbb{C}} E$ azyklisch sind, und der Dolbeault-Komplex somit eine *Auflösung* der Garbe der holomorphen Schnitte von $\Lambda^p T^{*\prime}M$ beziehungsweise E liefert.

Tatsächlich ist dieses Vorgehen typisch für Kähler-Geometrie: wir ersetzen holomorphe oder algebraische Konzepte durch geometrische, um die volle Flexibilität der Differentialgeometrie zur Verfügung zu haben.

Für den nächsten Satz erinnern wir uns an das Kurvenintegral aus der Analysis und der Funktionentheorie.

4.21. Satz (Cauchy-Integralformel). *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und $f\colon U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Es sei $z_0 \in U$ und $r > 0$ klein genug, so dass $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Dann gilt für alle $w \in B_r(z_0)$, dass*

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r(z_0)} \frac{\bar\partial f(z) \wedge dz}{z-w} \;.$$

In der Funktionentheorie beweisen wir diese Formel nur im holomorphen Fall; dann verschwindet der zweite Term. Allerdings verlangen wir nur totale, nicht stetige Differenzierbarkeit.

Beweis. Wir wenden den Satz von Stokes auf die Form $\alpha = \frac{f(z)\,dz}{z-w} \in \Omega^{1,0}(U \setminus \{w\})$ und das Gebiet $B_r(z_0) \setminus B_\varepsilon(w)$ an und betrachten den Grenzwert $\varepsilon \to 0$. Es gilt $\bar\partial\bigl(\frac{1}{z-w}\bigr) = 0$, da $\frac{1}{z-w}$ holomorph ist. Außerdem gilt $d\alpha = \bar\partial\alpha$, da $\partial\alpha \in \Omega^{2,0}(U \setminus \{w\}) = 0$ aus Dimensionsgründen. Wenn wir $\partial B_\varepsilon(w)$ durch $t \mapsto w + \varepsilon\, e^{it}$ parametrisieren, erhalten wir als Längenelement $dz = i\varepsilon\, e^{it}\, dt$. Es folgt

$$\begin{aligned}\int_{B_r(z_0)\setminus B_\varepsilon(w)} \frac{\bar\partial f(z) \wedge dz}{z-w} &= \int_{B_r(z_0)\setminus B_\varepsilon(w)} d\alpha = \int_{\partial B_r(z_0)} \alpha - \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \alpha \\ &= \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - \int_0^{2\pi} \bigl(f(w) + O(\varepsilon)\bigr) \frac{i\varepsilon\, e^{it}\, dt}{\varepsilon\, e^{it}} \\ &= \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)\,dz}{z-w} - 2\pi i\, f(w) + O(\varepsilon) \;. \qquad \square\end{aligned}$$

4.22. Folgerung. *Es sei $U \subset \mathbb{C}$ und $\alpha \in \Omega^{0,1}(U)$. Es sei $z_0 \in U$ und $r > 0$ so klein, dass $\overline{B_r(z_0)} \subset U$. Definiere $g\colon B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ durch*

$$g(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{B_r(z_0)} \frac{\alpha\, dz}{z-w} \;,$$

dann gilt $\bar\partial g = \alpha|_{B_r(z_0)}$.

Beweis. Es sei $\alpha = f(z)\, d\bar z$. Es sei $w_0 \in B_r(z_0)$. Da $B_r(z_0)$ offen ist, können wir $f = f_1 + f_2$ so schreiben, dass $\operatorname{supp} f_1 \subset B_r(z_0)$ gilt, wohingegen f_2 auf einer kleinen Umgebung V von w_0 verschwindet. Im folgenden sei stets $w \in V$.

Wir setzen f_1 außerhalb von $B_r(z_0)$ durch 0 fort. Dann führen wir Polarkoordinaten $z = w + re^{it}$ ein. Es folgt

$$d\bar z \wedge dz = e^{-it}\,(dr - ri\,dt) \wedge e^{it}\,(dr + ri\,dt) = 2ri\, dr \wedge dt \;.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \bar w} \int_{B_r(z_0)} \frac{f_1(z)\, d\bar z \wedge dz}{z-w} &= \frac{\partial}{\partial \bar w} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f_1\bigl(w + re^{it}\bigr) \frac{2ir\, dt\, dr}{re^{it}} \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_1(w + re^{it})}{\partial \bar w} \frac{2ir\, dr\, dt}{re^{it}} = \int_{B_r(z_0)} \frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar z} \frac{d\bar z \wedge dz}{z-w} \;.\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist die Funktion $\frac{f_2(z)}{z-w}$ holomorph in $w \in V$, und das gleichmäßig in $z \in \overline{B_r(z_0)}$. Da f_1 auf $\partial B_r(z_0)$ verschwindet und auf V mit f übereinstimmt, folgt aus der Cauchy-Integralformel 4.21, dass

$$\frac{\partial}{\partial \bar w} \int_{B_r(z_0)} \frac{f(z)\, d\bar z \wedge dz}{z-w} = \int_{B_r(z_0)} \frac{\partial f_1(z)}{\partial \bar z} \frac{d\bar z \wedge dz}{z-w} = -2\pi i\, f_1(w) = -2\pi i\, f(w) \;. \qquad \square$$

Somit sind $\bar\partial$-geschlossene $(0,1)$-Formen auf $\mathbb{C}$ lokal exakt. Man beachte, dass wir g aus Gründen der Integrierbarkeit nur auf einer relativ kompakten Teilmenge von U definiert haben. Mit einem ähnlichen Argument zeigt man, dass $\bar\partial$-geschlossene (p,q)-Formen lokal exakt sind für $q \geq 1$. Daraus folgt mit garbentheoretischen Methoden der Satz von Dolbeault.

4.3. Der Satz von Newlander und Nirenberg

Wir betrachten eine reell $2n$-dimensionale fast komplexe Mannigfaltigkeit (M,J) und nehmen an, dass eine der äquivalenten Bedingungen aus Proposition 4.15 (1)–(3) gilt. Dann konstruieren wir holomorphe Abbildungen $F\colon U \to M$ für kleine offene Mengen $U \subset \mathbb{C}^n$ bezüglich der komplexen Struktur I auf $\mathbb{C}^n$ und der fast komplexen Struktur J, die nahe $0 \in U$ invertierbares Differential haben. Lokale Umkehrungen dieser Abbildungen liefern uns Karten φ von M. Da all diese Karten $I \circ d\varphi = d\varphi \circ J$ erfüllen, sehen wir, dass alle Kartenwechsel zwischen ihnen holomorph sind. Somit haben wir (M,J) mit einer komplexen Struktur versehen, die die fast komplexe Struktur J induziert. Damit haben wir zum einen gezeigt, dass Bedingung (4) zu den anderen Bedingungen in Proposition 4.15 äquivalent ist. Zum anderen liefert uns das den fehlenden Schritt im Beweis von Satz 4.8. Wir folgen dem Originalbeweis aus [**NN**].

Wir wählen zunächst einen Punkt $p \in M$ und eine Karte ψ um p mit Bildmenge $V = \operatorname{im}\psi \subset \mathbb{C}^n$. Indem wir eine reelle lineare Abbildung hinterherschalten, dürfen wir annehmen, dass $d_p\psi \circ J_p = I \circ d_p\psi$ gilt. Dann induziert ψ eine fast komplexe Struktur, die wir wieder mit $J\colon V \to \operatorname{End}_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^n$ bezeichnen wollen. Es gilt $d\psi \circ J = J \circ d\psi$, und daher $J_0 = I_0$ an der Stelle $0 \in V$.

Sei jetzt $U \subset \mathbb{C}^n$ mit $0 \in U$, dann suchen wir eine Abbildung $U \to M$, die 0 auf p abbildet, und deren Differential die komplexe Struktur I in J überführt. Wir verlängern diese Abbildung mit ψ zu einer Abbildung $F\colon U \to V$ mit $F(0) = 0$ und verlangen $dF \circ I = J \circ dF$ auf ganz U. Indem wir einen komplex-linearen Isomorphismus hinterherschalten, dürfen wir annehmen, dass $d_0F = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$. Auf U wählen wir wieder Koordinaten $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$. Wir schreiben ∂_j und $\bar\partial_j$ für $\frac{\partial}{\partial z_j}$ und $\frac{\partial}{\partial \bar z_j}$ bezüglich der komplexen Strukturen i auf U und I auf V, so dass ∂ und $\bar\partial$ die entsprechenden n-Tupel bezeichnen, vergleiche (4.4). Da $J\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ bezüglich der komplexen Struktur I nur $\mathbb{R}$-linear ist, schreiben wir $J(v) = B \cdot v + C \cdot \bar v$ mit komplexen Matrizen $B, C\colon V \to M_n(\mathbb{C})$. Aus der Gleichung $dF \circ I = J \circ dF$ wird dann

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} - (B \circ F) \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} - (C \circ F) \cdot \frac{\partial \bar F}{\partial x_j} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_j} + (B \circ F) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_j} + (C \circ F) \cdot \frac{\partial \bar F}{\partial y_j} = 0\,.$$

Daraus erhalten wir als komplexe Linearkombination das Differentialgleichungssystem

$$(E_n - iB \circ F) \cdot \bar\partial F - (iC \circ F) \cdot \bar\partial \bar F = 0\colon T''U \longrightarrow T_{\mathbb{C}}V\,. \tag{4.5}$$

Nach obiger Annahme gilt $B|_0 = iE_n$ und $C|_0 = 0$, also ist die Matrix $E_n - iB$ nahe 0 invertierbar. Wir setzen $A = -(E_n - iB)^{-1} \cdot iC\colon V \to M_n(\mathbb{C})$. Indem wir (4.5) mit $(E_n - iB)^{-1}$ multiplizieren, erhalten wir das neue Differentialgleichungssystem

$$\bar\partial F + (A \circ F) \cdot \bar\partial \bar F = 0\,. \tag{4.6}$$

Es gilt $A|_0 = 0$ da $C|_0 = 0$, und somit $\bar\partial F|_0 = 0$. Da wir eine Parametrisierung erhalten wollen, verlangen wir, dass die Matrix $\bar\partial \bar F = \overline{\partial F}$ nahe $0 \in U$ invertierbar ist.

Falls (4.6) eine C^2-Lösung besitzt, erfüllt sie $\bar\partial_j \bar\partial_k f_\ell = \bar\partial_k \bar\partial_j f_\ell$ nach dem Satz von Schwarz. Wir führen für die Komponenten der linken Seite von (4.6) die Notation $H = \bar\partial F + (A \circ F) \cdot \bar\partial \bar F$ mit

$$h_{\ell j} = \bar\partial_j f^\ell + \sum_m (a_{\ell m} \circ F)\, \bar\partial_j f^m$$

ein. Mit diesen Annahmen und der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= -\bar\partial_k \bar\partial_j f_\ell + \bar\partial_j \bar\partial_k f_\ell \\
&= -\bar\partial_k h_{\ell j} + \bar\partial_j h_{\ell k} + \bar\partial_k \sum_m (a_{\ell m} \circ F) \bar\partial_j \bar f_m - \bar\partial_j \sum_m (a_{\ell m} \circ F) \bar\partial_k \bar f_m \\
&= -\bar\partial_k h_{\ell j} + \bar\partial_j h_{\ell k} + \sum_m (a_{\ell m} \circ F) \underbrace{\bar\partial_k \bar\partial_j \bar f_m - \bar\partial_j \bar\partial_k \bar f_m}_{=0} \\
&\qquad + \sum_{m,p} \Big((\partial_p a_{\ell m} \circ F) \, (\bar\partial_k f_p \, \bar\partial_j \bar f_m - \bar\partial_j f_p \, \bar\partial_k \bar f_m) + (\bar\partial_p a_{\ell m} \circ F) \, (\bar\partial_k \bar f_p \, \bar\partial_j \bar f_m - \bar\partial_j \bar f_p \, \bar\partial_k \bar f_m) \Big) \\
&= -\bar\partial_k h_{\ell j} + \bar\partial_j h_{\ell k} + \sum_{m,p} (\partial_p a_{\ell m} \circ F) \, (h_{pk} \, \bar\partial_j \bar f_m - h_{pj} \, \bar\partial_k \bar f_m) \\
&\qquad\qquad + \sum_{m,q} \left(\bar\partial_q a_{\ell m} \circ F - \sum_p (\partial_p a_{\ell m} \circ F) \, (a_{pq} \circ F) \right) (\bar\partial_k \bar f_q \, \bar\partial_j \bar f_m - \bar\partial_j \bar f_q \, \bar\partial_k \bar f_m) \; . \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Wir haben angenommen, dass die Vektoren $\bar\partial_1 \bar F, \ldots, \bar\partial_n \bar F$ linear unabhängig sind. Daher folgt aus der obigen Rechnung im Falle $H = 0$ durch Koeffizientenvergleich, dass

$$\bar\partial_k a_{\ell j} - \bar\partial_j a_{\ell k} - \sum_p \big(a_{pk} \, \partial_p a_{\ell j} - a_{pj} \, \partial_p a_{\ell k} \big) = 0 \; . \qquad (4.8)$$

Wir wollen die Integrabilitätsbedingungen (4.8) aus den Integrabilitätsbedingungen aus Proposition 4.15 ableiten. Aus Bedingung 4.15 (1) folgt durch komplexe Konjugation, dass die Lie-Klammer zweier Vektorfelder aus $\mathfrak{X}''(M)$ wieder in $\mathfrak{X}''(M)$ liegt. Die folgende Konstruktion von Vektorfeldern in $\mathfrak{X}''(V)$ ist etwas unübersichtlich, da wir sowohl die fast komplexe Struktur J als auch die komplexe Struktur I und den Skalar $i \in \mathbb{C}$ betrachten müssen. Es seien $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1, \ldots, \zeta_n = \xi_n + i\eta_n$ komplexe Koordinaten auf V, so dass $\frac{\partial}{\partial \eta_j} = I \frac{\partial}{\partial \xi_j}$. Da B, C bezüglich der komplexen Struktur I komplex linear sind, gilt

$$\begin{aligned}
J \frac{\partial}{\partial \xi_j} &= B \frac{\partial}{\partial \xi_j} + C \frac{\partial}{\partial \xi_j} = \sum_k \left(\operatorname{Re}(b_{kj} + c_{kj}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} + \operatorname{Im}(b_{kj} + c_{kj}) \frac{\partial}{\partial \eta_k} \right) , \\
J \frac{\partial}{\partial \eta_j} &= B \frac{\partial}{\partial \eta_j} - C \frac{\partial}{\partial \eta_j} = \sum_k \left(\operatorname{Re}(b_{kj} - c_{kj}) \frac{\partial}{\partial \eta_k} - \operatorname{Im}(b_{kj} - c_{kj}) \frac{\partial}{\partial \xi_k} \right) \\
\text{und} \qquad J \frac{\partial}{\partial \bar\zeta_j} &= \frac{J}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_j} + i \frac{\partial}{\partial \eta_j} \right) = \sum_k \left(\bar b_{kj} \frac{\partial}{\partial \bar\zeta_k} + c_{kj} \frac{\partial}{\partial \zeta_k} \right) .
\end{aligned}$$

Mit der Kurzschreibweise $\partial_j = \frac{\partial}{\partial \zeta_j}$ und $\bar\partial_j = \frac{\partial}{\partial \bar\zeta_j}$ erhalten wir nahe 0 eine Basis von $T''V$ der Form

$$\bar\partial_j + iJ\bar\partial_j = \bar\partial_j + i \sum_k \big(\bar b_{kj} \bar\partial_k + c_{kj} \partial_k \big) \in \mathfrak{X}''(V) \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n \; . \qquad (4.9)$$

Aus $J^2 = -\mathrm{id}$ folgt

$$-v = J^2 v = B^2 v + BC\bar v + C\bar B \bar v + C\bar C v \; ,$$

und somit $B^2 + C\bar C = -E_n$ und $BC + C\bar B = 0$. Also gilt $(E_n - iB)C = C(E_n + i\bar B)$, und daher auch $iC(E_n + i\bar B)^{-1} = (E_n - iB)^{-1} iC = -A$. Wir bilden Linearkombinationen der Vektorfelder (4.9) mit den Koeffizienten der Matrix $(E_n + i\bar B)^{-1}$ und erhalten nahe 0 eine neue Basis

$$\bar\partial_j - \sum_k a_{kj} \partial_k \qquad \text{für } j = 1, \ldots, n \; . \qquad (4.10)$$

Da die Koordinatenvektorfelder $\bar\partial_j$, ∂_k paarweise kommutieren, folgt aus der Integrabilitätsbedingung 4.15 (1), dass

$$\mathfrak{X}''(V) \ni \Bigl[\bar\partial_j - \sum_\ell a_{\ell j}\partial_\ell, \bar\partial_k - \sum_p a_{pk}\partial_p\Bigr] = \sum_\ell (\bar\partial_k a_{\ell j} - \bar\partial_j a_{\ell k})\partial_\ell + \sum_{\ell,p}(a_{pj}\partial_p a_{\ell k} - a_{pk}\partial_p a_{\ell j})\partial_\ell \;,$$

Auf der rechten Seite stehen nur Vielfache der ∂_ℓ. Aufgrund der Form der Basis (4.10) von $T''V$ sehen wir, dass die rechte Seite nur in $\mathfrak{X}''(V)$ liegen kann, wenn sie verschwindet. Koeffizientenvergleich liefert uns die Integrabilitätsbedingungen (4.8).

Um die Gleichungen (4.6) zu lösen, erinnern wir uns an Folgerung 4.22. Wir fixieren $r > 0$ so, dass $\overline{B_r(0)}^n \subset U$, und definieren $T_j f$ für $j = 1, \dots, n$ auf Abbildungen f auf U durch

$$(T_j f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{B_r(0)} f(z_1, \dots, z_{j-1}, w, z_{j+1}, \dots, z_n)\,\frac{d\bar w\, dw}{z_j - w} \qquad \text{für alle } z \in B_r(0) \subset \mathbb{C} \;.$$

Wichtig ist dabei, dass f auf $B_r(0)$ integrierbar ist. Das gilt sicher, wenn f für $z_j \in \overline{B_r(0)}$ definiert ist. Dann haben wir für $j \neq k$ die Vertauschungsregeln

$$[T_j, T_k] = [\bar\partial_j, \bar\partial_k] = [\bar\partial_j, T_k] = 0 \;.$$

Nach Folgerung 4.22 ist außerdem $\bar\partial_j T_j f = f|_{B_r(0)}$.

Wie in [**NN**] definieren wir $\mathbb{T}G$ für matrixwertige Abbildungen $G\colon U \to M_n(\mathbb{C})$ durch

$$\mathbb{T}G = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s}{s+1} \sum_{1 \le j_1 < \dots < j_s \le n} T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} \sum_{k \notin \{j_1, \dots, j_s\}} T_k g_k \colon B_r(0)^n \longrightarrow \mathbb{C}^n \;, \tag{4.11}$$

wobei g_k die k-te Spalte der Matrix G bezeichne. Wir betrachten dann die Gleichung

$$F = z - \mathbb{T}\bigl((A \circ F) \cdot \bar\partial \bar F\bigr) + \mathbb{T}\bigl((A \circ F) \cdot \bar\partial \bar F\bigr)|_{z=0} \;. \tag{4.12}$$

4.23. Proposition ([**NN**]). *Für kleine $r > 0$ besitzt die Gleichung (4.12) eine glatte Lösung.*

Beweis. Wir wollen diesen Beweis nicht ausführen. Die Grundidee besteht darin, eine Folge von Funktionen $F_\nu\colon B_r(0)^n \to \mathbb{C}^n$ zu definieren durch

$$F_{\nu+1} = z - \mathbb{T}\bigl((A \circ F_\nu) \cdot \bar\partial \bar F_\nu\bigr) + \mathbb{T}\bigl((A \circ F_\nu) \cdot \bar\partial \bar F_\nu\bigr)|_{z=0}$$

und Konvergenz für kleine $r > 0$ in einem geeigneten Funktionenraum zu beweisen. □

Wir wollen verstehen, warum eine Lösung von (4.12) auch (4.6) löst. Wenn wir $\bar\partial_j$ auf einen Summanden in (4.11) wirken lassen, gibt es drei Möglichkeiten.

(1) Es gilt $j = j_a$ für ein $a \in \{1, \dots, s\}$. Da $\bar\partial_j T_j f = f|_{B_r(0)}$, erhalten wir

$$\bar\partial_j\bigl(T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} T_k g_k\bigr) = T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots \widehat{T_{j_a}\bar\partial_{j_a}} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} T_k \bar\partial_j g_k \;.$$

(2) Es gilt $j = k$. Dann erhalten wir

$$\bar\partial_j\bigl(T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} T_k g_k\bigr) = T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s}\, g_k \;.$$

(3) Es gilt $j \notin \{j_1, \dots, j_s, k\}$. In diesem Fall erhalten wir den Ausdruck

$$\bar\partial_j\bigl(T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} T_k g_k\bigr) = T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} T_k \bar\partial_j g_k \;.$$

Im Fall (2) können wir jeden der s Operatoren $T_{j_a}\bar\partial_{j_a}$ an die letzte Stelle rotieren und zum neuen $T_k\bar\partial_k$ machen, außer im Fall $s = 0$. Das liefert insgesamt

$$\bar\partial_j \mathbb{T}G = g_j + \sum_{s=0}^{n-2} \frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)} \sum_{\substack{1 \le j_1 < \dots < j_s \le n \\ j \notin \{j_1, \dots, j_s\}}} T_{j_1}\bar\partial_{j_1} \cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} \sum_{k \notin \{1, j_1, \dots, j_s\}} T_k(\bar\partial_j g_k - \bar\partial_k g_j) \;. \tag{4.13}$$

Indem wir (4.12) nach $\bar\partial_j$ ableiten, erhalten wir mit (4.13) für $G = -(A\circ F)\cdot\bar\partial\bar F$ und $H = \bar\partial F - G$ wie oben, dass

$$h_{\ell j} = \sum_{s=0}^{n-2} \frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)} \sum_{\substack{1\le j_1<\dots<j_s\le n\\ j\notin\{j_1,\dots,j_s\}}} T_{j_1}\bar\partial_{j_1}\cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} \sum_{k\notin\{1,j_1,\dots,j_s\}} T_k(\bar\partial_1 g_k - \bar\partial_k g_1)\;.$$

Aus (4.7) folgt mit der Integrabilitätsbedingung (4.8), dass

$$\bar\partial_j g_k - \bar\partial_k g_j = \sum_{m,p} (\partial_p a_{\ell m}\circ F)\,(h_{pk}\,\bar\partial_j\bar f_m - h_{pj}\,\bar\partial_k\bar f_m)\;.$$

Durch Einsetzen in die obige Gleichung für $h_{\ell j}$ erhalten wir

$$h_{\ell j} = \sum_{s=0}^{n-2} \frac{(-1)^s}{(s+1)(s+2)} \sum_{\substack{1\le j_1<\dots<j_s\le n\\ j\notin\{j_1,\dots,j_s\}}} T_{j_1}\bar\partial_{j_1}\cdots T_{j_s}\bar\partial_{j_s} \sum_{k\notin\{j,j_1,\dots,j_s\}} T_k\biggl(\sum_{m,p}(\partial_p a_{\ell m}\circ F)\,(h_{pk}\,\bar\partial_j\bar f_m - h_{pj}\,\bar\partial_k\bar f_m)\biggr)\;. \tag{4.14}$$

4.24. Proposition ([**NN**]). *Das Gleichungssystem* (4.14) *hat für kleine Radien $r>0$ als einzige Lösung $H=0$.* □

4.25. Satz (Newlander-Nirenberg, [**NN**]). *Eine fast komplexe Mannigfaltigkeit ist genau dann komplex, wenn sie die Integrabilitätsbedingungen aus Proposition 4.15* (1)–(3) *erfüllt.*

Beweis. Zu zeigen ist nur noch die Rückrichtung. Wir haben bereits gesehen, dass die Integrabilitätsbedingung aus Proposition 4.15 (1) zu (4.8) äquivalent ist. Eine Abbildung $U\to M$ ist genau dann eine holomorphe Parametrisierung von M, wenn sie in einer geeigneten Karte die Differentialgleichung (4.6) erfüllt.

Um eine solche Parametrisierung zu erhalten, lösen wir zunächst das Gleichungssystem (4.12) mit Hilfe von Proposition 4.23. Anschließend zeigen wir mit (4.14) und Proposition 4.24, dass die Lösung F von (4.12) auch (4.6) erfüllt.

Es bleibt zu zeigen, dass F nicht ausgeartetes Differential hat. Gleichung (4.12) und ihre Lösung hängen von der Wahl von $r>0$ in der Definition der Operatoren T_j ab. Für ausreichend kleine r ist der Term $\mathbb{T}((A\circ F)\circ\bar\partial\bar F)$ in der C^1-Norm auf $B_r(0)^n$ wesentlich kleiner als z, so dass die Lösung von (4.12) in einer Umgebung von 0 nicht ausgeartetes Differential hat. □

4.4. Hodge-Theorie auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Auf einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit kann man jede de Rham-Kohomologieklasse auf eindeutige Weise durch eine sogenannte harmonische Differentialform repräsentieren. Auf komplexen Mannigfaltigkeiten erhält man analoge Resultate für die Dolbeault-Kohomologie aus dem vorletzten Abschnitt. Auf Kähler-Mannigfaltigkeiten kann man jede harmonische k-Form in eine Summe harmonischer $(p,k-p)$-Formen zerlegen. Zerlegungen dieser Art sind typische für Mannigfaltigkeiten spezieller Holonomie. Für Kähler-Mannigfaltigkeiten erhält als Konsequenz unter anderem Serre-Dualität und den sogenannten „harten Lefschetz-Satz“; diese Resultate werden wir hier aber nur am Rande erwähnen.

Zunächst sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren einen Zusammenhang auf k-Formen durch

$$\begin{aligned}&(\nabla_{X_0}\alpha)(X_1,\dots,X_k)\\&\qquad=X_0\big(\alpha(X_1,\dots,X_k)\big)-\alpha(\nabla_{X_0}X_1,X_2,\dots,X_k)-\dots-\alpha(X_1,\dots,X_{k-1},\nabla_{X_0}X_k)\end{aligned}\tag{4.15}$$

für alle X_0, …, $X_k\in\mathfrak{X}(M)$. Man überzeugt sich leicht, dass ∇ ein Zusammenhang ist und definiert seine Krümmung wie üblich als

$$R_{X,Y}\alpha=\nabla_X\nabla_Y\alpha-\nabla_Y\nabla_X\alpha-\nabla_{[X,Y]}\alpha\;.$$

Indem man ausnutzt, dass der Levi-Civita-Zusammenhang ∇ torsionsfrei ist, kann man die Cartan-Formel für die äußere Ableitung umschreiben als

$$d\alpha(X_0,\dots,X_k)=(\nabla_{X_0}\alpha)(X_1,\dots,X_k)\mp\dots+(-1)^k(\nabla_{X_k}\alpha)(X_0,\dots,X_{k-1})\;.\tag{4.16}$$

Als nächstes definieren wir ein L^2-Skalarprodukt auf $\Omega^k(M)$ für alle M. Dazu sei $(e_1,\dots,e_n)$ ein lokaler orthonormaler Rahmen von $TM|_U$ für eine offene Teilmenge $U\subset M$ und $(e^1,\dots,e^n)$ der duale orthonormale Rahmen von $T^*M|_U$. Dann können wir α, $\beta\in\Omega^k(M)$ auf eindeutige Weise darstellen als

$$\alpha=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}a_{j_1,\dots,j_k}\,e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_k}\qquad\text{und}\qquad\beta=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}b_{j_1,\dots,j_k}\,e^{j_1}\wedge\dots\wedge e^{j_k}$$

mit Funktionen $a_{j_1,\dots,j_k}=\alpha(e_{j_1},\dots,e_{j_k})$ und $b_{j_1,\dots,j_k}\colon U\to\mathbb{R}$. Das punktweise Skalarprodukt

$$\langle\alpha,\beta\rangle_p=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}a_{j_1,\dots,j_k}b_{j_1,\dots,j_k}$$

hängt nicht von der Wahl des Rahmens $(e_1,\dots,e_n)$ ab, und wir definieren das L^2-Skalarprodukt durch

$$\langle\alpha,\beta\rangle_{L^2}=\int_M\langle\alpha,\beta\rangle_p\,d\mathrm{vol}(p)\;.\tag{4.17}$$

Später benötigen wir hier ein Hermitesches Produkt auf $\Omega^k(M;\mathbb{C})$.

4.26. Bemerkung. Eine Kohomologieklasse $[\alpha]=\alpha+\operatorname{im}d\in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ ist ein affiner Unterraum in $\Omega^k(M)$. Wir suchen nach einem Element α_0 mit kleinstmöglicher L^2-Norm. Dann gilt

$$0=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\|\alpha_0+t\,d\beta\|_{L^2}=2\langle\alpha_0,d\beta\rangle_{L^2}=2\langle d^*\alpha_0,\beta\rangle_{L^2}\qquad\text{für alle }\beta\in\Omega^{k-1}(M)\;,$$

hierbei ist d^* der noch zu konstruierende, zu d *formal adjungierte Operator.* Ein solches α erfüllt also nicht nur $d\alpha=0$, sondern auch $d^*\alpha=0$.

4.27. Proposition. *Es sei $X\in\mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld. Der zur äußeren Multiplikation mit $\langle X,\,\cdot\,\rangle$ duale Operator hat die Form $\iota_X\colon\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)$ mit*

$$\iota_X\alpha(X_2,\dots,X_k)=\alpha(X,X_2,\dots,X_k)\;.\tag{1}$$

Der zur äußeren Ableitung d adjungierte Operator hat die Form

$$d^*\alpha=-\sum_{j=1}^n\iota_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha\;.\tag{2}$$

Beweis. Aussage (1) lässt ich punktweise zeigen. Dazu wählen wir einen orthonormalen Rahmen $(e_1,\dots,e_n)$ und rechnen

$$\begin{aligned}\langle\iota_X\alpha,\beta\rangle_p &= \big\langle\alpha,\langle X,\,\cdot\,\rangle\wedge\beta\big\rangle_p\\ &= \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}\alpha(e_{j_1},\dots,e_{j_k})\sum_{a=1}^k(-1)^{a-1}\langle X,e_{j_a}\rangle\,\beta\big(e_{j_1},\dots,\widehat{e_{j_a}},\dots,e_{j_k}\big)\\ &= \sum_{j_1=1}^n\langle X,e_{j_1}\rangle\sum_{\substack{1\le j_2<\dots<j_k\le n\\ j_1\notin\{j_2,\dots,j_k\}}}\alpha(e_{j_1},\dots,e_{j_k})\,\beta(e_{j_2},\dots,e_{j_k})=\langle\alpha(X,\dots),\beta\rangle_p\;.\end{aligned}$$

Zu (2) überlegt man sich leicht, dass d^* eindeutig bestimmt ist, falls solch ein Operator überhaupt existiert. Wir betrachten der Einfachheit halber zunächst eine offene Teilmenge $U\subset M$ mit einem lokalen orthonormalen Rahmen $(e_1,\dots,e_n)$ wie oben. Dann können wir (4.16) auch schreiben als

$$d\alpha=\sum_{j=1}^n e^j\wedge\nabla_{e_j}\alpha\;.$$

Wir definieren ein Vektorfeld

$$Y_p=\sum_{j=1}^n\langle\iota_{e_j}\alpha,\beta\rangle_p\,e_j\;.$$

Wir dürfen annehmen, dass $\nabla_{e_j}e_k|_p=0$ für alle j, k an einem Punkt $p\in U$ gilt. Dann hat die Divergenz von Y im Punkt p wegen (1) die Form

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_p(Y)=\sum_{j=1}^n e_j\langle Y,e_j\rangle &=\sum_{j=1}^n\big(\langle\nabla_{e_j}(\iota_{e_j}\alpha),\beta\rangle+\langle\iota_{e_j}\alpha,\nabla_{e_j}\beta\rangle\\ &=\sum_{j=1}^n\big(\langle\iota_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha,\beta\rangle+\langle\alpha,e^j\wedge\nabla_{e_j}\beta\rangle=d-d^*\;.\end{aligned}$$

Da M kompakt ist, folgt unsere Behauptung aus dem Gaußschen Divergenzsatz, denn

$$\langle\alpha,d\beta\rangle_{L_2}=\langle d^*\alpha,\beta\rangle_{L_2}+\int_M\operatorname{div}_p(Y)\,d\mathrm{vol}(p)=\langle d^*\alpha,\beta\rangle_{L_2}\;.\qquad\square$$

4.28. Definition. Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Eine Form $\alpha\in\Omega^k(M)$ heißt *harmonisch,* wenn $d\alpha=0=d^*\alpha$ gilt. Wir bezeichnen den Raum der harmonischen k-Formen auf M mit $\mathcal H^k(M,g)\subset\Omega^k(M)$.

Man beachte, dass der Operator d^* (im Gegensatz zu d) und somit auch $\mathcal H(M,g)$ von der Riemannschen Metrik g abhängt. Nach Bemerkung 4.26 sind harmonische Formen minimale Repräsentanten ihrer Kohomologieklasse, und es leuchtet ein, dass der minimale Repräsentant von der Wahl der L^2-Norm, und somit von g abhängt.

4.29. Proposition. *Es sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Bezüglich des L^2-Skalarproduktes*

(1) *stehen die Räume $\mathcal H^k(M,g)$, $\operatorname{im}\big(d\colon\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M)\big)$ und $\operatorname{im}\big(d^*\colon\Omega^{k+1}(M)\to\Omega^k(M)\big)$ stehen paarweise aufeinander senkrecht, und*
(2) *es gilt*

$$\begin{aligned}\ker\big(d\colon\Omega^k(M)\to\Omega^{k+1}(M)\big)&=\operatorname{im}\big(d^*\colon\Omega^{k+1}(M)\to\Omega^k(M)\big)^\perp\\ \ker\big(d^*\colon\Omega^k(M)\to\Omega^{k-1}(M)\big)&=\operatorname{im}\big(d\colon\Omega^{k-1}(M)\to\Omega^k(M)\big)^\perp\;.\end{aligned}$$

Beweis. Die drei Räume in (1) stehen aufeinander L^2-senkrecht, denn für $\alpha \in \mathcal{H}^k(M,g)$, $\beta \in \Omega^{k-1}(M)$ und $\gamma \in \Omega^{k+1}(M)$ gilt

$$\langle \alpha, d\beta\rangle_{L^2} = \langle d^*\alpha, \beta\rangle_{L^2} = 0 \;, \quad \langle \alpha, d^*\gamma\rangle_{L^2} = \langle d\alpha, \gamma\rangle_{L^2} = 0 \quad \text{und} \quad \langle d\beta, d^*\gamma\rangle_{L^2} = \langle d^2\beta, \gamma\rangle_{L^2} = 0 \;.$$

Zu (2) betrachten wir für $\alpha \in \Omega^k(M)$ die Äquivalenz

$$\begin{aligned} & & \langle \alpha, d^*\beta\rangle_{L^2} &= 0 \qquad \text{für alle } \beta \in \Omega^{k+1}(M) \\ &\iff & \langle d\alpha, \beta\rangle_{L^2} &= 0 \qquad \text{für alle } \beta \in \Omega^{k+1}(M) \\ &\iff & d\alpha &= 0 \;, \end{aligned}$$

und analog für die zweite Gleichung. □

Es sei ∇ der Zusammenhang aus (4.15). Wir wählen einen orthonormalen Rahmen $(e_1, \dots, e_n)$ und definieren den *Zusammenhangs-Laplace-Operator* auf k-Formen durch

$$\nabla^*\nabla\alpha = -\sum_{j=1}^n \left(\nabla_{e_j}\nabla_{e_j}\alpha - \nabla_{\nabla_{e_j}e_j}\alpha\right) . \tag{4.18}$$

Dieser Operator hängt nicht von der Wahl des Rahmens ab und ist daher auf ganz M wohldefiniert.

Außerdem dürfen wir die totale ∇-Ableitung auffassen als Schnitt eines Tensor-Bündels $T^*M \otimes \Lambda^k T^*M$. Auf diesem Bündel betrachten wir ein punktweises Skalarprodukt

$$\langle \nabla\alpha, \nabla\beta\rangle_p = \sum_{j=1}^n \langle \nabla_{e_j}\alpha, \nabla_{e_j}\beta\rangle_p \;.$$

Dieses Skalarprodukt ist wieder unabhängig von der Wahl des Rahmens und daher global definiert. Integration über M liefert ein L^2-Skalarprodukt auf $\Omega^k(M)$.

4.30. Proposition. *Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $0 \le k \le \dim M$. Für α, $\beta \in \Omega^k(M)$ gilt*

$$\langle \nabla^*\nabla\alpha, \beta\rangle_{L^2} = \langle \nabla\alpha, \nabla\beta\rangle_{L^2} \;.$$

Beweis. Übung. □

Tatsächlich kann man einen Operator ∇^* definieren, der zur totalen ∇-Ableitung L^2-adjungiert ist. Die obige Formel zeigt, dass $\nabla^*\nabla$ ein selbstadjungierter, nichtnegativer Operator ist.

4.31. Satz (Bochner-Formel). *Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $0 \le k \le \dim M$. Für alle $\alpha \in \Omega^k(M)$ gilt*

$$(d+d^*)^2\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + \mathcal{R}^k\alpha \;, \qquad \textit{wobei} \qquad \mathcal{R}^k\alpha = -\sum_{j,k} e^j \wedge \iota_{e_k} R_{e_j,e_k}\alpha \;.$$

Beweis. Übung. □

Wir definieren das *Sobolev*-1-*Skalarprodukt* auf $\Omega^k(M)$ durch

$$\langle \alpha, \beta\rangle_{H^1} = \langle \nabla\alpha, \nabla\beta\rangle_{L^2} + \langle \alpha, \beta\rangle_{L^2} \;,$$

die zugehörige *Sobolev*-1-*Norm* bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_{H^1}$. Man beachte, dass wir das L^2-Skalarprodukt hinzuaddiert haben um sicherzugehen, dass $\|\cdot\|_{H^1}$ nicht ausgeartet ist. Wir können $\Omega^k(M)$ bezüglich beider Normen vervollständigen und erhalten die Räume $\Omega^k_{H^1}(M) \subset \Omega^k_{L^2}(M)$.

Da $d\alpha$ und $d^*\alpha$ stetig von den ersten Ableitungen ihrer Argumente abhängen, kann man sie eindeutig zu Operatoren $\Omega^k_{H^1}(M) \subset \Omega^{k\pm1}_{L^2}(M)$ fortsetzen, die wir wieder mit d und d^* bezeichnen wollen.

4.32. Bemerkung. Wir schreiben $\Omega^\bullet(M)$ für die direkte Summe aller $\Omega^k(M)$, und entsprechend $\mathcal{H}^\bullet(M,g) \subset \Omega^\bullet(M)$ für den Raum aller harmonischen Formen. Dann betrachten wir den *Hodge-Dirac-Operator*

$$D = d + d^*\colon \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M) .$$

(1) Zusammen mit Proposition 4.30 schließen wir, dass

$$\|D\alpha\|_{L^2} = \langle (d+d^*)^2\alpha, \alpha\rangle_{L^2} = \langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle_{L^2} + \langle \mathcal{R}\alpha, \alpha\rangle_{L^2} = \|\alpha\|_{H^1} - \|\alpha\|_{L^2} + \langle \mathcal{R}\alpha, \alpha\rangle_{L^2} .$$

Da $\mathcal{R}$ ein Operator nullter Ordnung ist, gibt es eine Konstante C, so dass $\|\mathcal{R}\alpha\|_{L^2} \leq C\,\|\alpha\|_{L^2}$ für alle $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$. Also gilt

$$\|\alpha\|_{H^1} - C\,\|\alpha\|_{L^2} \leq \|D\alpha\|_{L^2} + \|\alpha\|_{L^2} \leq \|\alpha\|_{H^1} + C\,\|\alpha\|_{L^2} .$$

Wir definieren eine neue Norm $\|\alpha\|'^2_{H^1} = \|D\alpha\|^2_{L^2} + \|\alpha\|^2_{L^2}$. Sie ist zur Sobolev-1-Norm äquivalent, denn

$$\begin{aligned} \frac{1}{C+1}\,\|\alpha\|'^2_{H^1} &\leq \frac{1}{C+1}\,\|\alpha\|^2_{H^1} + \frac{C}{C+1}\,\|\alpha\|^2_{L^2} \leq \|\alpha\|^2_{H^1} \\ &\leq \|D\alpha\|^2_{L^2} + (C+1)\,\|\alpha\|^2_{L^2} \leq (C+1)\,\|\alpha\|'^2_{H^1} . \end{aligned}$$

(2) Analog definiert man für alle ganzen Zahlen $\ell \geq 2$ eine Sobolev-ℓ-Norm, in die die L^2-Normen aller bis zu ℓ-fachen kovarianten (das heißt, mit Hilfe von ∇ definierten) Ableitungen eingehen. In dem man die Bochner-Formel $(\ell-1)$-fach ableitet, zeigt man, dass diese Norm äquivalent ist zur Norm $\|\cdot\|'_{H^\ell}$ mit

$$\|\alpha\|'^2_{H^\ell} = \left\|D^\ell\alpha\right\|^2_{L^2} + \dots + \|\alpha\|^2_{L^2} .$$

4.33. Bemerkung. Um die nächsten zwei Sätze zu verstehen, wiederholen wir ein paar Grundbegriffe aus der Funktionalanalysis.

(1) Die Räume $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ und $\Omega^\bullet_{H^1}(M)$ sind unendlich-dimensionale *Hilbert-Räume,* das heißt, Vektorräume mit Hermiteschem Produkt, die als metrische Räume vollständig sind. Aus der Analysis wissen wir, dass die Topologie eines Hilbert-Raums nur von der Äquivalenzklasse der zugehörigen Normen abhängt.

(2) Eine lineare Abbildung $F\colon H \to H'$ zwischen Hilberträumen heißt *stetig,* wenn sie als Abbildung zwischen metrischen Räumen stetig ist. Das ist äquivalent zur Existenz einer Konstanten $C > 0$, so dass

$$\|F(v)\|_{H'} \leq C\,\|v\|_H .$$

Beispielsweise sind d, $d^*\colon \Omega^\bullet_{H^1}(M) \to \Omega^\bullet_{L^2}(M)$ stetig.

(3) Eine lineare Abbildung $F\colon H \to H'$ zwischen Hilberträumen heißt *kompakt,* wenn sie beschränkte Teilmengen von H auf präkompakte Teilmengen von H' abbildet. Die Identität id_H ist genau dann kompakt, wenn H endlich-dimensional ist.

(4) Eine Folge $(v_j)_j$ in einem Hilbertraum *konvergiert schwach* gegen ein Element $v \in H$, kurz $v_j \rightharpoonup v$, falls

$$\lim_{j\to\infty} \langle v_j, w\rangle = \langle v, w\rangle \qquad \text{für alle } w \in H .$$

In diesem Fall ist der schwache Grenzwert eindeutig. Im Gegensatz dazu nennen wir die gewöhnliche metrische Konvergenz auch *starke Konvergenz.* Wenn eine Folge stark konvergiert, dann konvergiert sie auch schwach gegen den gleichen Grenzwert.

(5) Jede beschränkte Folge in einem Hilbertraum besitzt eine schwach konvergente Teilfolge. Falls etwa H eine Orthonormalbasis der Form $(e_j)_j$ besitzt, konvergiert die Folge e_j schwach gegen den Nullvektor. Umgekehrt ist jede schwach konvergente Folge beschränkt.

4.34. Satz (Rellich-Kondrachov). *Es sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die Inklusion ein kompakter Operator*

$$\Omega^\bullet_{H^1}(M) \hookrightarrow \Omega^\bullet_{L^2}(M)\ . \quad \square$$

Wir bezeichnen den Raum der ℓ-fach stetig differenzierbaren Differentialformen mit $\Omega^\bullet_{C^\ell}(M)$.

4.35. Satz (Sobolev). *Es sei (M,g) eine n-dimensionale kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $\ell \geq 0$. Dann setzt sich die Inklusion $\Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet_{C^\ell}(M)$ fort zu einer stetigen Einbettung*

$$\Omega^\bullet_{H^{\ell+\frac{n}{2}}}(M) \hookrightarrow \Omega^\bullet_{C^\ell}(M)\ . \quad \square$$

4.36. Satz. *Es sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $D = d + d^*$ der Hodge-Dirac-Operator auf $\Omega^\bullet(M)$. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $E_\lambda \subset \Omega^\bullet_{H^1}(M)$ der Eigenraum von D zum Eigenwert λ und*

$$\operatorname{Spec}(D) = \{\lambda \in D \mid E_\lambda \neq 0\}\ .$$

Dann gilt $\dim E_\lambda < \infty$ und $\#(\operatorname{Spec}(D) \cap [-C, C]) < \infty$ für alle $C > 0$. Alle Eigenformen sind glatt, also $E_\lambda \subset \Omega^\bullet(M)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander, und $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ ist der L^2-Abschluss der direkten Summe aller Eigenräume.

In der Sprache der Funktionalanalysis heißt das, dass D ein reines Punktspektrum besitzt.

Beweis. Wir beweisen einen analogen Satz für D^2, wonach es Zahlen $0 = \mu_0 < \mu_1 < \dots$ mit $\lim_{j\to\infty} \mu_j = \infty$ gibt, so dass die μ_j genau die Eigenwerte von D^2 sind, die Eigenräume E'_μ aus glatten Funktionen bestehen mit $\dim E'_\mu < \infty$, und $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ der Abschluss der direkten Summe aller E'_μ ist. Daraus folgt der Satz mit Methoden aus der linearen Algebra.

Da D mit D^2 auf $\Omega^\bullet(M)$ vertauscht, operiert D insbesondere auf jedem Eigenraum E'_μ von D^2, und zwar als selbstadjungierter Endomorphismus. Also zerfällt E'_μ vollständig in D-Eigenräume, und wegen $D^2|_{E'_\mu} = \mu \cdot \mathrm{id}_{E'_\mu}$ kommen als Eigenwerte von $D|_{E'_\mu}$ nur $\lambda = \pm\sqrt{\mu}$ in Frage. Jetzt lassen sich alle weiteren Aussagen aus den entsprechenden Aussagen über die Eigenwerte und Eigenräume von D^2 ableiten.

Nun also zu D^2. Für $\alpha \in \Omega^\bullet_{H^1}(M)\backslash\{0\}$ definieren wir den *Rayleigh-Ritz-Quotienten*

$$R(\alpha) = \frac{\|D\alpha\|^2_{L^2}}{\|\alpha\|^2_{L^2}} \in [0, \infty)$$

und setzen

$$\mu = \inf\{R(\alpha) \mid \alpha \in \Omega^\bullet_{H^1}(M)\backslash\{0\}\ .$$

Sei jetzt $(\alpha_j)_j$ eine Folge in $\Omega^\bullet_{H^1}(M)\backslash\{0\}$ mit

$$\lim_{i\to\infty} R(\alpha_j) = \mu\ .$$

Da R homogen ist, dürfen wir $\|\alpha_j\|_{L^2} = 1$ annehmen, und da $\Omega^\bullet(M)$ dicht in $\Omega^\bullet_{H^1}(M)$ liegt, auch $\alpha_j \in \Omega^\bullet(M)$.

Nach Bemerkung 4.33 (5) existiert eine Teilfolge, die in $\Omega^\bullet_{H^1}(M)$ schwach gegen ein α konvergiert. Nach Satz 4.34 ist die Abbildung $\Omega^\bullet_{H^1}(M) \to \Omega^\bullet_{L^2}(M)$ kompakt, also konvergiert eine Teilfolge der obigen stark in $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ gegen β. Wir bezeichnen diese Teilfolge nach wie vor mit $(\alpha_j)_j$. Da die Inklusion $\Omega^\bullet_{H^1}(M) \to \Omega^\bullet_{L^2}(M)$ stetig ist, konvergiert α_j auch in $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ schwach gegen α, und es folgt $\alpha = \beta$. Somit gilt $\alpha_j \rightharpoonup \alpha$ in $\Omega^\bullet_{H^1}(M)$ und $\alpha_j \to \alpha$ in $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$.

Für die folgenden Schnitte benutzen wir auf $\Omega^\bullet_{H^1}(M)$ die Norm $\|\cdot\|'_1$ aus Bemerkung 4.32 (1) mit

$$\|\alpha\|'^2_1 = \|D\alpha\|^2_{L^2} + \|\alpha\|^2_{L^2} = (R(\alpha)+1)\,\|\alpha\|^2_{L^2} \qquad \text{für alle } \alpha \in \Omega^\bullet_{H^1}(M)\backslash\{0\}\ .$$

Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der schwachen Konvergenz in $\Omega^\bullet_{H^1}(M)$ folgt

$$\|\alpha_j\|_1' \cdot \|\alpha\|_1' \geq \langle D\alpha_j, D\alpha\rangle_{L^2} + \langle \alpha_j, \alpha\rangle_{L^2} \to \|\alpha\|_1'^2$$

und wegen $\alpha_j \to \alpha$ in $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ auch $\|\alpha\|_{L^2} = \|\alpha_j\|_{L^2} = 1$, also

$$R(\alpha) + 1 = \|\alpha\|_1'^2 \leq \lim_{i\to\infty} \|\alpha_j\|_1'^2 = \lim_{i\to\infty} R(\alpha_j) + 1 = \mu + 1 \; .$$

Wir betrachten jetzt die Teilmenge

$$E' = \{\alpha \in \Omega^\bullet_{H^1}(M) \mid \|D\alpha\|^2_{L^2} = \mu \cdot \|\alpha\|^2_{L^2}\} \supsetneqq \{0\} \; .$$

Sei $\alpha \in E'\backslash\{0\}$ und $\beta \in \Omega^\bullet_{H^1}(M)$ beliebig. Dann folgt aus der Minimalität von $R(\alpha)$, dass

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} R(\alpha + t\beta) &= 2\operatorname{Re} \frac{\langle D\alpha, D\beta\rangle_{L^2} \|\alpha\|^2_{L^2} - \|D\alpha\|^2_{L^2} \langle \alpha, \beta\rangle}{\|\alpha\|^4_{L^2}} \\ &= 2\operatorname{Re} \frac{\langle D\alpha, D\beta\rangle_{L^2} - \mu\langle \alpha, \beta\rangle_{L^2}}{\|\alpha\|^2_{L^2}} \; . \end{aligned}$$

Da D komplex linear ist, liefert Einsetzen von $i\beta$ für β die analoge Gleichung für den Imaginärteil. Insbesondere erfüllt α die schwache Eigenwertgleichung

$$\langle D\alpha, D\beta\rangle_{L^2} = \mu\langle \alpha, \beta\rangle_{L^2} \qquad \text{für alle } \beta \in \Omega^\bullet_{H^1}(M) \; .$$

Einsetzen von $\beta = \alpha$ zeigt, dass

$$E' = \left\{ \alpha \in \Omega^\bullet_{H^1}(M) \;\middle|\; \langle D\alpha, D\beta\rangle_{L^2} = \mu\langle \alpha, \beta\rangle_{L^2} \text{ für alle } \beta \in \Omega^\bullet_{H^1}(M) \right\} \; .$$

Also ist E' genau der schwache μ-Eigenraum von D^2.

Somit ist $E' \subset \Omega^\bullet_{H^1}(M)$ ein linearer Unterraum. Da die Sobolev-1-Norm auf E' zur Sobolev-0-Norm äquivalent ist, ist nach dem Satz 4.34 von Rellich-Kondrachov die Identität

$$\mathrm{id}_{E'} \colon (E', \|\cdot\|_1) \to (E', \|\cdot\|_{L^2}) \to (E', \|\cdot\|_1)$$

kompakt, nach Bemerkung 4.33 (3) also E' endlich-dimensional.

An dieser Stelle zitieren wir einen Satz aus der Regularitätstheorie für elliptische Differentialgleichungen, wonach Lösungen der schwachen Eigenwertgleichung endliche Sobolev-2-Norm $\|\alpha\|'^2_{H^2}$ besitzen und $D^2\alpha = \mu\alpha$ gilt. Mit Bemerkung 4.32 (2) folgt, dass auch alle höheren Sobolev-Normen $\|\alpha\|'^2_{H^\ell} = \mu^\ell + \cdots + 1$ endlich sind. Aus dem Satz 4.35 von Sobolev folgt die Glattheit von α.

Die weiteren Eigenräume von D^2 werden induktiv bestimmt. Seien etwa $\mu_1, \dots, \mu_\ell$ bereits bekannt und seien $E'_{\mu_1}, \dots, E'_{\mu_\ell} \subset \Omega^\bullet(M)$ die zugehörigen Eigenräume, und $(E'_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus E'_{\mu_\ell})^\perp$ das L^2-orthogonale Komplement in $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$, so lässt sich D^2 als selbstadjungierter Operator einschränken zu

$$D^2 \colon \Omega^\bullet_{H^1}(M) \cap (E'_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus E'_{\mu_\ell})^\perp \to (E'_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus E'_{\mu_\ell})^\perp \; .$$

Wir wenden nun das obige Verfahren auf diese Unterräume an und erhalten ein neues Minimum $\mu = \mu_{\ell+1}$ des Rayleigh-Ritz-Quotienten und einen zugehörigen Eigenraum $E' = E'_{\mu_{\ell+1}}$. Nach Konstruktion folgt $\mu_{\ell+1} > \mu_\ell$.

Falls die Folge $(\mu_\ell)_\ell$ beschränkt ist, erhalten wir einen unendlich-dimensionalen Unterraum

$$E' = \bigoplus_{\ell=1}^\infty E'_{\mu_\ell} \subset \Omega^\bullet(M) \subset \Omega^\bullet_{H^1}(M) \; ,$$

auf dem $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_{L^2}$ äquivalent sind, im Widerspruch zur Kompaktheit der Inklusionsabbildung $(E', \|\cdot\|_1) \to (E', \|\cdot\|_{L^2})$. Also konvergiert μ_ℓ gegen ∞, und $\operatorname{Spec} D^2 \cap [-C, C]$ ist endlich für alle $C > 0$.

Falls schließlich der L^2-Abschluss von $E' \subset \Omega^\bullet(M)$ nicht ganz $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ ist, so folgt aus der Dichtheit von $\Omega^\bullet_{H^1}(M)$ in $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ die Existenz eines $\alpha \in \Omega^\bullet_{H^1}(M)\setminus\{0\}$ mit $\alpha \perp E'_{\mu_\ell}$ für alle ℓ. Insbesondere ist $R(\alpha) < \infty$, also $R(\alpha) < \mu_\ell$ für ℓ hinreichend groß, im Widerspruch zur Wahl von μ_ℓ.

Damit sind alle Behauptungen im Satz für D^2 — und nach Vorüberlegung auch für D — bewiesen. $\square$

Wir können jetzt die Frage aus Bemerkung 4.26 positiv beantworten.

4.37. Satz (Hodge-Zerlegung, Riemannscher Fall). *Es sei (M,g) eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit und $0 \leq k \leq \dim M$. Dann ist $\mathcal{H}^k(M,g)$ endlich dimensional, und es gibt eine bezüglich des L^2-Skalarproduktes orthogonale Zerlegung*

$$\Omega^k(M) = \mathcal{H}^k(M,g) \oplus \operatorname{im}\bigl(d\colon \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\bigr) \oplus \operatorname{im}\bigl(d^*\colon \Omega^{k+1}(M) \to \Omega^k(M)\bigr) .$$

Insbesondere ist die natürliche Abbildung $\mathcal{H}^k(M,g) \to H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ ein Isomorphismus.

Beweis. Wir betrachten die Eigenräume E'_μ von D^2 wie im Beweis von Satz 4.36. Es gilt

$$\mathcal{H}^\bullet(M,g) = \ker D \subset \ker D^2 = E'_0 ,$$

und da D selbstadjungiert ist, folgt Gleichheit. Also ist $\mathcal{H}^\bullet(M,g)$ endlich-dimensional.

Wir definieren jetzt den *Green-Operator* G auf $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ als direkte Summe der Operatoren

$$0 \in \operatorname{End}(E'_0) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\mu}\mathrm{id}_{E'_\mu} \qquad \text{für alle } \mu > 0 .$$

Nach Bemerkung 4.33 (2) und Satz 4.36 ist das ein stetiger Endomorphismus von $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$, denn sei μ_1 der kleinste positive Eigenwert von D^2, dann gilt $\|G\alpha\|_{L^2} \leq \frac{1}{\mu_1}\|\alpha\|_{L^2}$. Wegen Bemerkung 4.32 bildet G die höheren Sobolev-Räume $\Omega^\bullet_{H^\ell}$ in sich ab für alle ℓ. Nach dem Satz 4.35 von Sobolev bildet G insbesondere glatte Formen wieder auf glatte Formen ab.

Aus der Konstruktion des Green-Operators folgt, dass

$$\alpha - D^2 G\alpha \in E'_0 = \mathcal{H}^\bullet(M,g) \subset \Omega^\bullet_{L^2}(M) .$$

Dank Proposition 4.29 wissen wir bereits, dass $\mathcal{H}^\bullet(M,g)$, $\operatorname{im} d$ und $\operatorname{im} d^*$ aufeinander senkrecht stehen. Mit der obigen Rechnung erhalten wir die gesuchte Zerlegung als direkte Summe: sei $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$, dann schreiben wir

$$\alpha = (\alpha - D^2 G\alpha) + D^2 G\alpha = \underbrace{\alpha - D^2 G\alpha}_{\in \mathcal{H}^\bullet(M,g)} + \underbrace{d(d^* G\alpha)}_{\in \operatorname{im} d} + \underbrace{d^*(dG\alpha)}_{\in \operatorname{im} d^*} .$$

Diese Zerlegung können wir für festes k auch in $\Omega^k(M)$ durchführen.

Zum Schluss identifizieren wir harmonische Formen mit ihren de Rham-Kohomologieklassen und erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} H^k_{\mathrm{dR}}(M) &= \ker\bigl(d\colon \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\bigr) \bigm/ \operatorname{im}\bigl(d\colon \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\bigr) \\ &= \bigl(\mathcal{H}^k(M,g) \oplus \operatorname{im}(d\colon \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M))\bigr) \bigm/ \operatorname{im}\bigl(d\colon \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\bigr) \\ &\cong \mathcal{H}^k(M,g) . \end{aligned}$$

$\square$

4.38. Beispiel. Wir betrachten einen n-dimensionalen, flachen Torus $T^n = \mathbb{R}^n/\Gamma$ mit $\Gamma \cong \mathbb{Z}^n$ wie in Beispiel 3.2 (2). Da T^n flach ist, ist eine Form $\alpha \in \Omega^k(T^n)$ genau dann harmonisch, wenn sie parallel ist, denn

$$\|D\alpha\|^2_{L^2} = \langle D^2\alpha, \alpha\rangle_{L^2} = \langle \nabla^*\nabla\alpha, \alpha\rangle_{L^2} = \|\nabla\alpha\|^2_{L^2}$$

nach der Bochner-Formel 4.31. Da Tori triviale Holonomie haben, kann man jede k-Form $\alpha_p \in \Lambda^k T_p^*M$ an einem Punkt $p \in T^n$ parallel auf ganz T^n fortsetzen. Somit gilt

$$H^k_{\mathrm{dR}}(T^n) \cong \mathcal{H}^k(T^n, g^{\mathrm{eukl}}) = \bigoplus_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} \mathbb{R}\, dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k} \cong \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} .$$

4.5. Hodge-Theorie auf Kähler-Mannigfaltigkeiten

Wir wiederholen die obige Konstruktion für die Dolbeault-Kohomologie auf Kähler-Mannigfaltigkeiten. Insbesondere legen wir Wert auf die Zerlegungen in (p,q)-Formen aus Definition 4.14 und die zugehörige Zerlegung $d = \partial + \bar\partial$ der äußeren Ableitung. Wir werden ausnutzen, dass $2(\bar\partial + \bar\partial^*)^2 = (d + d^*)^2$ gilt, um Satz 4.36 auch in diesem Kontext anwenden zu können. Später sehen wir dann, dass sich die (p,q)-Formen mit Hilfe des Lefschetz-Operators noch weiter zerlegen lassen.

Es sei (M,h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit, insbesondere gelten die Integrabilitätsbedingungen aus Proposition 4.15. Wir betrachten den Zusammenhang auf k-Formen aus (4.15) und dehnen ihn auf komplexwertige Formen und Vektorfelder aus. Da die komplexe Struktur J parallel bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs ist, ist $\nabla_X\alpha$ eine (p,q)-Form, wenn α eine (p,q)-Form ist.

Wir setzen das Skalarprodukt auf $\Lambda^\bullet T^*M$ und das L^2-Skalarprodukt auf $\Omega^\bullet(M)$ aus (4.17) zu Hermiteschen Produkten fort. Streng genommen haben wir das bereits im letzten Abschnitt getan, als wir $\Omega^\bullet(M;\mathbb{C})$ als Hilbert-Raum betrachtet haben. Wir beachten, dass (p,q)-Formen auf (p',q')-Formen senkrecht stehen, wenn $(p,q) \neq (p',q')$.

Wir wählen jetzt einen Hermiteschen lokalen Rahmen $(v_1,\dots,v_n)$ von TM, das heißt, wir konstruieren eine Orthonormalbasis der Form $(v_1, Jv_1, \dots, v_n, Jv_n)$. Dann definieren wir Rahmen $(e_1,\dots,e_n)$ von $T'M$ und $(\bar e_1,\dots,\bar e_n)$ von $T''M$ durch

$$e_j = \frac{v_j - iJv_j}{2} \quad \text{und} \quad \bar e_j = \frac{v_j + iJv_j}{2} . \tag{4.19}$$

Wir komplexifizieren die Kähler-Form $\omega = g(J\,\cdot\,,\,\cdot\,) \in \Omega^2(M)$ und erhalten eine $(1,1)$-Form, siehe Übungen. Einsetzen liefert

$$\omega(\bar e_j, e_k) = g\biggl(J\frac{v_j + iJv_j}{2}, \frac{v_k - iJv_k}{2}\biggr) = -\frac{i}{2}\delta_{jk} . \tag{4.20}$$

Insbesondere ist $2i\iota_{\bar e_j}\omega = 2i\omega(\bar e_j,\,\cdot\,) \in \Omega^{1,0}(M)$ dual zu e_j, und $-2i\iota_{e_j}\omega = -2i\omega(e_j,\,\cdot\,) \in \Omega^{0,1}(M)$ ist dual zu $\bar e_j$.

Schließlich setzen wir die Riemannsche Metrik g zu einem bezüglich $i \in \mathbb{C}$ Hermiteschen Skalarprodukt auf $\Omega^k(M;\mathbb{C})$ fort. Wir haben das im Prinzip schon bei der Konstruktion des Hilbert-Raums $\Omega^\bullet_{L^2}(M)$ im letzten Abschnitt getan, haben aber im Wesentlichen nur mit reellen Vektoren gearbeitet.

4.39. Proposition. *Es sei (M,h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit mit lokalen Rahmen $(e_1,\dots,e_n)$ und $(\bar e_1,\dots,\bar e_n)$ von $T'M$ und $T''M$ wie oben. Dann gilt*

$$\partial\alpha = 2i\sum_{j=1}^n \omega(\bar e_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{e_j}\alpha , \qquad \bar\partial\alpha = -2i\sum_{j=1}^n \omega(e_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{\bar e_j}\alpha , \tag{1}$$

$$\partial^*\alpha = -2\sum_{j=1}^n \iota_{e_j}\nabla_{\bar e_j}\alpha \qquad \textit{und} \qquad \bar\partial^*\alpha = -2\sum_{j=1}^n \iota_{\bar e_j}\nabla_{e_j}\alpha , \tag{2}$$

Beweis. Nach Vorüberlegung erhält ∇ den Typ einer Form, so dass die rechten Seiten von (1) aus einer (p,q)-Form eine $(p+1,q)$- beziehungsweise $(p,q+1)$-Form machen.

Nach Definition von $\omega = g(J\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ gilt $\omega(-Jv_j) = g(v_j,\,\cdot\,)$ und $\omega(v_j,\,\cdot\,) = g(Jv_j,\,\cdot\,)$, so dass

$$\begin{aligned}
d\alpha &= \sum_{j=1}^n \Big(\omega(-Jv_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{v_j}\alpha + \omega(v_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{Jv_j}\alpha\Big)\\
&= \sum_{j=1}^n \Big(\omega(i\bar e_j - ie_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{v_j}\alpha + \omega(\bar e_j + e_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{Jv_j}\alpha\Big)\\
&= 2i\sum_{j=1}^n \omega(\bar e_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{e_j}\alpha - 2i\sum_{j=1}^n \omega(e_j,\,\cdot\,) \wedge \nabla_{\bar e_j}\alpha\;.
\end{aligned}$$

Da die rechten Seiten von (1) den korrekten Typ haben und ihre Summe die äußere Ableitung ergibt, stellen sie ∂ beziehungsweise $\bar\partial$ dar.

Für den Beweis von (2) gehen wir analog vor. Einsetzen von e_j macht aus einer (p,q)-Form eine $(p-1,q)$-Form, Einsetzen von $\bar e_j$ hingegen eine $(p,q-1)$-Form. Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
d^*\alpha &= -\sum_{j=1}^n \Big(\big(\iota_{\frac{v_j-iJv_j}{2}} + \iota_{\frac{v_j+iJv_j}{2}}\big)\,\nabla_{v_j}\alpha + \big(i\iota_{\frac{v_j-iJv_j}{2}} - i\iota_{\frac{v_j+iJv_j}{2}}\big)\,\nabla_{Jv_j}\alpha\Big)\\
&= -2\sum_{j=1}^n \iota_{e_j}\,\nabla_{\bar e_j}\alpha - 2\sum_{j=1}^n \iota_{\bar e_j}\,\nabla_{e_j}\alpha\;.
\end{aligned}$$

□

4.40. Definition. Es sei (M,h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Eine Form $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ heißt *Dolbeault-harmonisch,* wenn $\bar\partial\alpha = \bar\partial^*\alpha = 0$. Der Raum der Dolbeault-harmonischen (p,q)-Formen wird mit $\mathcal H^{p,q}(M,h)$ bezeichnet.

Wie in Bemerkung 4.26 minimieren Dolbeault-harmonische Formen die L^2-Norm innerhalb ihrer Dolbeault-Kohomologieklasse. Wir wollen jetzt das Analogon von Satz 4.37 für den Dolbeault-Komplex beweisen. Dazu betrachten wir den Dolbeault-Dirac-Operator

$$D_{\bar\partial} = \bar\partial + \bar\partial^*\;.$$

Mit Hilfe der obigen Proposition können wir eine Beziehung zwischen den Operatoren $(\bar\partial + \bar\partial^*)^2$ und $(d + d^*)^2$ herstellen. Das wird uns erlauben, Satz 4.37 direkt auf die Dolbeault-Kohomologie zu übertragen.

4.41. Satz (Kähler-Identitäten). *Es sei (M,h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit, und es sei $L = \omega\wedge$ Multiplikation mit der Kähler-Form. Dann gilt*

$$[d,L] = [\partial,L] = [\bar\partial,L] = 0\;, \tag{1}$$

$$[\partial^*,L] = -i\bar\partial\;, \qquad [\bar\partial^*,L] = i\partial\;, \tag{2}$$

$$\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial = \bar\partial\partial^* + \partial^*\bar\partial = 0\;, \tag{3}$$

$$2(\partial+\partial^*)^2 = 2(\bar\partial+\bar\partial^*)^2 = (d+d^*)^2\;. \tag{4}$$

Beweis. Da ω geschlossen und vom Typ $(1,1)$ ist, folgt $0 = \partial\omega \in \Omega^{2,1}(M)$ und $0 = \bar\partial\omega \in \Omega^{1,2}(M)$. Für $\alpha \in \Omega^\bullet(M)$ ergibt sich aus der Produktregel

$$[\partial,L]\,\alpha = \partial(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge\partial\alpha = (\partial\omega)\wedge\alpha = 0\;,$$

und es gilt $[\partial,L] = 0$. Die anderen Gleichungen in (1) folgen analog.

Da g und J parallel bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs sind, ist auch ω parallel. Mit einem Rahmen $e_1, \dots, e_n$ wie in Proposition 4.39 erhalten wir

$$\begin{aligned}[\partial^*, L]\,\alpha &= -2\sum_{j=1}^n \Big(\iota_{e_j}\nabla_{\bar e_j}(\omega\wedge\alpha) - \omega\wedge\iota_{e_j}\nabla_{\bar e_j}\alpha\Big)\\ &= -2\sum_{j=1}^n \Big(\iota_{e_j}\big(\omega\wedge\nabla_{\bar e_j}\alpha\big) - \omega\wedge\iota_{e_j}\nabla_{\bar e_j}\alpha\Big)\\ &= -2\sum_{j=1}^n \big(\iota_{e_j}\omega\big)\wedge\nabla_{\bar e_j}\alpha = -i\bar\partial\alpha\ ,\end{aligned}$$

und komplexe Konjugation liefert die zweite Gleichung in (2).

Aus (2) und $(\bar\partial^*)^2 = 0$ folgt (3), denn

$$i(\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial) = \bar\partial^* L\bar\partial^* - L(\bar\partial^*)^2 + (\bar\partial^*)^2 L - \bar\partial^* L\bar\partial^* L = 0\ .$$

Die zweite Gleichung folgt wieder durch komplexe Konjugation.

Aus $(d^*)^2 = 0$ folgt $\partial^*\bar\partial^* + \bar\partial^*\partial^* = 0$, und wegen (2) daher

$$\begin{aligned}i(\partial+\partial^*)^2 = i(\partial^*\partial+\partial\partial^*) &= \partial^*\bar\partial^* L - \partial^* L\bar\partial^* + \bar\partial^* L\partial^* - L\bar\partial^*\partial^*\\ &= -\bar\partial^*\partial^* L + \bar\partial^* L\partial^* - \partial^* L\bar\partial^* - L\partial^*\bar\partial^* = i(\bar\partial^*\bar\partial + \bar\partial\bar\partial^*) = i(\bar\partial+\bar\partial^*)^2\ .\end{aligned}$$

Das ist bereits die erste Gleichung in (4). Für die zweite benutzen wir (3) und berechnen

$$\begin{aligned}(d+d^*)^2 &= (\partial+\bar\partial+\partial^*+\bar\partial^*)^2\\ &= (\partial+\partial^*)^2 + (\bar\partial+\bar\partial^*)^2 + \underbrace{\partial\bar\partial+\bar\partial\partial}_{=0} + \underbrace{\partial^*\bar\partial^*+\bar\partial^*\partial^*}_{=0} + \underbrace{\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\partial}_{=0} + \underbrace{\bar\partial\partial^*+\partial^*\bar\partial}_{=0}\\ &= 2(\partial+\partial^*)^2 = 2(\bar\partial+\bar\partial^*)^2\ .\end{aligned}$$

□

4.42. Satz (Hodge-Zerlegung, Kähler-Fall). *Es sei (M,h) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und $0 \le p,q \le \dim M$. Dann ist $\mathcal{H}^{p,q}(M,h)$ endlich dimensional, und es gibt eine bezüglich des L^2-Skalarproduktes orthogonale Zerlegung*

$$\Omega^{p,q}(M) = \mathcal{H}^{p,q}(M,h) \oplus \operatorname{im}\big(\bar\partial\colon \Omega^{p,q-1}(M)\to\Omega^{p,q}(M)\big) \oplus \operatorname{im}\big(\bar\partial^*\colon \Omega^{p,q+1}(M)\to\Omega^{p,q}(M)\big)\ . \tag{1}$$

Insbesondere ist die natürliche Abbildung $\mathcal{H}^{p,q}(M,h)\to H^{p,q}(M)$ ein Isomorphismus, und es gibt fü jedes k eine Zerlegung

$$H^k(M;\mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M)\ . \tag{2}$$

Beweis. Da $\bar\partial^2 = 0$, zeigt man wie in Proposition 4.29, dass die drei Räume in der obigen Zerlegung (1) aufeinander senkrecht stehen.

Der Operator $(d+d^*)^2 = 2(\bar\partial+\bar\partial^*)^2$ bildet (p,q)-Formen auf (p,q)-Formen ab, daher erhalten wir $\mathcal{H}^{p,q}(M,h) = E_0' \cap \Omega^{p,q}(M)$, und dieser Raum ist endlich dimensional nach Satz 4.36.

Als nächstes betrachten wir wieder den Green-Operator aus dem Beweis von Satz 4.37. Da er auf $\mathcal{H}^\bullet(M,g)^\perp$ zu $2(\bar\partial+\bar\partial^*)^2$ invers ist, bildet er (p,q)-Formen auf (p,q)-Formen ab, und für $\alpha\in\Omega^{p,q}(M)$ gilt

$$\alpha = \underbrace{\alpha - 2(\bar\partial+\bar\partial^*)^2 G\alpha}_{\in\mathcal{H}^{p,q}(M,h)} + \underbrace{\bar\partial(2\bar\partial^* G\alpha)}_{\in\operatorname{im}\bar\partial} + \underbrace{\bar\partial^*(2\bar\partial G\alpha)}_{\in\operatorname{im}\bar\partial^*}\ .$$

Zum Schluss identifizieren wir Dolbeault-harmonische Formen mit ihren Kohomologieklassen und erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{aligned} H^{p,q}(M) &= \ker\bigl(\bar\partial\colon \Omega^{p,q}(M) \to \Omega^{p,q+1}(M)\bigr) \bigm/ \operatorname{im}\bigl(\bar\partial\colon \Omega^{p,q-1}(M) \to \Omega^{p,q}(M)\bigr) \\ &= \bigl(\mathcal{H}^{p,q}(M,h) \oplus \operatorname{im}(\bar\partial\colon \Omega^{p,q-1}(M) \to \Omega^{p,q}(M))\bigr) \bigm/ \operatorname{im}\bigl(\bar\partial\colon \Omega^{p,q-1}(M) \to \Omega^{p,q}(M)\bigr) \\ &\cong \mathcal{H}^{p,q}(M,h)\ . \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich auch der Isomorphismus (2). □

4.43. Beispiel. Wir betrachten einen komplexen Torus $T^{2n} = \mathbb{C}^n/\Gamma$, mit $\Gamma \cong \mathbb{Z}^{2n}$ wie in den Beispielen 3.2 (2) und 4.38. Man beachte, dass alle Tori mit der flachen Metrik Kähler-Mannigfaltigkeiten sind, ab $n \geq 2$ sind jedoch die meisten von ihnen keine algebraischen Varietäten. Mit den gleichen Argumenten wie oben erhalten wir

$$H^{p,q}(T^{2n}) \cong \bigoplus_{1\leq j_1<\dots<j_p\leq n}\ \bigoplus_{1\leq k_1<\dots<k_q\leq n} \mathbb{C}\, e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p} \wedge \bar e^{k_1} \wedge \dots \wedge \bar e^{k_q} \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{p}\binom{n}{q}}\ .$$

4.44. Bemerkung. Für den nächsten Satz benötigen wir neben dem Lefschetz-Operator L auch den adjungierten Operator L^*. Mit e_j, $\bar e_j$ wie in (4.19) folgt aus (4.20), dass

$$L^*\alpha = 2i \sum_{j=1}^n \iota_{e_j} \iota_{\bar e_j} \alpha \tag{1}$$

$$\text{und} \qquad [L^*, L]\,\alpha = (n-p-q)\alpha \tag{2}$$

für alle $\alpha \in \Omega^{p,q}(M)$ (Übung). Indem wir die Kähler-Identitäten (4.41) adjungieren, können wir die Kommutatoren von L^* und den Operatoren ∂, $\bar\partial$, ∂^* und $\bar\partial^*$ berechnen. Damit kann man dann zeigen, dass L und L^* harmonische Formen auf harmonische Formen abbilden.

4.45. Definition. Es sei (M,h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Eine (p,q)-Form α heißt *primitiv,* wenn $L^*\alpha = 0$. Der Raum der primitiven (p,q)-Formen auf M wird mit $\Omega_P^{p,q}(M)$ bezeichnet, und wir setzen $\mathcal{H}_P^{p,q}(M,h) = \mathcal{H}^{p,q}(M,h) \cap \Omega_P^{p,q}(M)$.

4.46. Satz (Harter Lefschetz-Satz). *Sei (M,h) eine n-dimensionale kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit. Für alle p, q mit $0 \leq p$, $q \leq n$ erhalten wir eine L^2-orthogonale Zerlegung*

$$\mathcal{H}^{p,q}(M,h) = \bigoplus_{s=\max(0,p+q-n)}^{\min(p,q)} L^s \mathcal{H}_P^{p-s,q-s}(M,h)\ . \tag{1}$$

Insbesondere induziert der Operator $L^{n-p-q} = \omega^{n-p-q}\wedge$ für alle p, q mit $p+q<n$ einen Isomorphismus

$$L^{n-p-q}\colon H^{p,q}(M) \xrightarrow{\cong} H^{n-q,n-p}(M)\ . \tag{2}$$

Auf kompakten Kähler-Mannigfaltigkeiten ist somit $L\colon H^{p,q}(M) \to H^{p+1,q+1}(M)$ injektiv, falls $p+q \leq n-1$, und surjektiv, falls $p+q \geq n-1$. Und es gilt $0 \neq [\omega^s] = L^s(1) \in H^{s,s}(M)$ für alle $s = 0, \dots, n$, falls M eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit ist.

Beweis. Der Beweis beruht auf der Beobachtung, dass die Operatoren L, L^* und Multiplikation von (p,q)-Formen mit $(n-p-q)$ auf $\Lambda^{\bullet,\bullet}T^*M$ sich wie bestimmte Erzeuger der Lie-Algebra $\mathfrak{su}(2)$ verhalten. Mit anderen Worten erhält man eine $SU(2)$-Wirkung auf $\Lambda^{\bullet,\bullet}T^*M$. Diese zerlegt man dann in irreduzible Unterdarstellungen. Da alle drei Operatoren harmonische Formen auf harmonische Formen abbilden, erhalten wir eine analoge Zerlegung von $\mathcal{H}_P^{\bullet,\bullet}(M,h)$, aus der wir die obigen Behauptungen ableiten können. Tatsächlich ist diese Zerlegung elementar, so dass wir sie ohne expliziten Bezug auf Darstellungstheorie durchführen können.

Dazu sei $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}_P(M,h) \setminus \{0\}$. Wir betrachten die Folge $L^s\alpha \in \mathcal{H}^{p+s,q+s}(M,h)$ für $s \geq 0$ und beweisen induktiv, dass

$$L^*(L^s\alpha) = s(n+1-p-q-s)\,L^{s-1}\alpha\;. \tag{4.21}$$

Da α primitiv ist, ist der Induktionsanfang $s = 0$ klar. Aus Bemerkung 4.44 (2) und der Induktionsannahme folgt

$$\begin{aligned} L^*L^{s+1}\alpha &= [L^*,L]\,(L^s\alpha) + L(L^*L^s\alpha) \\ &= (n-(p+s)-(q+s))\,L^s\alpha + L\left(s(n+1-p-q-s)\,L^{s-1}\alpha\right) \\ &= (s+1)(n-p-q-s)\,L^s\alpha\;. \end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}^{p,q}(M,h) = 0$ für $p > n$ oder $q > n$, muss es ein $s_0 \geq 0$ geben, so dass $L^{s_0}\alpha \neq 0$, aber $L^{s_0+1}\alpha = 0$ gilt. Insbesondere folgt $L^*(L^{s_0+1}\alpha) = 0 \cdot L^{s_0}\alpha$, wegen (4.21) also $(s_0+1)(n-p-q-s_0) = 0$. Da $s_0 \geq 0$, folgt $s_0 = n-p-q$. Nach Annahme ist $s_0 \geq 0$, da $\alpha \neq 0$. Insbesondere folgt $\mathcal{H}^{p,q}_P(M,h) = 0$ falls $p+q > n$. Für $p+q \leq n$ ist der Unterraum

$$U_{p,q} = \mathcal{H}^{p,q}_P(M,h) \oplus \cdots \oplus L^{n-p-q}\,\mathcal{H}^{p,q}_P(M,h)$$

invariant unter den Operatoren L und L^*.

Es bezeichne $H = [L^*,L]$ den Operator aus Bemerkung 4.44 (2). Dann sehen wir, dass der selbstadjungierte sogenannte *Casimir-Operator* $H^2 + 2L^*L + 2LL^*$ auf dem gesamten Unterraum $U_{p,q}$ durch Multiplikation mit $(n-p-q)(n-p-q+2)$ wirkt. Daraus folgt, dass verschiedene invariante Unterräume $U_{p,q}$ und $U_{p',q'}$ aufeinander senkrecht stehen, falls $p+q \neq p'+q'$, da sie zu verschiedenen Eigenwerten des Casimir-Operators gehören. Falls $p+q = p'+q'$ aber $p \neq p'$, folgt $(p+s,q+s) \neq (p'+s'+q'+s')$ für alle s, s', und die Unterräume stehen ebenfalls senkrecht aufeinander.

Schließlich ergibt die Summe aller $U_{p,q}$ ganz $\mathcal{H}^{\bullet,\bullet}(M,h)$, denn wäre α im orthogonalen Komplement enthalten, dann wäre $(L^*)^s\alpha \neq 0$ für alle $s \geq 0$, was aus Dimensionsgründen nicht sein kann. Somit erhalten wir die L^2-orthogonale Zerlegung

$$\mathcal{H}^{\bullet,\bullet}(M,h) = \bigoplus_{p+q\leq n}\,\bigoplus_{s=0}^{n-p-q} L^s\mathcal{H}^{p,q}_P(M,h)\;,$$

aus der man (1) und (2) leicht ableitet. □

4.47. Definition. Es sei (M,g) eine glatte Mannigfaltigkeit, dann heißt $b_k(M) = \dim H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ die *k-te Betti-Zahl* von M.

Es sei (M,h) eine komplexe Mannigfaltigkeit, dann heißt $h^{p,q}(M) = \dim H^{p,q}(M)$ die (p,q)-*Hodge-Zahl* von M.

Für die Hodge-Zahlen benutzen wir dabei die Dolbeault-Kohomologie aus Definition 4.17. Man beachte, dass Betti- und Hodge-Zahlen nicht kompakter Mannigfaltigkeiten unendlich sein können.

Da L^* nur mit Hilfe einer Metrik definiert werden kann, erhalten wir keinen primitiven Unterraum von $H^{p,q}(M)$. Aus dem Beweis des harten Lefschetz-Satzes 4.46 ergibt sich als mögliche Definition statt dessen

$$H^{p,q}_P(M) = \ker\left(L^{n+1-p-q}|_{H^{p,q}(M)}\right) \cong H^{p,q}(M)/([\omega] \wedge H^{p-1,q-1}(M))\;,$$

für alle p, q mit $p+q \leq \dim M$, allerdings nur für komplexe Mannigfaltigkeiten, die Kähler-Metriken zulassen, siehe als Gegenbeispiel 4.51. Es folgt

$$\dim H^{p,q}_P(M) = h^{p,q}(M) - h^{p-1,q-1}(M) \qquad \text{für alle } p,\ q \text{ mit } p+q \leq \dim M\;.$$

4.48. Beispiel. Der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ entsteht als topologischer Raum aus $\mathbb{C}P^{n-1}$ durch Ankleben einer $(2n)$-Zelle entlang der Hopf-Abbildung $S^{2n-1} \to \mathbb{C}P^{n-1}$. Daraus schließt man induktiv, dass

$$H^k(\mathbb{C}P^n;\mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls } k \text{ gerade ist mit } 0 \leq k \leq 2n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aus dem harten Lefschetz-Satz (4.46) folgt, dass $H^{2s}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{C}) = H^{s,s}(\mathbb{C}P^n)$ für $0 \leq s \leq n$ von ω^s erzeugt wird.

4.49. Bemerkung. In den Sätzen 4.37 und 4.42 haben wir jeweils vorausgesetzt, dass M kompakt ist. Nur deswegen gilt beispielsweise $\ker D = \ker D^2$, da wir $\|D\alpha\|^2_{L^2} = \langle D^2\alpha, \alpha\rangle = 0$ für $\alpha \in \ker D^2$ schließen konnten. Wenn M nicht kompakt ist, stimmt das nicht mehr. Dazu betrachten wir $M = \mathbb{C}$ mit der Euklidischen Metrik.

(1) Eine Null-Form $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann harmonisch im Sinne der Hodge-Theorie, wenn $df = 0$, das heißt, wenn f konstant ist. Es folgt $b_0(\mathbb{C}) = 1$.
(2) Sie ist genau dann Dolbeault-harmonisch, wenn $\bar\partial f = 0$, das heißt, wenn f holomorph ist. Beispielsweise ist die Exponentialfunktion $\exp\colon z \mapsto e^z$ Dolbeault-harmonisch, aber nicht harmonisch. Also gilt $h^{0,0}(\mathbb{C}) = \infty > b_0(\mathbb{C})$.
(3) Es gilt nach wie vor $D^2 = (d + d^*)^2 = 2(\bar\partial + \bar\partial^*)^2$, und $\Delta = D^2$ ist der „gewöhnliche" Laplace-Operator auf Funktionen. Es gilt $\Delta f = 0$ genau dann, wenn $\Delta \operatorname{Re} f = \Delta \operatorname{Im} f = 0$ (solche Funktionen heißen in der Analysis „harmonisch"). Beispielsweise gilt $\Delta \operatorname{Re}(\exp) = 0$, aber $\operatorname{Re}(\exp)$ ist weder konstant noch holomorph.

4.50. Folgerung. *Für jede kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit gilt*

$$b_k(M) = \sum_{p+q=k} h^{p,q}(M) \qquad \text{und} \qquad h^{p,q}(M) = h^{q,p}(M) = h^{n-p,n-q}(M) = h^{n-q,n-p}(M)\ .$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus dem Satz 4.42 von Hodge. Komplexe Konjugation $\mathcal{H}^{p,q}(M) \to \mathcal{H}^{q,p}(M)$ ist ein komplex antilinearer, reeller Isomorphismus, also gilt $h^{p,q}(M) = h^{q,p}(M)$. Der harte Lefschetz-Satz 4.46 liefert die restlichen Gleichungen. □

Man ordnet die Hodge-Zahlen gern in der sogenannten *Hodge-Raute* an (aus dem Englischen wird hier gern „Hodge-Diamant" zurückübersetzt):

$$\begin{array}{ccccc} & & h^{n,n}(M) & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ h^{n,0}(M) & & & & h^{0,n}(M) \\ & \ddots & & \iddots & \\ & & h^{0,0}(M) & & \end{array}$$

Diese Raute lässt sich wegen des harten Lefschetz-Satzes an der Horizontalen spiegeln, und mit Hilfe komplexer Konjugation auch an der Vertikalen. Die Kombination aus beiden ergibt Punktsymmetrie. Alternativ liefert Serre-Dualität eine nicht-ausgeartete Paarung

$$H^{p,q}(M) \times H^{n-p,n-q}(M) \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \text{mit} \qquad (\alpha,\beta) \longmapsto \int_M \alpha \wedge \beta\ ,$$

so dass $H^{n-p,n-q}(M) \cong H^{p,q}(M)^*$.

4.51. Beispiel. Die n-dimensionale *Hopf-Mannigfaltigkeit* ist definiert als $M = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\})/\mathbb{Z}$, wobei $k \in \mathbb{Z}$ durch $z \mapsto \lambda^k$ wirkt für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $1 < |\lambda|$. Da die $\mathbb{Z}$-Wirkung holomorph ist, trägt M die von $\mathbb{C}^n$ induzierte komplexe Struktur. Als glatte Mannigfaltigkeit ist M diffeomorph zu $S^{2n-1} \times S^1$, und somit ist die de Rham-Kohomologie von M gegeben durch

$$H^k_{\mathrm{dR}}(M) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = 0,\, 1,\, 2n-1 \text{ oder } 2n, \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $H^2(M) = 0$ für $n \geq 2$ und M kompakt ist, sehen wir, dass M keine Kähler-Metrik tragen kann. Insbesondere sind Hopf-Mannigfaltigkeiten für $n \geq 2$ keine projektiven Varietäten.

Mit etwas mehr Mühe rechnet man die Dolbeault-Kohomologie aus und erhält

$$H^{p,q}(M) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls } (p,q) = (0,0),\, (0,1),\, (n,n-1) \text{ oder } (n,n), \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt Serre-Dualität, wonach $h^{p,q}(M) = h^{n-p,n-q}(M)$ für alle (p,q). Alle anderen Symmetrien aus Folgerung 4.50 sind verletzt.

Wir geben zwei weitere Konsequenzen aus dem harten Lefschetz-Satz ohne Beweis an. Für die erste definieren wir eine symmetrische Bilinearform auf $H^k(M;\mathbb{C})$ für $k \leq n$ durch

$$T(\alpha,\beta) = \int_M \omega^{n-k} \wedge \alpha \wedge \beta\ .$$

4.52. Folgerung (Hodge-Riemann-Bilinearrelationen). *Es sei (M,h) eine kompakte n-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit. Es seien $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}_P(M,h)$ und $\beta \in \mathcal{H}^{k,\ell}_P(M,h)$ primitiv, und es seien $0 \leq s \leq n-p-q$ und $0 \leq t \leq n-k-\ell$ gegeben, so dass $p+q+2s = k+\ell+2t$. Dann gilt*

$$T(L^s\varphi, L^t\psi) = 0 \qquad \text{falls nicht } p = k,\ q = \ell \text{ und } s = t, \text{ und} \tag{1}$$

$$i^{q-p}(-1)^{\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}} T(L^s\bar\varphi, L^s\varphi) > 0 \qquad \text{falls } \varphi \neq 0\ . \tag{2}$$

Für das nächste Resultat betrachten wir speziell die Schnittform S auf der mittleren Kohomologie $H^n(M)$ einer orientierten $2n$-dimensionalen kompakten Mannigfaltigkeit, gegeben durch

$$S(\alpha,\beta) = \int_M \alpha \wedge \beta\ .$$

Nach Poincaré-Dualität ist sie nicht ausgeartet. Wenn $b_+(M)$ und $b_-(M)$ die maximale Dimension eines Unterraums bezeichnen, auf dem T positiv beziehungsweise negativ definit ist, definieren wir die *Signatur* von M durch

$$\sigma(M) = b_+(M) - b_-(M)\ .$$

4.53. Folgerung (Hodge-Indexsatz). *Für eine kompakte n-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit (M,h) gilt*

$$\sigma(M) = \sum_{p,q} (-1)^q h^{p,q}(M) = \sum_{p+q \text{ gerade}} (-1)^q h^{p,q}(M)\ .$$

4.54. Folgerung ($\partial\bar\partial$-Lemma). *Es sei (M,h) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit, und es sei α eine (p,q)-Form mit $d\alpha = 0$. Dann sind äquivalent:*

(1) *es gibt eine Form $\beta \in \Omega^{p+q-1}(M;\mathbb{C})$ mit $d\beta = \alpha$,*
(2) *es gibt eine Form $\gamma \in \Omega^{p-1,q}(M;\mathbb{C})$ mit $\partial\gamma = \alpha$,*
(3) *es gibt eine Form $\delta \in \Omega^{p,q-1}(M;\mathbb{C})$ mit $\bar\partial\delta = \alpha$,*
(4) *es gibt eine Form $\varepsilon \in \Omega^{p-1,q-1}(M;\mathbb{C})$ mit $\partial\bar\partial\varepsilon = \alpha$.*

Beweis. Da α vom Typ (p,q) ist, folgen $\partial\alpha = \bar\partial\alpha = 0$ aus $d\alpha = 0$. Die Bedingungen (1) und (3) sind nach den Sätzen 4.37 und 4.42 dazu äquivalent, dass α auf $\mathcal{H}^{p,q}(M)$ senkrecht steht. Betrachten wir stattdessen $\bar\alpha$, so sehen wir, dass (1) auch zu (2) äquivalent ist. Außerdem folgt (2) aus (4) mit $\gamma = \bar\partial\varepsilon$.

Es gelte also $\alpha = \partial\gamma$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, dass γ ebenfalls auf $\mathcal{H}^{p-1,q}(M)$ senkrecht steht. Aus der $\bar\partial$-Hodge-Zerlegung 4.42 folgt

$$\gamma = \bar\partial\varepsilon + \bar\partial^*\varepsilon'$$

für $\varepsilon \in \Omega^{p-1,q-1}(M)$ und $\varepsilon' \in \Omega^{p-1,q+1}(M)$. Nach der Kähler-Identität 4.41 (3) gilt

$$0 = \bar\partial\alpha = \bar\partial\partial\bar\partial\varepsilon + \bar\partial\partial\bar\partial^*\varepsilon' = -\partial\bar\partial^2\varepsilon - \bar\partial\bar\partial^*\partial\varepsilon' ,$$

also $\bar\partial\bar\partial^*\partial\varepsilon' = 0$, und wegen Kompaktheit von M auch

$$\left\|\bar\partial^*\partial\varepsilon'\right\|_{L^2}^2 = \langle\bar\partial\bar\partial^*\partial\varepsilon', \partial\varepsilon'\rangle_{L^2} = 0 .$$

Wiederum mit der Kähler-Identität 4.41 (3) folgt

$$\partial\bar\partial^*\varepsilon' = -\bar\partial^*\partial\varepsilon' = 0 ,$$

und somit $\alpha = \partial\bar\partial\varepsilon$. □

4.55. Bemerkung. Mit dem $\partial\bar\partial$-Lemma können wir uns einen groben Überblick über alle möglichen Kähler-Metriken auf einer vorgegebenen kompakten komplexen Mannigfaltigkeit M verschaffen.

(1) Es seien h_0, h_1 zwei Kähler-Metriken, dann ist für alle $s \in [0,1]$ auch die Metrik $h_s = sh_1 + (1-s)h_0$ eine Kähler-Metrik, denn $g_s = \operatorname{Re} h_s$ ist positiv definit, und $\omega_s = \operatorname{Im} h_s$ geschlossen und nicht ausgeartet. Hier ist wichtig, dass h_0 und h_1 die gleiche komplexe Struktur induzieren.

(2) Es sei h_0 eine Kähler-Metrik und h_1 eine Hermitesche Bilinearform auf TM mit $d\operatorname{Im} h_1 = 0$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ auch die Hermitesche Bilinearform $h_s = sh_1 + (1-s)h_0$ eine Kähler-Metrik ist, denn für $\varepsilon > 0$ klein genug ist $g_s = \operatorname{Re} h_s$ positiv definit, und $\omega_s = \operatorname{Im} h_s$ geschlossen und nicht ausgeartet. An dieser Stelle haben wir bereits Kompaktheit von M benutzt.

(3) Eine Klasse in $H^{1,1}(M)$ heißt *Kähler-Klasse,* wenn sie die Kähler-Form einer Kähler-Metrik enthält. Aus (1) und (2) sehen wir, dass die Kähler-Klassen einen offenen, konvexen Kegel in den reellen $(1,1)$-Klassen $H^{1,1}(M) \cap H^2_{\mathrm{dR}}(M)$ bilden.

(4) Sei schließlich eine Kähler-Klasse $[\omega_0]$ vorgegeben, und sei $\omega \in [\omega_0]$ eine weitere Kähler-Form. Dann existiert nach dem $\partial\bar\partial$-Lemma eine reellwertige Funktion $f \in C^\infty(M)$, so dass

$$\omega = \omega_0 + i\partial\bar\partial f .$$

Eine solche Funktion heißt auch *Kähler-Potential* für ω bezüglich ω_0. Umgekehrt sind nach (2) alle Funktionen mit ausreichend kleiner C^2-Norm Kähler-Potentiale. Also bilden die Kähler-Potentiale bezüglich ω_0 eine offene, konvexe Teilmenge von $C^\infty(M)$.

4.6. Kalibrierungen

In diesem Abschnitt benutzen wir geschlossene Differentialformen, um bestimmte Typen minimaler Untermannigfaltigkeiten Riemannscher Mannigfaltigkeiten (M,g) zu erkennen. Solche Formen heißen „Kalibrierungen“, und die betreffenden Untermannigfaltigkeiten heißen „kalibrierte Untermannigfaltigkeiten“. In vielen Fällen sind Kalibrierungen parallele Differentialformen (und daher nach (4.16) geschlossen). Da die Gruppe $SO(n)$ für $1 \le k \le n$ kein Element von $\Lambda^k\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ invariant lässt, impliziert die Existenz einer nicht-verschwindenden parallelen k-Form, dass $\operatorname{Hol}(M,g)$

eine echte Untergruppe von $SO(n)$ ist. Umgekehrt sehen wir später, dass jede Mannigfaltigkeit spezieller Holonomie Kalibrierungen trägt. Im Falle von Kähler-Mannigfaltigkeiten (M, h) sind das die Potenzen der Kähler-Form. Auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten lernen wir im nächsten Abschnitt die *holomorphe Volumenform* als weitere Kalibrierung kennen.

4.56. Beispiel. Es sei $\gamma = (r, z) \colon I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte einfache Kurve mit $r \geq r_0 \geq 0$ auf dem gesamten Definitionsintervall I. Wir betrachten die Rotationsfläche

$$M = \left\{ \big(r(t)\, \cos\varphi, r(t)\, \sin\varphi, z(t)\big) \;\middle|\; t \in I, \varphi \in \mathbb{R} \right\}$$

mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten Riemannschen Metrik. Dann ist $\alpha = r_0\, d\varphi \in \Omega^1(M)$ geschlossen. Für alle (t, φ) erhalten wir Einheitsvektoren der Form

$$v = a\, \frac{\partial}{\partial t} + \frac{b}{r(t)}\, \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

bezüglich obiger Parametrisierung, mit $a^2 + b^2 = 1$. Aus $r(t) \geq r_0$ folgt

$$|\alpha(v)| = \left| \frac{b r_0}{r(t)} \right| \leq 1 \; .$$

Es sei $c \colon S^1 \to M$ eine Kurve, die die Rotationsfläche n-mal in positiver Richtung umläuft. Für die Länge von c gilt dann

$$\int_{S^1} |\dot{c}(s)|\; ds \geq \int_{S^1} |\alpha(\dot{c}(s))|\; ds \geq \int_{S^1} c^*\alpha = 2\pi n r_0$$

unabhängig von der genauen Gestalt der Kurve c. Falls $r(t_0) = r_0$ gilt und $c_n \colon S^1 \to M$ die Rotationsfläche „auf der Höhe von $\gamma(t_0)$“ n-mal in positiver Richtung umläuft, gilt Gleichheit. Wir können also minimale Kurven mit Hilfe geeigneter geschlossener Diferentialformen erkennen.

Solche Differentialformen heißen „Kalibrierungen“. Kalibrierungen erkennen minimale „k-Zykel“ in M. Wir wollen diesen Begriff hier nicht in der vollen passenden Allgemeinheit definieren—dazu bräuchte man eine Vorlesung über geometrische Maßtheorie. Unter einem k-Zykel wollen wir hier einfach eine glatte Abbildung

$$F \colon N \to M$$

einer k-dimensionalen kompakten, orientierten Mannigfaltigkeit nach M verstehen. Wenn F eine Einbettung ist, erhalten wir als wichtigen Spezialfall eines Zykels eine kompakte, orientierte Untermannigfaltigkeit von M. Wir betrachten drei Äquivalenzrelationen auf der Klasse aller Zykel.

(1) Zwei k-Zykel $F_i \colon N_i \to M$ heißen *homotop,* wenn $N_0 = N_1$ gilt und es eine glatte Abbildung $H \colon N \times [0, 1] \to M$ mit $H(p, i) = F_i(p)$ für alle $p \in N$ und $i = 0$, 1 gilt.
(2) Zwei k-Zykel $F_i \colon N_i \to M$ heißen *bordant,* wenn es eine kompakte, orientierte, $(k + 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit W mit Rand $\partial W = (-N_0) \sqcup N_1$ gibt und eine Abbildung $\bar{F} \colon W \to M$ mit $F|_{N_i} = F_i$ für $i = 0$, 1. Hierbei bezeichnet „$-N_0$“ die Mannigfaltigkeit N_0 mit der umgekehrten Orientierung. Offensichtlich sind homotope Zykel insbesondere auch bordant; hierzu wählen wir $\bar{F} = H$.
(3) Zwei k-Zykel $F_i \colon N_i \to M$ heißen (*reell*) *homolog,* wenn für alle Kohomologieklassen $[\alpha] \in H^k_{\mathrm{dR}}(M)$ gilt, dass

$$\int_{N_0} F_0^*\alpha = \int_{N_1} F_1^*\alpha \; .$$

Wegen des Satzes von Stokes sind bordante Zykel insbesondere auch homolog.

Wir wollen auch ein „Volumen" für k-Zykel in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) definieren. Dazu betrachten wir F^*g als glatte Bilinearform auf TN. Dann gibt es eine eindeutige glatte Form $F^*d\mathrm{vol}_g^k \in \Omega^k(N)$, so dass

$$\big(F^*d\mathrm{vol}_g^k\big)_p(v_1,\dots,v_k) = \det\big((g(dF_p(v_j),dF_p(v_\ell)))_{j,\ell}\big)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $p \in N$ und alle orientierten Basen $(v_1,\dots,v_k)$ von T_pN gilt. Wir definieren

$$\mathrm{vol}(F) = \int_N F^*d\mathrm{vol}_g^k \;.$$

Falls F die Einbettung einer k-dimensionalen orientierten Untermannigfaltigkeit $N \subset M$ ist, ist $\mathrm{vol}(F)$ gerade das Volumen der auf N eingeschränkten Riemannschen Metrik.

4.57. Definition. Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wir definieren die *Komasse* eines Elementes $\beta \in \Lambda^kT^*M$ und einer Form $\alpha \in \Omega^k(M)$ als

$$\begin{aligned}\|\beta\|_C &= \sup\big\{\,|\alpha_p(v_1,\dots,v_k)|\;\big|\;v_1,\dots,v_k \in T_pM \text{ so dass } g(v_j,v_\ell)=\delta_{j\ell} \text{ für alle } j,\ell\,\big\}\;,\\ \|\alpha\|_C &= \sup_{p\in M}\|\alpha_p\|_C\;.\end{aligned}$$

Eine *Kalibrierung* ist eine geschlossene k-Form α der Komasse $\|\alpha\|_C \le 1$.

Ein k-Zykel $F\colon N \to M$ heißt *durch α kalibriert,* falls

$$F^*\alpha = F^*d\mathrm{vol}_g^k\;.$$

Man beachte, dass die obige Bedingung trivialerweise an allen Stellen $p \in N$ erfüllt ist, an denen dF_p nicht injektiv ist. Die folgende einfache Beobachtung erklärt die geometrische Bedeutung von Kalibrierungen.

Triviale Beispiele von Kalibrierungen sind die konstante Form $1 \in \Omega^0(M)$ und die Volumenform $d\mathrm{vol}_g$ einer orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit. Zugehörige kalibrierte Zykel sind die Punkte von M beziehungsweise M selbst. Nichttriviale Beispiele lernen wir später kennen.

4.58. Lemma. *Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit, $\alpha \in \Omega^k(M)$ eine Kalibrierung, und $F\colon N \to M$ ein durch α kalibrierter k-Zykel. Für alle zu F homologen k-Zykel $F'\colon N' \to M$ gilt dann* $\mathrm{vol}(F) \le \mathrm{vol}(F')$.

Man sagt dazu auch, dass F das k-dimensionale Volumen in seiner Homologieklasse minimiert. Wenn ein kalibrierter Zykel F existiert, folgt $\|\alpha_p\|_C = 1$ für alle $p \in \operatorname{im} F$.

Beweis. Es sei $p \in N'$ ein Punkt, an dem F' injektives Differential hat. Dann finden wir eine orientierte Basis $(v_1,\dots,v_k)$ von T_pN', so dass $g(dF'_p(v_j),dF'_p(v_\ell)) = \delta_{j\ell}$ für alle j, ℓ. Aus $\|\alpha\|_C \le 1$ folgt

$$(F'^*\alpha)(v_1,\dots,v_k) = \alpha\big(dF'_p(v_1),\dots,dF'_p(v_k)\big) \le 1 = (F'^*d\mathrm{vol}_g^k)(v_1,\dots,v_k)\;.$$

Da Λ^kT_pN eindimensional ist, gilt diese Ungleichung für alle orientierten Basen von T_pN'. Sie dehnt sich trivialerweise auf alle Stellen p aus, an denen dF' nicht injektiv ist.

In der analogen Ungleichung für $F\colon N \to M$ gilt hingegen Gleichheit für alle $p \in N$. Da F' zu F homolog ist, folgt

$$\mathrm{vol}(F) = \int_N F^*d\mathrm{vol}_g^k = \int_N F^*\alpha = \int_{N'} F'^*\alpha \le \int_{N'} F'^*d\mathrm{vol}_g^k = \mathrm{vol}(F')\;. \qquad \square$$

4.59. Satz (Wirtinger-Ungleichung). *Es sei (M,h) eine (komplex) n-dimensionale Kähler-Mannigfaltigkeit mit Kähler-Form ω, und sei $0 \le k \le n$. Dann ist $\frac{1}{k!}\,\omega^k \in \Omega^{2k}(M)$ eine Kalibrierung.*

Ein $2k$-dimensionaler Zykel $F\colon N \to M$ ist genau dann kalibriert, wenn $\operatorname{im} dF_p \subset T_{F(p)}M$ *an allen Stellen $p \in N$, an denen F injektives Differential besitzt, ein (komplex) k-dimensionaler komplexer Unterraum von $T_{F(p)}M$ ist.*

Man beachte, dass ein $2k$-Zykel *reell* 2k-dimensional ist. Insbesondere sind also alle komplexen Untermannigfaltigkeiten von Kähler-M¡annigfaltigkeiten und alle Bilder holomorpher Abbildungen kalibrierte Untermannigfaltigkeiten, und damit erst recht minimal in ihrer Homologieklasse. Es könnte darüberhinaus auch kalibrierte Zykel geben, bei denen N nur dort eine (wegen Proposition 4.11 automatisch integrable) fast komplexe Struktur trägt, wo dF injektiv ist.

Beweis. Es sei $V \subset T_{F(p)}(M)$ ein reell $2k$-dimensionaler Unterraum mit festgelegter Orientierung. Dann ist $g|_V$ ein Skalarprodukt und $\omega|_V$ eine alternierende 2-Form. Nach dem Hauptsatz über normale Abbildungen aus der linearen Algebra finden wir eine orientierte Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_{2k})$ von V, so dass

$$\omega = a_1 v^1 \wedge v^2 + \cdots + a_k v^{2k-1} \wedge v^{2k} ,$$

wobei $(v^1, \dots, v^{2k})$ die duale Basis bezeichne. In $T_{F(p)}M$ folgt mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$a_j = \omega(v_{2j-1}, v_{2j}) = g(Jv_{2j-1}, v_{2j}) \leq 1 . \tag{4.22}$$

Insbesondere gilt

$$\omega^k|_V = k!\, a_1 \cdots a_k\, v^1 \wedge \cdots \wedge v^{2k} ,$$

und es folgt

$$\left| \left(\frac{1}{k!} \omega^k \right) (v_1, \dots, v_{2k}) \right| = |a_1 \cdots a_k| \leq 1 . \tag{4.23}$$

Diese Ungleichung ist die eigentliche Wirtinger-Ungleichung. Hiermit haben wir zum einen die Komasse-Norm von $\frac{1}{k!}\omega^k$ abgeschätzt. Da $\frac{1}{k!}\omega^k$ geschlossen ist, ist diese Form also eine Kalibrierung.

Zum anderen gilt Gleichheit in der Wirtinger-Ungleichung (4.23) genau dann, wenn für alle j in (4.22) Gleichheit gilt, und das ist genau dann der Fall, wenn $Jv_{2j-1} = v_{2j}$ für alle j gilt. In diesem Fall ist V komplexer Unterraum. Sei umgekehrt V ein komplexer Unterraum, dann wählen wir eine Basis der Form $(v_1, Jv_1, v_3, \dots, Jv_{2k-1})$ und erhalten Gleichheit in (4.22). □

4.60. Bemerkung. Wir versehen den komplex projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$ wie üblich mit der Fubini-Study-Metrik h^{FS}. Dann sind die Klassen $(\frac{\omega}{\pi})^k$ Erzeuger vom Bild der ganzzahligen Kohomologie $H^{2k}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ in $H^{2k}_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}P^n)$ für $0 \leq k \leq n$. Insbesondere ist ihr Integral über alle Zykel in der glatten singulären Homologie ganzzahlig. Diese Homologiegruppen werden erzeugt von den projektiven Unterräumen $\mathbb{C}P^k \subset \mathbb{C}P^n$.

Eine (komplex) k-dimensionale fast komplexe Untermannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{C}P^n$ ist Kähler nach Proposition 4.11, und sogar algebraisch nach dem Satz von Chow. Allgemeiner sei $F\colon M \to \mathbb{C}P^n$ eine holomorphe Abbildung einer komplexen Mannigfaltigkeit nach $\mathbb{C}P^n$. Aus der obigen Vorbemerkung und der Wirtinger-Ungleichung folgt, dass

$$\operatorname{vol}(F) = \int_M \frac{1}{k!} F^*\omega^k = \frac{\pi^k}{k!} \int_M F^* \Big(\frac{\omega}{\pi} \Big)^k = \deg(F) \operatorname{vol}(\mathbb{C}P^k) ,$$

$$\text{wobei} \qquad \deg F = \int_M F^* \Big(\frac{\omega}{\pi} \Big)^k \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{vol}(\mathbb{C}P^k) = \frac{\pi^k}{k!} .$$

Zur Berechnung von $\operatorname{vol}(\mathbb{C}P^k)$ benutzen wir die obige Rechnung und $\int_{\mathbb{C}P^k} (\frac{\omega}{\pi})^k = 1$. Das Volumen holomorpher Zykel ist somit „quantisiert“. Man beachte, dass der Grad $\deg F$ eine Invariante von F und nicht von M ist. Er verschwindet nur, wenn F nirgends injektives Differential hat.

Die Hopf-Faserung stellt die runde Sphäre S^{2k+1} mit der Standardmetrik als Bündel von Kreisen der Länge 2π über $\mathbb{C}P^k$ dar, und wir erhalten die bekannte Formel

$$\operatorname{vol}(S^{2k+1}) = 2\pi \operatorname{vol}(\mathbb{C}P^k) = \frac{2\pi^{k+1}}{k!} .$$

4.61. Bemerkung. Wir haben in Bemerkung 4.55 gesehen, dass eine gegebene Kähler-Mannigfaltigkeit (M, h) viele weitere Kähler-Metriken zur vorgegebenen komplexen Struktur tragen kann. Die Wirtinger-Ungleichung 4.59 liefert für alle diese Kähler-Metriken stets die gleichen kalibrierten Zykel, nämlich diejenigen, die entlang ihres „regulären Ortes“ (dort, wo dF injektiv ist) komplexe Untermannigfaltigkeiten sind. Die Eigenschaft, kalibriert (und damit nach Lemma 4.58 minimal) zu sein, hängt also nicht von der Kähler-Metrik, sondern nur von der komplexen Struktur ab.

Auf der anderen Seite sind komplexe Untermannigfaltigkeiten nicht notwendigerweise minimal, wenn die umgebende Mannigfaltigkeit zwar komplex ist, aber keine Kähler-Struktur trägt (Übung).

4.7. Krümmung von Kählermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Krümmungstensor einer Kählermannigfaltigkeit genauer. Unter anderem stellen wir fest, dass die Ricci-Krümmung stets eine geschlossene $(1, 1)$-Form ist, die die erste Chern-Klasse des sogenannten „kanonischen Geradenbündels“ darstellt. Falls ric ein Vielfaches der Kähler-Form ist, heißt (M, h) eine „Kähler-Einstein-Mannigfaltigkeit“. Besonders interessant sind Ricci-flache Mannigfaltigkeiten, sogenannte „Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten“.

Nach Satz 3.25 können wir den Riemannschen Krümmungstensor als eine 2-Form mit Werten in der Holonomie-Lie-Algebra auffassen, also $R \in \Omega^2(M; \mathfrak{hol}(M, g))$, in unserem Fall also $R \in \Omega^2(M; \mathfrak{u}(TM))$. Wir setzen den Krümmungstensor $\mathbb{C}$-multilinear in allen Argumenten auf $T_{\mathbb{C}}M$ fort. Dann gilt (Übung)

$$R \in \Omega^{1,1}(M; \mathfrak{u}(TM)) .$$

Außerdem bildet $R(v, w)$ Vektoren in $T'M$ auf Vektoren in $T'M$ und Vektoren in $T''M$ auf Vektoren in $T''M$ ab.

Wir erinnern uns an die Schnittkrümmung und die Ricci-Krümmung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit aus Definition 1.53 (1) und (2).

4.62. Definition. Es sei (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit.

(1) Die Einschränkung der Schnittkrümmung auf komplexe Geraden in TM heißt *holomorphe Schnittkrümmung.* Sei $\langle X\rangle$ die von $X \in T_pM\setminus\{0\}$ erzeugte komplexe Gerade, dann schreibe

$$K(\langle X\rangle) = \frac{g(R_{X,JX}(JX), X)}{\|X\|^4} .$$

(2) Die *Ricci-Form* $\rho \in \Omega^2(M)$ ist für $X, Y \in T_pM$ definiert als

$$\rho(X, Y) = \operatorname{ric}(JX, Y) .$$

4.63. Bemerkung. Die holomorphe Schnittkrümmung einer Kähler-Mannigfaltigkeit legt die (Riemannsche) Schnittkrümmung und somit den gesamten Krümmungstensor fest (Übung).

Um die Ricci-Form besser zu verstehen, bedarf es einiger Vorarbeit. Es sei $A \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(T_pM)$ ein Endomorphismus des komplexen Vektorraums (T_pM, J), das heißt, es gelte $A \circ J = J \circ A$. Bezüglich eines Hermiteschen lokalen Rahmens $(v_1, \dots, v_n)$ wie in Abschnitt 4.5 können wir die *komplexe Spur* mit Hilfe der Riemannschen Metrik berechnen als

$$\operatorname{tr}_C(A) = \sum_j \bigl(g(Av_j, v_j) + i\, g(Av_j, Jv_j)\bigr) .$$

Beispielsweise gilt $\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(J) = ni$.

4.64. Definition. Es sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann definieren wir das *kanonische Geradenbündel von M* als $K_M = \Lambda^{n,0}T^*M$.

Ein Geradenbündel ist dabei nichts anderes als ein (in diesem Fall komplexes) eindimensionales Vektorbündel. Wenn (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist, induziert der Levi-Civita-Zusammenhang einen Zusammenhang ∇^{K_M} auf K_M wie in 4.15. Da K_M ein Geradenbündel ist, können wir die Krümmung R^{K_M} von ∇^{K_M} als eine 2-Form auffassen. Und da ∇^{K_M} die natürliche Metrik auf K_M respektiert, ist diese 2-Form imaginärwertig. Das heißt, es existiert eine reellwertige 2-Form α, so dass $R^{K_M}_{X,Y} = \alpha(X,Y)\,J$.

4.65. Proposition. *Es sei (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit, dann gilt*

$$\rho(X,Y) = \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(JR_{X,Y}) = i\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(R_{X,Y}) \in \mathbb{R} \qquad \text{für alle } X,Y \in T_pM\ . \tag{1}$$

Die Krümmung des kanonischen Bündels wird gegeben durch

$$R^{K_M}_{X,Y} = \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(R_{X,Y}) = -i\rho(X,Y)\ . \tag{2}$$

In lokalen holomorphen Koordinaten $z_1, \dots, z_n$ sei schließlich $g_{j\bar k} = \langle \partial_j, \bar\partial_k\rangle$, dann gilt

$$\rho = -i\partial\bar\partial \log\det\bigl((g_{j\bar k})_{j,k}\bigr)\ . \tag{3}$$

Insbesondere ist ρ eine geschlossene, reelle $(1,1)$-Form, deren Kohomologieklasse nicht von der Kähler-Metrik h abhängt.

Die Kohomologieklasse von ρ hat eine topologische Bedeutung. Man definiert die *erste Chern-Form* des Tangentialbündels als $c_1(TM,\nabla) = \frac{\rho}{2\pi}$. Ihr Kohomologieklasse $c_1(TM) = [c_1(TM,\nabla)] = \bigl[\frac{\rho}{2\pi}\bigr]$ liegt im Bild von $H^2(M;\mathbb{Z})$. Dual dazu ist die erste Chern-Klasse des kanonischen Bündels gerade $c_1(K_M) = -c_1(TM) = -\bigl[\frac{\rho}{2\pi}\bigr]$.

Beweis. Es sei $(v_1, \dots, v_n)$ wieder ein Hermitescher Rahmen. Wir schreiben

$$\begin{aligned}\rho(X,Y) = \operatorname{ric}(JX,Y) &= \sum_{j=1}^n \Bigl(g(R_{JX,v_j}v_j,Y) + g(R_{JX,Jv_j}Jv_j,Y)\Bigr)\\ &= \sum_{j=1}^n \Bigl(-g(R_{X,Jv_j}v_j,Y) + g(R_{X,v_j}Jv_j,Y)\Bigr) = -\sum_{j=1}^n g(R_{v_j,Jv_j}X,Y)\ ,\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die erste Bianchi-Identität 1.51 (2) benutzt haben. Mit Hilfe der Blocksymmetrie 1.51 (4) erhalten wir (1), denn

$$\rho(X,Y) = -\sum_{j=1}^n g(R_{X,Y}v_j,Jv_j) = \sum_{j=1}^n g(R_{X,Y}Jv_j,v_j) = \operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(R_{X,Y}J)\ .$$

Zu (2) setzen wir g bilinear auf $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ fort. Dual zu den komplexen Vektoren $e_1 = \frac{v_1 - iJv_1}{2}$, $\dots$, $e_n \in \mathfrak{X}'(M)$ sind die Formen $e^1 = \langle v_1 + iJv_1, \,\cdot\,\rangle$, $\dots$, $e^n \in \Omega^{1,0}(M)$. Wir betrachten das Element

$$\Omega = e^1 \wedge \dots \wedge e^n \in \Omega^{n,0}(M) = \Gamma(K_M)\ .$$

Die Krümmung des Zusammenhangs ∇ auf K_M aus 4.15 haben wir in den Übungen berechnet. Dabei erhalten wir für jedes Paar von Vektoren w, z aus der Orthonormalbasis $(v_1, Jv_1, v_2, \dots, Jv_n)$ einen Term der Form $-\langle R_{X,Y}w, z\rangle\langle v, \,\cdot\,\rangle \wedge \iota_z$. Wir beginnen mit einer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned}\bigl(\langle v_j, \,\cdot\,\rangle \wedge \iota_{v_k} + \langle Jv_j, \,\cdot\,\rangle \wedge \iota_{Jv_k}\rangle\bigr)(e^\ell) &= \delta_{k\ell}\langle v_j + iJv_j, \,\cdot\,\rangle = \delta_{kl}\,e^j\ ,\\ \bigl(\langle v_j, \,\cdot\,\rangle \wedge \iota_{Jv_k} - \langle Jv_j, \,\cdot\,\rangle \wedge \iota_{v_k}\rangle\bigr)(e^\ell) &= i\delta_{k\ell}\langle v_j + iJv_j, \,\cdot\,\rangle = i\delta_{k\ell}\,e^j\ .\end{aligned}$$

Für $R_{X,Y}\Omega$ brauchen wir nur Terme zu Paaren der Form (v_j, Jv_j) oder (Jv_j, v_j) zu betrachten, denn ansonsten würde eine der 1-Formen e^j im Ergebnis doppelt vorkommen. Also verschwinden alle obigen Terme mit $j \neq k$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} R_{X,Y}\Omega &= -\sum_j \big(\langle R_{X,Y}v_j, Jv_j\rangle \langle v_j, \cdot\,\rangle \wedge \iota_{Jv_j} + \langle R_{X,Y}Jv_j, v_j\rangle \langle Jv_j, \cdot\,\rangle \wedge \iota_{v_j}\big)\Omega \\ &= i\sum_j \langle R_{X,Y}Jv_j, v_j\rangle\,\Omega = -\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(R_{X,Y})\,\Omega = i\rho(X,Y)\,\Omega\;. \end{aligned}$$

Seien schließlich $z_1, \dots, z_n$ lokale holomorphe Koordinaten. Wir bezeichnen die Inverse der Matrix $(g_{j\bar k})_{j,k}$ mit $(g^{\bar jk})_{j,k}$. In den Übungen sehen wir, dass $\nabla_{\partial_j}\bar\partial_k = \nabla_{\bar\partial_k}\partial_j = 0$ und

$$\nabla_{\partial_j}\partial_k = \sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}\,\partial_\ell\;, \qquad \text{wobei} \qquad \Gamma^\ell_{jk} = \sum_m \partial_j g_{k\bar m}\,g^{\bar m\ell}\;.$$

Wir berechnen

$$R_{\bar\partial_j,\partial_k}\partial_\ell = \sum_m \bar\partial_j\Gamma^m_{k\ell}\,\partial_m\;.$$

Da die Krümmung R eine $\mathfrak{u}(TM)$-wertige $(1,1)$-Form ist, ist R dadurch vollständig bestimmt. Wir erhalten somit

$$\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(R_{\bar\partial_j,\partial_k}) = \sum_\ell \bar\partial_j\Gamma^\ell_{k\ell} = \bar\partial_j\sum_{\ell,m}\partial_k g_{\ell\bar m}g^{\bar m\ell} = \bar\partial_j\partial_k \log\det\big((g_{\ell\bar m})_{\ell,m}\big)\;,$$

somit $\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}(R) = -\partial\bar\partial\log\det\big((g_{\ell\bar m})_{\ell,m}\big)$. Mit (1) erhalten wir (3).

Wir wissen bereits, dass ρ nach Definition eine reelle Form ist. Aus (3) folgt, dass ρ eine geschlossene $(1,1)$-Form ist. Wenn wir die Kähler-Metrik h zu h' abändern, ändert sich $\det((g_{\ell\bar m})_{\ell,m})$ um einen Faktor $f\colon M \to \mathbb{C}$, der nicht von der Wahl der lokalen holomorphen Koordinaten abhängt. Folglich erhalten wir als neue Ricci-Form

$$\rho' = -i\partial\bar\partial\log\big(f\cdot\det((g_{\ell\bar m})_{\ell,m})\big) = \rho - i\partial\bar\partial\log f\;. \qquad \square$$

Wir haben oben gesehen, dass eine Änderung der Kähler-Metrik den Repräsentanten ρ der de Rham-Kohomologieklasse $[\rho]$ ändert. Tatsächlich kann man die Ricci-Form auf einer kompakten Kähler-Mannigfaltigkeit innerhalb ihrer Kohomologieklasse vorgeben,

4.66. Satz (Calabi-Yau). *Es sei (M,h) eine kompakte Kähler-Mannigfaltigkeit und ρ' eine reelle, geschlossene $(1,1)$-Form, die die Klasse $[\rho] \in H^{1,1}(M)$ repräsentiert. Dann existiert eine eindeutige Kähler-Metrik h' mit Kähler-Form $\omega' \in [\omega]$ und Ricci-Form ρ'.*

Beweis. Wir geben hier aus Zeitgründen nur eine Beweisskizze. Wir erinnern uns, dass $\frac{\omega^n}{n!} = d\mathrm{vol}_g$ die Volumenform der Kähler-Metrik beschreibt. Für $\omega' \in [\omega]$ erhalten wir eine kohomologe Volumenform $d\mathrm{vol}_{g'}$, es gilt also $\mathrm{vol}_g(M) = \mathrm{vol}_{g'}(M)$. Wir schreiben $d\mathrm{vol}_{g'} = e^f\,d\mathrm{vol}_g$ für eine glatte Funktion f, dann folgt

$$\int_M e^f\,d\mathrm{vol}_g = \mathrm{vol}_{g'}(M) = \mathrm{vol}_g(M) = \int_M d\mathrm{vol}_g\;,$$

somit hat e^f Mittelwert 1 bezüglich $d\mathrm{vol}_g$.

Für die Ricci-Form erhalten wir

$$\rho' = -i\partial\bar\partial\log\big(e^f\,\det((g_{j\bar k})_{j,k})\big) = \rho - i\partial\bar\partial f\;.$$

Auf der anderen Seite sei $\rho' \in [\rho]$ gegeben, dann existiert nach dem $\partial\bar\partial$-Lemma 4.54 eine Funktion f wie oben. Dabei können wir f um eine additive Konstante so abändern, dass e^f Mittelwert 1 bezüglich $d\mathrm{vol}_g$ hat.

Wir suchen jetzt also eine Kähelr-Metrik h' mit $\omega' \in [\omega]$, so dass ${\omega'}^n = e^f \omega^n$ gilt. Nach Bemerkung 4.55 (4) suchen wir dazu eine reellwertige Funktion φ, so dass

$$\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi \; .$$

Insgesamt muss φ also die Differentialgleichung

$$e^f \omega^n = (\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n \tag{4.24}$$

erfüllen. Man kann zeigen, dass jede Lösung eine positiv-definite Kähler-Metrik mit $\omega' = \omega + i\partial\bar{\partial}\varphi$ induziert. Wir befassen uns aus Zeitgründen nicht weiter damit, wie man eine Lösung der Gleichung (4.24) findet und Eindeutigkeit zeigt. ☐

4.67. Definition. Es sei M eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Eine reelle $(1,1)$-Form $\alpha \in \Omega^{1,1}(M)$ heißt *positiv* (*negativ*), wenn die symmetrische reelle Bilinearform $\alpha(\,\cdot\,, J\,\cdot\,)$ positiv (negativ) definit ist.

Beispielsweise ist die Kähler-Form ω einer Kähler-Metrik stets positiv. Im Folgenden benutzen wir noch, dass sich $c_1(TM,\nabla) \in \Omega^2(M)$ für beliebige fast komplexe Mannigfaltigkeiten definieren lässt.

4.68. Satz (Calabi-Yau). *Es sei M eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, und $c_1(TM)$ sei durch eine negative 2-Form darstellbar. Dann trägt M eine bis auf Skalierung eindeutige Kähler-Metrik h mit Ricci-Form $\rho = \lambda\omega$ für eine Konstante $\lambda < 0$.*

Äquivalent dazu gilt $\mathrm{ric} = \lambda\, g$. Riemannsche Metrik mit dieser Eigenschaft heißen auch *Einstein-Metriken,* Kähler-Metriken mit dieser Eigenschaft heißen entsprechend *Kähler-Einstein-Metriken.*

Beweis. Auch hier geben wir keinen Beweis. Man beachte immerhin, dass ein negativer Repräsentant $\alpha \in [c_1(TM)]$ nach Satz 4.8 (2) automatisch eine Kähler-Form $-\alpha$ definiert. ☐

Im Fall $c_1(TM) = 0$ impliziert Satz 4.66, dass wir eine Ricci-flache Kähler-Metrik, also eine Kähler-Einstein-Metrik mit Einstein-Konstante 0 finden.

4.69. Definition. Eine einfach zusammenhängende, vollständige, Ricci-flache Kähler-Mannigfaltigkeit (M,h) heißt auch *Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit.*

Sei (M,h) eine Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, dann induziert der Levi-Civita-Zusammenhang einen flachen Zusammenhang auf dem kanonischen Bündel $K_M \to M$ nach Proposition 4.65 (2). Insbesondere existieren lokal stets parallele Schnitte von K_M, und da M einfach zusammenhängend ist, auch global. Da ∇ mit der holomorphen Struktur verträglich ist, sind diese parallelen Schnitte insbesondere auch holomorph, das heißt, das Bündel K_M ist *holomorph trivial.*

4.70. Folgerung. *Die Holonomiegruppe einer n-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit ist eine Untergruppe von $SU(n)$.*

Beweis. Nach Proposition 4.13 ist die Holonomiegruppe einer Kähler-Mannigfaltigkeit eine Untergruppe von $U(n)$. Da das kanonische Bündel einen nicht verschwindenden parallelen Schnitt hat, hält die Holonomiegruppe ein nicht verschwindendes Element in $\Lambda^{n,0}\mathbb{C}^n$ fest. Die Untergruppe von $U(n)$, die ein nicht verschwindendes Element von $\Lambda^{n,0}\mathbb{C}^n$ festhält, ist gerade $SU(n)$. ☐

Wir betrachten als Beispiel $\mathbb{C}^n$ mit der Euklidischen Metrik. Wenn wir den Hermiteschen Rahmen $v_1 = \partial_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}, \dots, v_n = \partial_n$ wählen, erhalten wir als zugehörige Basis von $T'\mathbb{C}^n$ gerade $e^1 = dz^1$, $\dots$, $e^n = dz_n$. Als parallelen Schnitt von K_M wählen wir

$$\Omega = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \; . \tag{4.25}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass

$$\begin{aligned}\Omega \wedge \bar{\Omega} &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-2i)^n \, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-2i)^n \, \frac{\omega^n}{n!} \; .\end{aligned}$$

Die Formen $e^{i\gamma}\Omega$ für eine reelle *Phase* γ haben auch diese Eigenschaft.

4.71. Definition. Sei (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit. Ein paralleler Schnitt $\Omega \in \Omega^{n,0}(M)$ von K_M heißt *holomorphe Volumenform,* wenn

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \, \frac{i^n}{2^n} \, \Omega \wedge \bar{\Omega} = \frac{\omega^n}{n!} \; .$$

Holomorphe Volumenformen existieren auf Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten, und sind nur bis auf eine Phase eindeutig bestimmt. Wir hätten auch die Existenz einer holomorphen Volumenform zur Definition von Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten benutzen können, hätten dann allerdings eventuell auch nicht-zusammenhängende Beispiele wie etwa flache Tori erhalten. In der Literatur sind die Bezeichnungen nicht eindeutig. Wir wollen in Zukunft unter einer *Calabi-Yau-Struktur* auf M die Wahl einer Kähler-Metrik und einer holomorphen Volumenform verstehen, das heißt, wir legen willkürlich die „Phase“ der holomorphen Volumenform fest. Dementsprechend schreiben wir (M, h, Ω) oder auch nur (M, ω, Ω) für eine Mannigfaltigkeit mit Calabi-Yau-Struktur.

In der komplex-algebraischen Geometrie vermeidet man nicht holomorphe Objekte wie Kähler-Formen. Daher sprechen algebraische Geometer bereits von einer *Calabi-Yau-Varietät,* wenn das kanonische Bündel als algebraisches Bündel (in unserem Kontext also als holomorphes Bündel) trivial ist. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.66 finden wir eine Calabi-Yau-Metrik.

4.72. Proposition. *Realteile holomorpher Volumenformen sind Kalibrierungen. Die zugehörigen kalibrierten Untermannigfaltigkeiten L in einer n-dimensionalen Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit haben die Eigenschaft, dass T_pM für alle $p \in L$ in eine orthogonale direkte Summe $T_pL \oplus JT_pL$ zerfällt. Insbesondere gilt $\omega|_L = 0$.*

Wir geben solchen Untermannigfaltigkeiten einen Namen.

4.73. Definition. Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $2n$. Eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $L \subset M$ heißt *Lagrangesch,* wenn $\omega|_L = 0$.

Es sei (M, h, Ω) eine komplex n-dimensionale Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit, dann ist eine *spezielle Lagrangesche Untermannigfaltigkeit* von M eine durch $\operatorname{Re}\Omega$ kalibrierte orientierte reell n-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

Im Falle einer Kähler-Mannigfaltigkeit ist $\omega|_L = 0$ äquivalent dazu, dass T_pL auf $J\,T_pL$ senkrecht steht. Man beachte, dass eine andere holomorphe Volumenform $e^{i\gamma}\Omega$ andere spezielle Lagrangesche Untermannigfaltigkeiten liefert.

4.74. Beispiel. Es sei $(\mathbb{C}, h^{\mathrm{eukl}}, dz)$ eine Calabi-Yau-Struktur auf $\mathbb{C}$. Die zugehörige Kalibrierung ist $dx = \operatorname{Re} dz$, die Kähler-Form $dx \wedge dy$.

(1) Jede reelle eindimensionale Untermannigfaltigkeit $L \subset \mathbb{C}$ ist Lagrange, denn $\omega|_L = 0$ aus Dimensionsgründen. Ein Beispiel wäre $S^1 \subset \mathbb{C}$.
(2) Eine orientierte Untermannigfaltigkeit $L \subset \mathbb{C}$ ist genau dann speziell Lagrange, wenn $dx|_L$ die Euklidische Volumenform auf L liefert, das heißt, wenn $\frac{\partial}{\partial x} \in T_pL$ gilt und dieser Vektor positiv orientiert sind. Also sind horizontale Geraden spezielle Lagrange-Untermannigfaltigkeiten.
(3) Wenn wir dz durch $e^{-i\gamma}\, dz$ ersetzen, erhalten wir Geraden im Winkel γ zur x-Achse als spezielle Lagrange-Untermannigfaltigkeiten.

Beweis von Proposition 4.72. Wir können diese Aussage punktweise beweisen und betrachten daher einen komplexen Vektorraum (V, J) mit einer Hermiteschen Metrik h und einer holomorphen Volumenform Ω. Es sei $W \subset V$ ein n-dimensionaler orientierter reeller Unterraum, so dass $\Omega|_W \neq 0$. Wir wählen eine orientierte Orthonormalbasis $(w_1, \dots, w_n)$ von W bezüglich der von h induzierten euklidischen Metrik $g = \operatorname{Re} h$. Da Ω auf jedem echten komplexen Unterraum von V verschwindet, schließen wir, dass $w_1, \dots, w_n$ den Raum V erzeugen und daher eine komplexe Basis von V bilden.

Das erlaubt uns, einen Hermiteschen Rahmen $v_1, \dots, v_n$ von V wie folgt zu konstruieren. Wir setzen $v_1 = w_1$, dann stehen v_1 und Jv_1 aufeinander senkrecht, haben Länge 1, und spannen den gleichen komplexen Unterraum von V auf wie w_1. Seien jetzt $v_1, \dots, v_k$ bereits definiert, so dass die Vektoren $v_1, Jv_1, \dots, v_k, Jv_k$ einen reellen g-orthonormalen $2k$-Rahmen bilden, und den gleichen k-dimensionalen komplexen Unterraum wie $w_1, \dots, w_k$ aufspannen. Dann ist w_{k+1} reell linear unabhängig von den Vektoren $v_1, \dots, Jv_k$, und das Gram-Schmidt-Verfahren macht aus w_{k+1} einen neuen Vektor v_{k+1} der Länge 1, der auf $v_1, \dots, Jv_k$ senkrecht steht. Dann steht auch Jv_{k+1} auf allen obigen Vektoren senkrecht, und wir können das Verfahren fortsetzen.

Als Element von $\Lambda^{n,0}V^*$ hat Ω die Gestalt

$$c \, \langle v_1 + iJv_1, \cdot \rangle \wedge \cdots \wedge \langle v_n + iJv_n, \cdot \rangle \,.$$

Da $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{i}{2}\right)^n \Omega \wedge \bar{\Omega} = \frac{\omega^n}{n!}$ gilt, folgt $|c| = 1$. Wir dürfen w_n durch eine geeignete Linearkombination aus w_n und Jw_n ersetzen, so dass $c = 1$. Somit hat Ω bezüglich der gegebenen Basis jetzt genau die Gestalt aus (4.25).

Außerdem liegt w_j im komplexen Erzeugnis von $v_1, \dots, v_j$, und wir erhalten

$$w_j = \sum_{k=1}^{j} \bigl(a_{kj} v_k + b_{kj} J v_k \bigr) \,.$$

Da $\|w_j\| = 1$ gilt, folgt $a_{jj}^2 + b_{jj}^2 \leq 1$. Und nach Konstruktion dürfen wir $a_{jj} > 0$ und $b_{jj} = 0$ für $j < n$ annehmen. Einsetzen in $\operatorname{Re} \Omega$ liefert demnach

$$\operatorname{Re} \Omega(v_1, \dots, v_n) = \operatorname{Re}\bigl(a_{11} \cdots a_{n-1,n-1} \cdot (a_{nn} + i b_{nn}) \bigr) = a_{11} \cdots a_{nn} \leq 1 \,.$$

Insbesondere hat Ω Komasse-Norm $\|\Omega\|_C \leq 1$. Da Ω als parallele Form geschlossen ist, ist Ω eine Kalibrierung.

Als Tangentialraum einer kalibrierten Untermannigfaltigkeit kommt W nur in Frage, wenn oben Gleichheit gilt, das heißt, wenn $a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1$. Das impliziert insbesondere, dass die Orthonormalbasis $w_1, \dots, w_n$ bereits ein Hermitescher Rahmen mit $\Omega(w_1, \dots, w_n) = 1$ ist. Hieraus folgt sofort, dass die reellen Unterräume W und JW aufeinander senkrecht stehen und gemeinsam V erzeugen. Äquivalent dazu gilt $\dim_{\mathbb{R}} W = \dim_{\mathbb{C}} V$ und $\omega|_W = 0$. $\square$

Der obige Beweis zeigt auch noch einmal, dass nicht jeder Lagrangesche Untervektorraum durch $\operatorname{Re} \Omega$ kalibriert wird. Die Zahl $a_{nn} + i b_{nn}$ bestimmt die „Phase“ $e^{i\gamma}$, und diese muss $\gamma = 0$ sein.

4.75. Bemerkung. Wir bemerken noch, dass eine holomorphe Volumenform Ω unabhängig von ihrer Phase die komplexe Struktur J eindeutig festlegt. Denn seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ reelle Vektorfelder, dann gilt

$$0 = \iota_{X+iJY} \Omega \in \Omega^{n-1,0}(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y = JX \,.$$

Tatsächlich haben Tian und Todorov gezeigt, dass der Modulraum komplexer Strukturen einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit lokal eine komplexe $h^{n-1,1}$-dimensionale Mannigfaltigkeit bildet. Das liegt daran, dass bei einer Variation der Klasse $[\Omega]$ jeweils einer der n lokalen holomorphen 1-Form-Faktoren zu einem antiholomorphen Faktor wird. Jede dieser komplexen Strukturen lässt

Ricci-flache Kähler-Metriken zu. Wenn wir zusätzlich auch die Kähler-Klasse variieren, erhalten wir einen reell $h^{1,1}(M) + 2h^{n-1,1}(M)$-dimensionalen Modulraum von Calabi-Yau-Metriken.

Im Gegensatz zum Modulraum aller Kähler-Metriken auf M, siehe Bemerkung 4.55, ist der Modulraum der Calabi-Yau-Metriken also endlich-dimensional. Wohl aus diesem Grund zählt man die zugehörige Holonomie-Gruppe $SU(n)$ zu den sogenannten „speziellen Holonomien", die Gruppe $U(n)$ jedoch nicht.

4.76. Bemerkung. Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten spielen eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik. Vereinfacht gesagt, bildet die Raumzeit in der String-Theorie ein Produkt aus einer vierdimensionalen Lorentz-Mannigfaltigkeit und einer Calabi-Yau-Dreimannigfaltigkeit. Letztere ist von der Größenordnung der Planck-Länge, und daher in den (gegenwärtig bekannten) Experimenten nicht sichtbar. Es gibt mehrere Beschreibungen der String-Theorie. Die String-Theorien vom Typ IIa und IIb werden äquivalent, wenn man die Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit der einen durch ihren „Spiegelpartner" in der anderen ersetzt.

Wenn zwei Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten M und N zueinander spiegelsymmetrisch sind, erhält man die Hodge-Raute der einen, indem man die Hodge-Raute der anderen um 90° dreht, es gilt also

$$h^{p,q}(M) = h^{n-q,p}(N) . \tag{4.26}$$

Die tatsächliche Beziehung zwischen M und N sollte jedoch wesentlich weiter gehen. Ein Ansatz ist die sogenannte „homologische Spiegelsymmetrie". Ein anderer Ansatz verlangt, dass der Modulraum der komplexen Strukturen von M in Beziehung zum Kähler-Modulraum von N steht. Im Lichte der Bemerkungen 4.75 haben beide wegen (4.26) die gleiche Dimension, allerdings einmal als reelle, das andere Mal als komplexe Mannigfaltigkeit. Um das auszugleichen, nimmt man noch das sogenannte „B-Feld" hinzu und vergleicht den kombinierten Modulraum von Kähler-Klasse und B-Feld mit dem Modulraum der komplexen Strukturen.

KAPITEL 5

Holonomie

In diesem Kapitel studieren wir die Strukturtheorie vollständiger Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Dabei spielt Holonomie eine wichtige Rolle. Wenn die Holonomiedarstellung in ein Produkt zerfällt, dann zerfällt das Tangentialbündel in eine direkte Summe paralleler Unterbündel. Der Satz von de Rham besagt, dass diese Zerlegung im einfach zusammenhängenden Fall von einer Produktzerlegung der Mannigfaltigkeit herrührt. Wir beweisen auch den Satz von Cheeger-Gromoll, der es unter bestimmten Umständen erlaubt, eine Gerade als Faktor abzuspalten.

Anschließend betrachten wir vollständige, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten mit unzerlegbarer Holonomie. Der Satz von Berger besagt, dass eine solche Mannigfaltigkeit entweder ein symmetrischer Raume ist, oder aber ihre Holonomie zu einer recht kurzen Liste gehört. Zum Schluss des Kapitels konstruieren wir diese speziellen Holonomiegruppen und die zugehörigen Darstellungen. Außerdem sammeln wir einige elementare Eigenschaften.

Wir folgen in diesem Kapitel im Wesentlichen den Büchern von Besse [**Be**, Kap. 10] und Joyce [**J**, Kap. 3].

5.1. Die de Rham-Zerlegung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit

Wir sehen relativ schnell, dass die Holonomie eines Riemannschen Produktes das Produkt der Holonomien der Faktoren ist. Ziel dieses Abschnittes ist eine Umkehrung dieses Sachverhaltes: wenn die Holonomie einer einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit sich als ein Produkt schreiben lässt, dann zerfällt die Mannigfaltigkeit bereits als Riemannsches Produkt.

5.1. Bemerkung. Es seien (M, g) und (N, h) zwei Riemannsche Mannigfaltigkeiten der Dimensionen m und n, $p \in M$ und $q \in N$. Wir bezeichnen das Riemannsche Produkt mit $(M \times N, g \oplus h)$, dann gilt

$$\mathrm{Hol}_{p,q}(M \times N, g \oplus h) = \mathrm{Hol}_p(M, g) \times \mathrm{Hol}_q(N, h) \subset \mathrm{Aut}(T_pM) \times \mathrm{Aut}(T_qM) \subset \mathrm{Aut}(T_{(p,q)}(M \times N)) .$$

Um das einzusehen, sei $\gamma\colon [0, 1] \to M \times N$ eine Schleife in $M \times N$ am Punkt (p, q). Dann können wir $\gamma = \alpha \times \beta$ schreiben, wobei α eine Schleife in M am Punkt p und β eine Schleife in N am Punkt q ist. Umgekehrt liefern zwei solche Schleifen in M beziehungsweise N wiederum eine Schleife in $M \times N$.

Wir zerlegen ein Vektorfeld Z längs γ in

$$Z(t) = (X(t), Y(t)) \in T_{\alpha(t)}M \oplus T_{\beta(t)}N = T_{\gamma(t)}(M \times N) ,$$

dann ist X ein Vektorfeld längs α in M und Y ein Vektorfeld längs β in N. Umgekehrt liefern zwei Vektorfelder längs α beziehungsweise β wieder ein Vektorfeld längs γ.

Schließlich ist Z längs γ genau dann parallel bezüglich des Levi-Civita-Zusammenhangs auf $(M \times N, g \oplus h)$, wenn X längs α und Y längs β parallel bezüglich der jeweiligen Levi-Civita-Zusammenhänge sind. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

Bevor wir die oben angedeutete Umkehrung dieser Bemerkung zeigen können, brauchen wir den Satz von Frobenius und den Begriff einer Blätterung.

5.2. Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit mit $\dim M = n$. Eine k-dimensionaler *Blätterungsatlas* von M ist ein Atlas $\mathcal{A}$ von M, für je zwei Karten $\varphi_j\colon U_j \to V_j \subset \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2$ in $\mathcal{A}$ und alle $p \in U_1 \cap U_2$ gilt, dass

$$d_{\varphi_1(p)}(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(v) \in \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{für alle } v \in \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n \; . \tag{1}$$

Eine k-dimensionale *Blätterung* von M ist ein maximaler k-dimensionaler Blätterungsatlas $\mathcal{F}$ von M.

Die Urbilder $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{y\}) \subset M$ für $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ heißen *Plaques* von $\mathcal{F}$. Die *Blätter* von $\mathcal{F}$ sind die Äquivalenzklassen in M unter der Äquivalenzrelation „$\sim$“ auf M, die erzeugt wird von

$$p \sim q \quad\Longleftrightarrow\quad p \text{ und } q \text{ liegen in der selben Plaque von } \mathcal{F} \; . \tag{2}$$

5.3. Beispiel. Es sei $A \in Gl(n, \mathbb{R})$. Wir versehen $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ mit einem k-dimensionalen Blätterungsatlas, indem wir kleine offene Teilmengen $U \subset \mathbb{R}^n$ durch Drehung um A^{-1} nach $\mathbb{R}^n$ abbilden, und ergänzen zu einem maximalen Blätterungsatlas $\mathcal{F}$. Dann sind Blätter von $\mathcal{F}$ gerade Bilder von affinen Unterräumen der Form $A \cdot (\mathbb{R}^k \times \{y\})$ unter der Quotientenabbildung nach T^n. Solche Blätterungen heißen auch *Kroneckerblätterungen.*

Im einfachsten Fall sei $k = 1$ und $n = 2$. Dann sind Blätter entweder kompakte Untermannigfaltigkeiten diffeomorph zu S^1, oder aber Geraden, die sich in einem irrationalen Winkel dicht um T^2 herumwickeln.

5.4. Bemerkung. Die Bedingung (1) sorgt dafür, dass Kartenwechel $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ Teilmengen der Form $(\mathbb{R}^k \times \{y\}) \cap V_1 \subset V_1 \subset \mathbb{R}^n$ auf ebensolche Teilmengen von V_2 abbilden. Seien also $\varphi_j^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{y_j\}) \subset M$ zwei Plaques durch eine Punkt $p \in U_1 \cap U_2$, dann existiert eine Umgebung $W \subset U_1 \cap U_2$ von p, so dass

$$\varphi_1^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{y_1\}) \cap W = \varphi_2^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{y_2\}) \cap W \; .$$

Lokal sehen Plaques und daher auch Blätter also aus wie k-dimensionale Untermannigfaltigkeiten von M.

Sei jetzt $B \subset M$ ein Blatt von $\mathcal{F}$. Man beachte, dass Blätter im Allgemeinen keine Untermannigfaltigkeiten sind. Wir können B mit der Topologie versehen, die die Plaques P über ihre Inklusionsabbildungen $P \hookrightarrow B$ induzieren. Dadurch werden Blätter zu Mannigfaltigkeiten, und die Inklusionsabbildung $B \hookrightarrow M$ wird zu einer injektiven Immersion.

Wenn die umgebende Mannigfaltigkeit eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist, dann ist trägt jedes Blatt B die induzierte Riemannsche Metrik und ist ebenfalls vollständig. Dazuu zeigt man zunächst, dass B bezüglich dieser Riemannschen Metrik vollständig ist. Da Abstände innerhalb B nicht kleiner als in M sind, ist jede Cauchy-Folge in B auch eine Cauchy-Folge in M und hat dort einen Grenzwert. Sei P eine Plaque um diesen Grenzwert, dann liegt ein Endstück der Cauchy-Folge in P, somit enthält B die Plaque und damit auch den Grenzwert der Folge. Also sind Blätter in vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeiten selbst vollständig.

5.5. Definition. Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Ein Untervektorbündel $F \subset TM$ des Tangentialbündels heißt *involutiv,* wenn $[X, Y] \in \Gamma(F)$ für alle X, $Y \in \Gamma(F)$ gilt.

Als Beispiel bilden die Tangentialräume an die Blätter einer Blätterung ein solches involutives Untervektorbündel. Denn aus der Natürlichkeit der Lie-Klammer folgt, dass die Lie-Klammer zweier Vektorfelder längs eines Blattes wieder tangential zu diesem Blatt sind. Tatsächlich liefern involutive Untervektorbündel des Tangentialbündels eine alternative Beschreibung von Blätterungen.

5.6. Satz (Frobenius). *Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $F \subset TM$ ein involutives Untervektorbündel vom Rang k. Dann existiert eine eindeutige k-dimensionale Blätterung $\mathcal{F}$ von M, so dass $F_p = T_pB_p$ für alle $p \in M$ gilt, wobei B_p das Blatt von $\mathcal{F}$ durch p bezeichne.*

Beweis. Es reicht, um jeden Punkt p von M herum eine Karte $\varphi\colon U \to V$ zu konstruieren, so dass $d_q\varphi(F_q) = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ für alle $q \in U$. Man überzeugt sich leicht, dass je zwei solche Karten die Bedingung aus Definition 5.2 (1) erfüllen.

Wir beginnen mit einer beliebigen Karte $\varphi_0\colon U \to V$ um p mit $\varphi_0(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ und nehmen an, dass die zusammengesetzte Abbildung

$$T_qM \supset F_q \xrightarrow{d_q\varphi_0} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$

für alle $q \in U$ bijektiv ist, wobei π die orthogonale Projektion auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Dazu beginnen wir mit einer beliebigen Karte, schalten gegebenenfalls einen linearen Automorphismus von $\mathbb{R}^n$ nach, und verkleinern U und V, falls nötig.

Aufgrund der obigen Annahme finden wir Vektorfelder $X_1, \dots, X_k \in \Gamma(F)$, so dass

$$\big(\pi \circ d_q\varphi_0\big)(X_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \text{für } j = 1, \dots, k \text{ und alle } q \in U\,.$$

Da die Lie-Klammer natürlich ist, folgt

$$\big(\pi \circ d_q\varphi_0\big)([X_j, X_k]) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right] = 0$$

für alle j, k. Und da $[X_j, X_k] \in \Gamma(F)$ gilt und $\pi \circ d_q\varphi_0\colon F \to \mathbb{R}^k$ bijektiv ist, folgt $[X_j, X_k] = 0$.

Wir bezeichnen die Flüsse von $X_1, \dots, X_k$ auf U mit $\Phi_1^t, \dots, \Phi_k^t$. Wenn $\varepsilon > 0$ hinreichend klein ist, können wir für alle $x_1, \dots, x_n \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ eine Abbildung $\psi\colon (-\varepsilon,\varepsilon)^n \to U$ durch

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = \big(\Phi_1^{x_1} \circ \dots \circ \Phi_k^{x_k}\big)\big(\varphi_0^{-1}(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)\big)$$

definieren. Da $[X_j, X_k] = 0$, kommutieren die Flüsse $\Phi_1^{x_1}, \dots, \Phi_k^{x_k}$ paarweise, und es folgt

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_j} = X_j \circ \psi \qquad \text{auf } (-\varepsilon,\varepsilon)^n, \text{ für alle } 1 \le j \le k\,.$$

Die Umkehrabbildung $\varphi = \psi^{-1}$ liefert die gesuchte Karte. □

Im Folgenden nennen wir ein Untervektorbündel V eines Vektorbündel W auf M mit Zusammenhang ∇ *parallel*, wenn

$$\nabla_X Y \in \Gamma(V) \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ und alle } Y \in \Gamma(V)\,.$$

Wir interessieren uns zunächst für den Fall, dass $W = TM$ das Tangentialbündel einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ ist.

5.7. Proposition. *Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und $\mathrm{Hol}_p(M, g) \subset \mathrm{Aut}(T_pM)$ die Holonomiegruppe. Wir nehmen an, dass die Holonomiedarstellung auf T_pM einen Unterraum V auf sich selbst abbildet.*

(1) *Dann ist $V^\perp \subset T_pM$ auch $\mathrm{Hol}_p(M, g)$-invariant, und TM zerfällt als orthogonale direkte Summe zweier paralleler Unterbündel V_1 und $V_2 \subset TM$ mit $V_1|_p = V$ und $V_2|_p = V^\perp$.*
(2) *Wir können eine Umgebung U von p isometrisch mit einem Riemannschen Produkt $U_1 \times U_2$ identifizieren, so dass für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ gilt, dass*

$$T(U_1 \times \{q_2\}) = V_1|_{U_1 \times \{q_2\}} \qquad \textit{und} \qquad T(\{q_1\} \times U_2) = V_2|_{\{q_1\} \times U_2}\,.$$

Beweis. Da $\mathrm{Hol}_p(M, g)$ durch orthogonale Abbildungen auf T_pM wirkt, ist $V^\perp$ genau dann invariant unter $\mathrm{Hol}_p(M, g)$, wenn V invariant ist. Die Existenz von V_1 und V_2 folgt aus dem Holonomieprinzip. Für jeden Punkt $q \in M$ finden wir einen Weg γ von p nach q. Wir definieren $V_1|_q$ und $V_2|_q$, indem wir V und $V^\perp$ längs γ parallel nach q verschieben. Da beide Räume invariant unter $\mathrm{Hol}_p(M, g)$ sind, sind die Räume $V_1|_q$ und $V_2|_q$ unabhängig von der Wahl des Weges γ. Da

Parallelverschiebung glatt vom Weg γ abhängt, bilden V und W glatte Unterbündel von TM. Es folgt, dass T_qM die orthogonale direkte Summe von $V_1|_q$ und $V_2|_q$ ist.

Indem wir $\gamma\colon [0,1] \to M$ auf $[0,t]$ einschränken und die Ableitung an der Stelle $t = 1$ betrachen, sehen wir, dass $\nabla_{\dot\gamma(1)}x \in V_j$ für alle $X \in \Gamma(V_j)$ gilt. Schließlich können wir durch geeignete Wahl von γ jeden Vektor $X \in T_qM$ als $\dot\gamma(1)$ realisieren. Somit sind die Unterbündel V_1 und V_2 auch parallel, und (1) ist bewiesen.

Parallele Untervektorbündel von TM sind involutiv, denn für X, $Y \in \Gamma(V_j)$ folgt

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \in \Gamma(V_j)\ .$$

Nach dem Satz 5.6 von Frobenius existieren zwei Blätterungen auf M tangential an die Bündel V_1 und V_2. Wir wählen eine kleine Umgebung U um p, die zu beiden Blätterungen eine Karte wie in Definition 5.2 trägt, und bezeichnen die Plaques durch p mit U_1 und U_2. Gegebenenfalls nach Verkleinern von U, U_1 und U_2 existiert eine bijektive Abbildung $F\colon U \to U_1 \times U_2$ mit $F(u) = (u_1, u_2)$, so dass u in der gleichen Plaque der zweiten Blätterung liegt wie u_1 und in der gleichen Plaque der ersten Blätterung wie u_2. Wenn wir U vermittels F mit $U_1 \times U_2$ identifizieren, folgt für alle $u_1 \in U_1$ und alle $u_2 \in U_2$ bereits

$$T(U_1 \times \{q_2\}) = V_1|_{U_1\times\{q_2\}} \qquad \text{und} \qquad T(\{q_1\} \times U_2) = V_2|_{\{q_1\}\times U_2}\ .$$

Wenn wir U_1 und U_2 hinreichend klein gewählt haben, existieren lokale orthonormale Rahmen $(X_1, \dots, X_k)$ von U_1 und $(Y_1, \dots, Y_\ell)$ von U_2. Seien $\pi_j\colon U \to U_j$ für $j = 1$, 2 die Projektionen auf die Faktoren. Dann können wir die X_i zu π_1-verwandten Vektorfeldern $X_i \in \Gamma(V_1)$ und die Y_j zu π_2-verwandten Vektorfeldern $Y_j \in \Gamma(V_2)$ jeweils auf ganz U fortsetzen. Da $U = U_1 \times U_2$ ein Produkt ist, folgt sofort $[X_i, Y_j] = 0$ auf ganz U. Da die Vektorbündel V_1 und V_2 parallel sind, folgt

$$\nabla_{X_i} Y_j = \nabla_{Y_j} X_i \in \Gamma(V_1) \cap \Gamma(V_2) = \{0\}$$

für alle i, j. Und weil ∇ ein metrischer Zusammenhang ist, folgt auch

$$X_i\big(g(Y_p, Y_q)\big) = 0 \qquad \text{und} \qquad Y_j\big(g(X_p, X_q)\big) = 0$$

für alle i, j, p, q. Also ist U sogar ein Riemannsches Produkt, und es folgt (2). □

5.8. Bemerkung. Es gibt Hindernisse, die Produktzerlegung aus (2) auf ganz M auszudehnen.

(1) Es sei $M = T^2$ ein flacher Torus. Nicht jeder Torus ist ein Riemannsches Produkt aus zwei Kreisen. Und selbst wenn er es ist, können wir TM so in parallele eindimensionale Bündel aufspalten, dass diese nicht tangential an die Faktoren sind.
(2) Die Antipodenabbildung -1 wirkt frei auf $S^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ und auf $S^\ell \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$. Wir betrachten die Mannigfaltigkeit $M = (S^k \times S^\ell)/\{(1,1), (-1,-1)\}$. Sie lässt sich nicht als Riemannsches Produkt darstellen, obwohl sie die Zerlegung $T\tilde M = TS^k \oplus TS^\ell$ von ihrer universellen Überlagerung erbt.
(3) Sei schließlich $M = M_1 \times M_2$ ein Riemannsches Produkt und $p \in M_1$, $q \in M_2$, dann ist $M' = M \setminus \{(p,q)\}$ kein Riemannsches Produkt, obwohl sich die Zerlegung $TM = TM_1 \oplus TM_2$ auf M' überträgt.

Die Beispiele (1) und (2) sind nicht einfach zusammenhängend, und Beispiel (3) ist nicht vollständig.

Wenn eine Gruppe G auf einem euklidischen Vektorraum V durch lineare Isometrien wirkt, ist mit jedem invarianten Unterraum U auch sein orthogonales Komplement $U^\perp$ invariant. Wir können solch einen Unterraum sukzessive zerlegen in $V = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k$, wobei $V_0 = V^G$ der Unterraum der invarianten Vektoren sei, und sich die Unterräume U_1, …, $U_k \neq 0$ nicht weiter zerlegen lassen. Die Unterräume U_1, …, U_k heißen auch (G-) *irreduzibel.*

5.9. Satz (de Rham). *Es sei (M,g) eine vollständige, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Es sei $T_pM = T_0 \oplus \cdots \oplus T_k$ eine orthogonale Zerlegung von T_pM in $\mathrm{Hol}_p(M,g)$-invariante Unterräume. Dabei sei $T_0 = (T_pM)^{\mathrm{Hol}_p(M,g)}$ der Unterraum, auf dem $\mathrm{Hol}_p(M,g)$ trivial wirkt, und die Unterräume $0 \neq T_1, \ldots, T_k \subset T_pM$ seien $\mathrm{Hol}_p(M,g)$-irreduzibel.*

Dann ist (M,g) isometrisch zu einem Riemannschen Produkt $(M_0,g_0) \times \cdots \times (M_k,g_k)$, so dass $T_j = T_pM_j$ für $j = 0, \ldots, k$. Die Mannigfaltigkeit (M_0,g_0) ist isometrisch zu $(\mathbb{R}^{\dim T_0}, g^{\mathrm{eukl}})$.

Man nennt (M_0,g_0) auch den *flachen de Rham-Faktor* und (M_j,g_j) für $1 \leq j \leq k$ die *irreduziblen de Rham-Faktoren* von (M,g). Man kann zeigen, dass die Faktoren $T_0, \ldots, T_k$ von T_pM bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt sind. Somit sind auch $M_0, \ldots, M_k$ bis auf ihre Reigenfolge eindeutig bestimmt, wir erhalten also eine eindeutige Produktzerlegung von M. Wir zerlegen den flachen de Rham-Faktor M_0 nicht weiter, da er sich auf unendlich viele Weisen als Produkt schreiben lässt, falls $\dim M_0 > 1$, und wir die Eindeutigkeit der Zerlegung verlieren würden.

Falls M nicht einfach zusammenhängend ist, gehen wir zur universellen Überlagerung $\tilde{M}$ über, bevor wir den obigen Satz anwenden. Wir erinnern uns, dass $\mathrm{Hol}(\tilde{M},g) = \mathrm{Hol}^0(M,g)$, siehe Definition 3.23. Mit Bemerkung 5.1 folgt: wenn die eingeschränkte Holonomiedarstellung in zwei invariante Unterräume zerfällt, dann zerfällt auch $\mathrm{Hol}^0(M,g)$ in ein Produkt zweier Untergruppen, die jeweils nur auf einem der zwei Unterräume nichttrivial wirken.

Beweis. Der Satz folgt induktiv aus der folgenden Aussage. Sei (M,g) eine vollständige, zusammenhängende und einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit und $V \subset T_pM$ ein $\mathrm{Hol}_p(M,g)$-invarianter Untervektorraum von T_pM, dann zerfällt (M,g) als Riemannsches Produkt $(M_1,g_1) \times (M_2,g_2)$, so dass $T_pM_1 = V$. Zunächst setzen wir V und $V^\perp$ wie in Proposition 5.7 (1) zu parallelen Untervektorbündeln V_1, $V_2 \subset TM$ fort.

Wir wollen jetzt eine beliebigen Punkt $q \in M$ auf M_1 „projizieren“. Dazu sei $\gamma\colon [0,1] \to M$ eine Kurve von $\gamma(0) = p$ nach $\gamma(1) = q$. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $F\colon [0,1]^2 \to M$ mit den Eigenschaften

$$\tfrac{\partial F}{\partial s} \in V_1 \;, \qquad \tfrac{\partial F}{\partial t} \in V_2 \qquad \text{und} \qquad F(t,t) = \gamma(t) \qquad \text{für alle } t \in [0,1] \;. \tag{5.1}$$

Aus den obigen Bedingungen folgt, da V_1, V_2 parallel sind und ∇ torsionsfrei ist, dass

$$\nabla^F_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial F}{\partial t} = \nabla^F_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial F}{\partial s} \in V_1 \cap V_2 = \{0\} \;. \tag{5.2}$$

Wir definieren die Projektionen von q auf M_1 und M_2 als $F(1,0)$ und $F(0,1)$ und zeigen, dass diese Abbildungen nicht von der Wahl der Kurve γ abhängen.

Wir legen F zunächst auf der Diagonalen durch $F(t,t) = \gamma(t)$ fest. Dann setzen wir wie folgt fort. Angenommen, wir kennen $F(s_0,t_0)$ für ein Paar $(s_0,t_0) \in [0,1]^2$, dann wählen wir eine Umgebung U von $F(s_0,t_0)$ und nehmen an, dass U als Riemannsches Produkt $U_1 \times U_2$ wie in Proposition 5.7 (2) zerfällt. Dann bestimmen wir offene Intervalle I, $J \subset [0,1]$ um s_0, t_0, so dass $F(s,t_0) \in U_1$ für alle $s \in I$ und $F(s_0,t) \in U_2$ für alle $t \in J$. Die einzige Möglichkeit, F auf $I \times J$ so fortzusetzen, dass (5.1) erfüllt ist, ist dann

$$F(s,t) = \bigl(F(s,t_0), F(s_0,t)\bigr) \in U_1 \times U_2 = U \;. \tag{5.3}$$

Ausgehend von der Diagonalen setzen wir F wie in (5.3) fort auf eine offene Umgebung $D \subset [0,1]^2$ der Diagonalen. Sei $(s_0,t_0) \in \partial D$ ein Randpunkt, dann finden wir eine Cauchy-Folge in D, die gegen (s_0,t_0) konvergiert. Die Abbildung F hat beschränktes Differential, denn $\|\dot\gamma\|(t)$ ist beschränkt, da $[0,1]$ kompakt ist, und an jeder Stelle (s,t) gilt

$$\bigl\|d_{(s,t)}F\bigr\| \leq \bigl\|\tfrac{\partial F}{\partial s}(s,t)\bigr\| + \bigl\|\tfrac{\partial F}{\partial t}(s,t)\bigr\| = \bigl\|\tfrac{\partial F}{\partial s}(s,s)\bigr\| + \bigl\|\tfrac{\partial F}{\partial t}(t,t)\bigr\| \leq 2\,\|\dot\gamma(t)\|_{C^0} \;.$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass $\nabla^F_{\partial s} \frac{\partial F}{\partial t} = 0$ und umgekehrt nach (5.2), um die Normen der partiellen Ableitungen auf Normen partieller Ableitungen längs der Diagonalen zurückzuführen. Also ist F Lipschitz, und die obige Cauchy-Folge wird von F auf eine Cauchy-Folge in M abgebildet. Wir definieren $F(s_0, t_0)$ als Grenzwert dieser Folge und fahren wie in (5.3) fort. Auf diese Weise dehnen wir F auf ganz $[0,1]^2$ aus. Gleichzeitig sehen wir, dass diese Fortsetzung eindeutig ist.

Um zu zeigen, dass $F(1,0)$ und $F(0,1)$ nicht vom Weg γ von p nach q abhängen, betrachten wir jetzt einen weiteren Weg γ' und die zugehörige Abbildung F'. Da M einfach zusammenhängend ist, finden wir eine Homotopie h zwischen γ und γ'. Die obige Konstruktion von F hängt offensichtlich stetig vom Weg ab, und wir erhalten eine Homotopie $H\colon [0,1]^3 \to M$ zwischen F und F'. Man sieht jetzt leicht, dass $H(1,0,u)$ und $H(0,1,u)$ nicht vom Homotopieparameter u abhängen.

Somit haben wir Projektionen $\pi_j\colon M \to M_j$ für $j = 1, 2$ konstruiert. Mithilfe von (5.2) schließen wir ähnlich wie in Proposition 5.7 (2), dass $M = M_1 \times M_2$ ein Riemannsches Produkt ist. □

5.2. Der Satz von Cheeger und Gromoll

In diesem Abschnitt geben wir ein rein geometrisches Kriterium dafür, dass sich $\mathbb{R}$ als Faktor einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit mit $\operatorname{ric} \geq 0$ abspalten lässt. Außerdem diskutieren wir topologische Konsequenzen dieser Aussage. Da einige Typen spezieller Holonomie $\operatorname{ric} = 0$, insbesondere also $\operatorname{ric} \geq 0$ implizieren, gelten alle Aussagen in diesem Abschnitt insbesondere für Mannigfaltigkeiten mit diesen Holonomien. Zum Nachlesen empfiehlt sich das Buch von Petersen [**P**, Section 7.3].

5.10. Definition. Eine *Gerade* in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$, so dass

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = |t - s| \qquad \text{für alle } s,\, t \in \mathbb{R}\ .$$

Ein Strahl ist eine Kurve $\gamma\colon [0, \infty) \to M$ mit der obigen Eigenschaft.

Mit dem Gauß-Lemma 1.89 sehen wir, dass γ nach Bogenlänge parametrisiert ist. Außerdem erhält γ Distanzen und ist daher eine injektive Geodätische. Aber nicht jede injektive Geodätische ist eine Gerade oder ein Strahl, siehe unten.

5.11. Satz (Cheeger-Gromoll). *Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Ricci-Krümmung* $\operatorname{ric} \geq 0$. *Wenn M eine Gerade enthält, dann ist M isometrisch zu einem Riemannschen Produkt $\mathbb{R} \times M'$, wobei die ursprüngliche Gerade von der Form $t \mapsto (t, p)$ für ein $p \in M'$ ist.*

Wir folgen dem etwas einfacheren Beweis von Eschenburg und Heintze. Die Formulierung des Satzes von Cheeger-Gromoll und ihr Beweis erinnern ein wenig an den Satz 2.20 von Bishop-Gromov und den darauf basierenden Beweis des Durchmesser-Starrheitssatzes 2.21 von Cheng. In der Tat folgt aus der Existenz einer Geraden, dass M Durchmesser $\infty = \lim_{\kappa \to 0} \frac{\pi}{\sqrt{\kappa}}$ hat. Die Folgerung in Satz 5.11 ist allerdings deutlich schwächer als man es nach dem Satz von Cheng erwarten würde.

5.12. Beispiel. Wir geben ein Beispiel und ein Gegenbeispiel.

(1) Wir betrachten den Zylinder $\mathbb{R} \times S^1$ mit der Produktmetrik. Kurven der Form $t \mapsto (t, p)$ für $p \in S^1$ sind Geraden, und die Produkt-Zerlegung aus dem Satz von Cheeger-Gromoll ist gerade die Zerlegung $\mathbb{R} \times S^1$.

    Auf der anderen Seite sind Kurven der Form $t \mapsto (at + e^{ibt})$ mit $a^2 + b^2 = 1$ keine Geraden falls $b \neq 0$, da sie von der Länge $\frac{\pi}{b}$ an nicht mehr die Distanz erhalten.

(2) Sei $h\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ eine Funktion mit $h'' > 0$ auf ganz $\mathbb{R}$. Wir betrachten die Rotationsfläche

$$M = \bigl\{\, F(t, \varphi) \bigm| t \in \mathbb{R}, \varphi \in [0, 2\pi] \,\bigr\} \qquad \text{mit} \qquad F(t, \varphi) = (t, h(t) \cos\varphi, h(t) \sin\varphi)\ .$$

Dann lässt sich die Kurve $t \mapsto F(t, \varphi)$ für alle festen φ zu einer Geraden umparamterisieren. Dennoch spaltet M nicht als Riemannsches Produkt. Allerdings ist wegen $h'' > 0$ die Schnittkrümmung negativ, und damit auch die Ricci-Krümmung.

Wir geben einen kurzen Überblick über den Beweis des Satzes 5.11, bevor wir die nötigen Vorbereitungen treffen. Zunächst konstruieren wir zwei Busemann-Funktionen $b_\pm \colon M \to \mathbb{R}$. Das sind verallgemeinerte Abstandsfunktionen, die in gewissem Sinne den Abstand von Punkten in M zu den beiden „Endpunkten" der Geraden im Unendlichen messen. Entlang der Geraden gilt $b_\pm(\gamma(t)) = \pm t$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung zeigen wir, dass $b_+ + b_-$ entlang der Geraden γ das Maximum annimmt.

Anschließend beweisen wir mit Hilfe der Voraussetzung an die Ricci-Krümmung und eines Maximumprinzips, dass $b_+ + b_-$ auf ganz M konstant ist. Hieraus folgern wir, dass durch jeden Punkt $p \in M$ eine „Parallele" zu γ verläuft. Außerdem schließen wir, dass b_+ und b_- sowohl konvex als auch konkav sind, und daher totalgeodätische Niveauflächen haben. Schließlich kann man eine explizite Isometrie von $M' \times \mathbb{R}$ und M angeben, wobei $M' = b_+^{-1}(0)$.

5.13. Proposition und Definition. *Es sei $\gamma \colon [0, \infty) \to M$ ein Strahl. Dann konvergieren die Funktionen*

$$b_t \colon M \to \mathbb{R} \qquad \textit{mit} \qquad b_t(q) = t - d\big(q, \gamma(t)\big)$$

für $t \to \infty$ gegen die Busemann-Funktion

$$b = b_\gamma = \lim_{t \to \infty} b_t \colon M \to \mathbb{R} \,.$$

Busemann-Funktionen sind 1-Lipschitz, und es gilt $b(\gamma(t)) = t$.

Beweis. Da γ ein Strahl ist, gilt

$$b_t\big(\gamma(s)\big) = t - d\big(\gamma(t), \gamma(s)\big) = s \qquad \text{für alle } t \geq s \,,$$

somit $b_\gamma(\gamma(s)) = s$ für alle s. Aus der Dreiecksungleichung folgt für $t > s$ und $q \in M$, dass

$$b_t(q) = t - d\big(q, \gamma(t)\big) \geq t - d\big(q, \gamma(s)\big) - d\big(\gamma(s), \gamma(t)\big) = t - (t - s) - d\big(q, \gamma(s)\big) = b_s(q) \,.$$

Somit erhält man $b_\gamma(t)$ als Supremum einer Funktionenfolge.

Außerdem liefert die Dreiecksungleichung für alle p, $q \in M$ noch

$$b(q) - b(p) = \lim_{t \to \infty} \big(d(p, \gamma(t)) - d(q, \gamma(t))\big) \leq d(p, q) \,.$$

Somit ist b Lipschitz, und da $b(\gamma(s)) = s$ gilt, sind die obigen Funktionenfolgen punktweise nach oben beschränkt. $\square$

Sei jetzt γ eine Gerade, dann sind die Abbildungen $\gamma_\pm(t) = \gamma(\pm t)$ Strahlen, und wir erhalten zwei Busemann-Funktionen. Als erstes folgt aus der Dreiecksungleichung für alle q, dass

$$\begin{aligned} b_+(q) + b_-(q) &= \lim_{s \to \infty} \big(s + t - d(\gamma(s), q) - d(\gamma(-t), q)\big) \\ &= \lim_{s \to \infty} \big(d(\gamma(-t), \gamma(s)) - d(\gamma(s), q) - d(\gamma(-t), q)\big) \leq 0 \,, \end{aligned} \tag{5.4}$$

und entlang γ gilt Gleichheit. Im Beweis von Satz 5.11 werden wir sehen, dass $b_\pm \colon M \to \mathbb{R}$ Projektionsabbildungen sind. Wir setzen dann $M' = b_+^{-1}(0) = b_-^{-1}(0)$.

5.14. Beispiel. Sei $t \mapsto (t, p) \in \mathbb{R} \times S^1$ die Gerade aus Beispiel 5.12. Dann sind die zu den Strahlen $t \mapsto (\pm t, p)$ gehörigen Busemannfunktionen gerade $b_\pm(t, p) = \pm t$.

Analog dazu sei $v \in S^{n-1}$ ein Einheitsvektor und $t \mapsto p + tv$ ein Strahl in $\mathbb{R}^n$. Dann ist die zugehörige Busemannfunktion gerade $q \mapsto \langle q - p, v \rangle$.

Man beachte, dass Busemann-Funktionen im Allgemeinen zwar Lipschitz-Funktionen mit Lipschitz-Konstante 1, aber nicht differenzierbar sind. Als Ersatz für Differenzierbarkeit führen wir daher den Begriff der Stützfunktion (engl.: support function) ein.

5.15. Definition. Es sei $f\colon M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Eine *Stützfunktion* für f an der Stelle $p \in M$ ist eine $\mathcal{C}^2$-Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung U von p, so dass $g \le f|_U$ und $g(p) = f(p)$.

Mit Hilfe von Stützfunktionen können wir ein Maximumprinzip formulieren. Es bezeichne

$$\Delta f = -\operatorname{div}\operatorname{grad} f = -\operatorname{tr}\operatorname{Hess} f$$

den Laplace-Beltrami-Operator auf Funktionen. Dabei wird die zweite Ableitung oder auch *Hesse-Form* Hess_f von f für X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch

$$\operatorname{Hess}_f(X,Y) = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f)\ .$$

Der zweite Term sorgt dafür, dass Hess_f in beiden Variablen C^∞-linear, also tensoriell ist. Da ∇ torsionsfrei ist, ist Hess_f auch symmetrisch.

5.16. Lemma (Maximumprinzip; Hopf, Calabi). *Es sei M eine zusammenhängende, nicht notwendigerweise vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}$ stetig. Falls es für alle $p \in M$ und alle $\varepsilon > 0$ eine Stützfunktion $f_{p,\varepsilon}$ für f an der Stelle p gibt, so dass $\Delta f_{p,\varepsilon} \le \varepsilon$, dann ist f konstant, falls f auf M ein Maximum annimmt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass f bei $p \in M$ sein Maximum annimmt, aber nicht konstant ist. Die Teilmenge von M, auf der f das Maximum annimmt, ist abgeschlossen, und wir können p auf ihrem Rand wählen, falls f nicht konstant ist. Dann finden wir eine offene Umgebung U von p, die zu einem Ball diffeomorph ist, so dass

$$\partial U \ne \partial' U = \bigl\{\, q \in \partial U \bigm| f(q) = f(p) \,\bigr\}\ .$$

Außerdem sei $h\colon M \to \mathbb{R}$ glatt, so dass

$$h(p) = 0\ , \tag{1}$$

$$\Delta h < 0 \qquad \text{auf } U\ , \tag{2}$$

$$h < 0 \qquad \text{auf } \partial' U\ . \tag{3}$$

Dazu wählen wir eine Funktion φ und setzen $h = e^{a\varphi} - 1$ für $a > 0$ hinreichend groß, denn für einen orthonormalen Rahmen $e_1, \dots, e_n$ folgt

$$\begin{aligned} \Delta(e^{a\varphi} - 1) &= -\sum_{i=1}^n \Bigl(e_i\bigl(a e_i(\varphi)\, e^{a\varphi}\bigr) - a(\nabla_{e_i} e_i)(\varphi)\, e^{a\varphi}\Bigr) \\ &= -\sum_{i=1}^n \bigl(a\operatorname{Hess}_\varphi(e_i,e_i) + a^2 e_i(\varphi)^2\bigr)\, e^{a\varphi} = \bigl(a\Delta - a^2\, \|\operatorname{grad}\varphi\|^2\bigr)\, e^{a\varphi}\ . \end{aligned}$$

Da es eine kleine offene Menge auf ∂U gibt, auf der h positiv sein darf, wählen wir φ so, dass φ außerhalb dieser offenen Menge negativ ist, zum Mittelpunkt p hin auf 0 ansteigt und an mindestens einem Punkt in $\partial U \setminus \partial' U$ positiv ist, so dass $\|\operatorname{grad}\varphi\| > 0$ auf ganz $\overline{U}$.

Für $\delta > 0$ hinreichend klein gilt $f + \delta h < f(p) = (f + \delta h)(p)$ auf ganz ∂U. Also nimmt $f + \delta h$ ein Maximum auf U an, etwa im Punkt $q \in U$. Dann ist $f_{q,\varepsilon} + \delta h$ eine Stützfunktion für $f + \delta h$ an der Stelle q, definiert auf einer kleinen Umgebung $V \subset U$ von q, und es gilt

$$-\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}_{f_{q,\varepsilon}+\delta h}|_q) = \Delta(f_{q,\varepsilon} + \delta h)(q) < 0$$

für ausreichend kleines ε, obwohl die Hesse-Form an einem Maximum stets negativ semidefinit ist. Somit kann f nur dann ein Maximum annehmen, wenn f konstant ist. □

Wir konstruieren eine Stützfunktion für die Busemann-Funktion b eines Strahles γ an einem beliebigen Punkt $p \in M$. Sei $(r_i)_i$ eine monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}$ mit Grenzwert ∞, und sei $\gamma_i \colon [0, d(p, \gamma(r_i))] \to M$ eine minimale Geodätische von p nach γ_i. Nach Übergang zu einer Teilfolge konvergiert $\dot\gamma_i(0)$ gegen einen Einheitsvektor $v \in T_pM$. Der Strahl $\beta(t) = \exp_p(tv)$ heißt *Asymptote* durch p an den Strahl γ. Man beachte, dass Asymptoten nicht immer eindeutig sind. Wir fixieren $r > 0$ und definieren eine Funktion $b_{p,s} \colon M \to \mathbb{R}$ durch

$$b_{p,s}(q) = b(p) + s - d\big(q, \beta(s)\big) \; . \tag{5.5}$$

Sei jetzt $\varepsilon > 0$. Da die Folge $\dot\gamma_i(0)$ gegen $v = \dot\beta(0)$ konvergiert, existiert wegen der Stetigkeit der Exponentialabbildung und der Definition von b ein hinreichend großes i, so dass

$$d(\gamma_i(s), \beta(s)) < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad b(p) < b_{r_i}(p) + \varepsilon \; .$$

Da $\gamma_i(s)$ auf der kürzesten Geodätischen von p nach $\gamma(r_i)$ liegt, folgt aus der Dreiecksungleichung

$$b(p) < b_{r_i}(p) + \varepsilon = r_i - d\big(\gamma(r_i), p\big) + \varepsilon = r_i - s - d\big(\gamma_i(s), \gamma(r_i)\big) + \varepsilon < r_i - s - d\big(\beta(s), \gamma(r_i)\big) + 2\varepsilon \; .$$

Sei jetzt $q \in M$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} b_{p,s}(q) &= b(p) + s - d\big(q, \beta(s)\big) \\ &< r_i - d\big(q, \beta(s)\big) - d\big(\beta(s), \gamma(r_i)\big) + 2\varepsilon \\ &\le r_i - d\big(q, \gamma(r_i)\big) + 2\varepsilon = b_{r_i}(q) + 2\varepsilon \; . \end{aligned}$$

Für $i \to \infty$ wird ε beliebig klein, also folgt $b_{p,s}(q) \le b(q)$, und für $q = p$ gilt offensichtlich Gleichheit. Außerdem ist $d\big(\,\cdot\,, \beta(s)\big)$ in einer Umgebung von p glatt, denn da β ein Strahl ist, liegt $\beta(s)$ nicht im Schnittort von p, siehe Abschnitt 1.6, und somit liegt p umgekehrt auch nicht im Schnittort von $\beta(s)$. Also ist die Funktion $b_{p,s}$ aus (5.5) wie behauptet eine Stützfunktion für b bei $p \in M$, allerdings ist sie eventuell nur auf einer sehr kleinen Umgebung U von p glatt. Auf dieser Umgebung U gilt außerdem

$$\|d_q b_{p,s}\| = \|d_q d(\,\cdot\,, \beta(s))\| = 1 \; . \tag{5.6}$$

Die folgende Ungleichung geht auf Calabi zurück. Für $n \times n$-Tensoren $A = (a_{ij})$ bezüglich eines orthonormalen Rahmens betrachten wir die *Hilbert-Schmidt-Norm*

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j} a_{ij}^2 \; .$$

5.17. Lemma. *Es sei (M, g) eine (nicht notwendigerweise vollständige) Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion mit $\|\operatorname{grad} f\| = 1$ auf ganz M. Es sei $c \colon I \to M$ eine Integralkurve von* $\operatorname{grad} f$*, dann folgt $d(c(s), c(t)) = |t - s|$ für alle s, $t \in I$, und es gilt*

$$\operatorname{ric}(\dot c, \dot c) = (\Delta f \circ c)' - \|\mathrm{Hess}_f \circ c\|^2 \le (\Delta f \circ c)' - \frac{1}{n-1} \, (\Delta f \circ c)^2 \; .$$

Beweis. Die erste Aussage folgt, da c durch df kalibriert wird. Genauer gilt für jede Kurve γ von $p = c(s)$ nach $q = c(t)$, dass

$$f(c(t)) - f(c(s)) = \int_\gamma df \le L(\gamma) \; ,$$

und im Falle $\dot\gamma = \operatorname{grad} f$ gilt Gleichheit. Also realisiert c Abstände und ist insbesondere ein geodätisches Segment.

Als nächstes sei $e_1, \dots, e_n$ ein paralleler orthonormaler Rahmen von TM längs c mit $\dot c = e_n = \operatorname{grad} f$. Wir setzen diesen Rahmen orthonormal auf eine kleine Umgebung U von c mit $e_n = \operatorname{grad} f$

fort. Da Integralkurven von $\operatorname{grad} f$ Geodätische sind, gilt $\nabla_{e_n} e_n$ auf ganz U. Da $e_n = \operatorname{grad} f$, gilt nach Definition der Hesse-Form

$$\operatorname{Hess}_f(e_i, e_j) = e_i(e_j(f)) - (\nabla_{e_i} e_j)(f) = e_i\langle e_n, e_j\rangle - \langle \nabla_{e_i} e_j, e_n\rangle = \langle \nabla_{e_i} e_n, e_j\rangle \ .$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \operatorname{ric}(\dot c, \dot c) &= \sum_{i=1}^n \langle R_{e_i, e_n} e_n, e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle -\nabla_{e_n} \nabla_{e_i} e_n - \nabla_{\nabla_{e_i} e_n} e_n, e_i\rangle \\ &= -e_n(\operatorname{div} \operatorname{grad} f) - \sum_{i,j=1}^n \langle \nabla_{e_i} e_n, e_j\rangle \langle \nabla_{e_j} e_n, e_i\rangle = (\Delta f \circ c)' - \|\operatorname{Hess}_f \circ c\|^2 \ . \end{aligned}$$

Für die letzte Abschätzung überlegen wir uns, dass längs c

$$\operatorname{Hess}_f(e_n, e_i) = \langle \nabla_{e_n} e_n, e_i\rangle = 0 \ .$$

Zur Hilbert-Schmidt-Norm gehört das Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij}$. Wir bezeichnen die Einschränkung der Riemannschen Metrik auf das Komplement von e_n mit $g' = g - \langle\,\cdot\,, e_n\rangle\langle e_n, \,\cdot\,\rangle$, so dass $\|g'\|^2 = n - 1$. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$-\Delta f = \operatorname{tr}(\operatorname{Hess}_f) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Hess}_f(e_i, e_i) = \langle \operatorname{Hess}_f, g'\rangle \le \|\operatorname{Hess}_f\| \cdot \sqrt{n-1} \ .$$

Zusammen mit der obigen Rechnung liefert das die Ungleichung im Lemma. □

5.18. Folgerung. *Es sei (M, g) eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\operatorname{ric} \ge 0$, *und es bezeichne $\rho_p = d(p, \,\cdot\,)$ den Abstand zu einem festen Punkt $p \in M$. Sei $C(p)$ der Schnittort von p, dann gilt auf $M \setminus (\{p\} \cup C(p))$, dass*

$$\Delta \rho_p \ge -\frac{n-1}{\rho_p} \ .$$

Vollständigkeit wird hier eigentlich nicht gebraucht. Allerdings gilt die Gleichung nur an Punkten $q \in M$, die durch eine minimale Geodätische mit p verbunden werden können, die noch ein Stückchen über p und q hinaus minimal ist, damit ρ_p in einer Umgebung von q glatt ist.

Beweis. Es sei $c\colon [0, T] \to M$ eine minimale Geodätische durch p, also eine Integralkurve von $\operatorname{grad} \rho_p$, und $\varphi = \Delta \rho_p \circ c$. Nach Lemma 5.17 gilt

$$\varphi' \ge \frac{\varphi^2}{n-1} \ .$$

Daraus folgt

$$-\left(\frac{1}{\varphi}\right)' = \frac{\varphi'}{\varphi^2} \ge \frac{1}{n-1} \ .$$

Man beachte, dass $\Delta \rho_p|_q \to -\infty$ für $q \to p$. Also erhalten wir die Behauptung, da

$$-\frac{1}{\Delta \rho_p} = -\frac{1}{\varphi} \ge \frac{\rho_p}{n-1} \ .$$ □

Für die Stützfunktionen $b_{p,s}$ aus (5.5) folgt daraus insbesondere

$$(\Delta b_{p,s})(q) = -(\Delta \rho_{\beta(s)})(q) \le \frac{n-1}{d(q, \beta(s))} \ . \tag{5.7}$$

Somit erfüllen diese Stützfunktionen für $s \to \infty$ die Bedingung aus dem Maximumprinzip 5.16. Für die Busemann-Funktionen b_+, b_- gilt somit $b_+ + b_- = 0$ auf ganz M.

5.19. FOLGERUNG. *Es sei* (M,g) *eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{ric} \geq 0$, γ *eine Gerade und* $b_t\colon M \to \mathbb{R}$ *die Funktion aus Proposition 5.13, dann gilt*

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{Hess}_{b_t}|_{\gamma(s)} = 0 \qquad \textit{für alle } s \in \mathbb{R} \, .$$

BEWEIS. Für $t \to \infty$ steigt $b_t(p)$ (schwach) monoton, und bleibt konstant, falls $p = \gamma(s)$. Insbesondere nimmt $b_t(p) - b_s(p)$ für $t > s$ entlang γ das Minimum an, somit ist $\mathrm{Hess}_{b_t - b_s}$ entlang von γ positiv semidefinit. Das bedeutet, auch $\mathrm{Hess}_{b_t}|_{\gamma(r)}$ steigt (schwach) monoton in t.

Sei jetzt $b_{+,t} = b_t$ und $b_{-,t}$ die analog definierte Funktion zur Geraden $t \mapsto \gamma(-t)$. Wie in Ungleichung (5.4) gilt $b_{+,t} + b_{-,s} \leq 0$ mit Gleichheit entlang γ, so dass $\mathrm{Hess}_{b_{+,t}+b_{-,s}}|_{\gamma(r)}$ negativ semidefinit ist. Da $\mathrm{Hess}_{b_{\pm,t}}(v,v)$ für $v \in T_{\gamma(r)}M$ monoton steigt, existiert der Grenzwert

$$L_\pm(r) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{Hess}_{b_{\pm,t}}|_{\gamma(r)} \, ,$$

und $L_+(r) + L_-(r)$ ist negativ semidefinit.

Nach Folgerung 5.18 gilt

$$\mathrm{tr}(L_\pm(r)) = -\lim_{t\to\infty} \Delta b_{\pm,t}|_{\gamma(r)} = \lim_{t\to\infty} \Delta\rho_{\gamma(\pm t)} \geq 0 \, .$$

Da $L_+(r) + L_-(r)$ negativ semidefinit ist, folgt $\mathrm{tr}(L_\pm(r)) = 0$ für alle r.

Wir nehmen jetzt an, dass $L_\pm(r) \neq 0$ für ein r. Für hinreichend große t auf einem kleinen Intervall I um r herum erfüllt die Hilbert-Schmidt-Norm von $\mathrm{Hess}_{b_{\pm,t}}$ entlang γ demnach

$$\left\| \mathrm{Hess}_{b_{\pm,t}}|_{\gamma(s)} \right\|^2 \geq \varepsilon > 0 \qquad \text{für alle } s \in I \, .$$

Nach Lemma 5.17 erhalten wir einen Widerspruch, da

$$\varepsilon \leq \left\| \mathrm{Hess}_{b_{\pm,t}}|_{\gamma(s)} \right\|^2 = (\Delta b_{\pm,t} \circ \gamma)'(s) - \mathrm{ric}(\dot\gamma,\dot\gamma) \leq (\Delta b_{\pm,t} \circ \gamma)'(s) \, ,$$

wohingegen $\Delta b_{\pm,t} \circ \gamma$ für $t \to \infty$ gegen die konstante Funktion 0 konvergiert. Also folgt $L_\pm(r) = 0$ für alle r. $\square$

BEWEIS des Satzes 5.11. Wir betrachten die Busemann-Funktionen $b_\pm$. Ihre Summe nimmt nach Ungleichung (5.4) entlang von γ ihr Maximum 0 an. Sei $p \in M$ beliebig, dann haben $b_\pm$ Stützfunktionen $b_{\pm,p,s}$ wie in (5.5). Ihre Summe $b_{+,p,s} + b_{-,p,s}$ erfüllt für $s \to \infty$ nach (5.7) die Bedingungen aus dem Maximumprinzip 5.16. Hieraus folgt $b_+ + b_- = 0$ auf ganz M, und für alle $q \in M$ und alle s_+, $s_- > 0$ gilt

$$b_{+,p,s_+}(q) \leq b_+(q) = -b_-(q) \leq -b_{-,p,s_-}(q) \, , \tag{5.8}$$

und zumindest im Punkt $q = p$ gilt Gleichheit.

Da b_{+,p,s_+} und b_{-,p,s_-} beide differenzierbar sind, folgt aus der obigen Ungleichung, dass auch $b_\pm$ an der Stelle p differenzierbar sind mit Ableitung

$$d_p b_{+,p,s_+} = d_p b_+ = -d_p b_- = -d_p b_{-,p,s_-}$$

Da $\mathrm{grad}_p\, b_{\pm,p,s_\pm}$ gerade der Anfangsvektor $v_\pm$ der Asymptoten $\beta_\pm$ in (5.5) ist, setzen sich die beiden Asymptoten zu einer Geodätischen

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_+(t) & \text{für } t \geq 0 \text{, und} \\ \beta_-(-t) & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

zusammen. Diese Geodätische ist eine Integralkurve von $\mathrm{grad}\, b_+ = -\mathrm{grad}\, b_-$ und daher wieder eine Gerade, siehe Lemma 5.17.

Nach Folgerung 5.19 und (5.8) haben sowohl b_+ als auch $b_- = -b_+$ Stützfunktionen mit zweiter Ableitung beliebig nahe bei 0. Es folgt, dass $(b_+ \circ c)'' = 0$ für beliebige Geodätische c in M gilt, und somit $\mathrm{Hess}_{b_+} = 0$. Ähnlich wie im Beweis von 5.17 wählen wir einen lokalen orthonormalen Rahmen mit $e_n = \operatorname{grad} b_+$ und schließen, dass

$$0 = \mathrm{Hess}_{b_+}(e_i, e_j) = e_i\langle e_j, e_n\rangle - \langle \nabla_{e_i} e_j, e_n\rangle = \langle e_j, \nabla_{e_i} e_n\rangle ,$$

somit ist $\operatorname{grad} b_+$ ein paralleles Einheitsvektorfeld. Der Fluss von $\operatorname{grad} b_+$ liefert daher Isometrien zwischen den Untermannigfaltigkeiten $b_+^{-1}(t)$ für alle t, und M ist isometrische zum Produkt $\mathbb{R} \times b_+^{-1}(0)$. □

Wir beschließen den Abschnitt mit einigen Folgerungen aus dem Spaltungssatz. Wir beginnen mit einer vereinfachten Version der de Rham-Zerlegung aus Satz 5.9, bei der wir nicht mehr voraussetzen müssen, dass M einfach zusammenhängend ist.

5.20. Folgerung. *Jede vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit M mit* $\mathrm{ric} \geq 0$ *besitzt eine eindeutige Zerlegung als Riemannsches Produkt der Form $\mathbb{R}^k \times M'$, wobei $\mathbb{R}^k$ Euklidisch ist und M' keine Gerade enthält.*

Jede Isometrie F von M respektiert diese Zerlegung, das heißt, es gibt Isometrien F_0 von $\mathbb{R}^k$ und F' von M', so dass $F = F_0 \times F'$.

Beweis. Übung □

5.21. Bemerkung. Es sei M eine kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\mathrm{ric} \geq 0$. Falls die universelle Überlagerung von M irreduzibel ist, oder falls $\mathrm{ric} > 0$ an mindestens einem Punkt von M gilt, ist $\pi_1(M)$ endlich.

Denn wenn wir annehmen, dass $\pi_1(M)$ nicht endlich ist, dann ist $\tilde{M}$ nicht kompakt, also finden wir minimierende, nach Bogenlänge parametrisierte geodätische Strecken beliebiger Länge, etwa $c_n \colon [-n, n] \to \tilde{M}$.

Da M kompakt ist, hat $\tilde{M}$ einen kompakten Fundamentalbereich $F \subset \tilde{M}$ für die $\pi_1(M)$-Wirkung. Mit einem Element von $\pi_1(M)$ verschieben wir den Mittelpunkt jeder Strecke $c_n(0)$ in diesen Fundamentalbereich. Dann existiert eine Teilfolge, für die $\dot{c}_n(0)$ gegen einen Einheitsvektor v konvergiert, und die Geodätische c mit Startvektor v ist eine Gerade. Aber dann ist weder $\tilde{M}$ irreduzibel, noch gilt iregndwo $\mathrm{ric} > 0$.

Die letzte Folgerung beschäftigt sich mit nicht kompakten, vollständigen Mannigfaltigkeiten.

5.22. Definition. Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Ein *Ende* e von M ordnet jeder kompakten Teilmenge $K \subset M$ eine Zusammenhangskomponente $e(K)$ von $M \setminus K$ zu, dass $e(L) \subset e(K)$ falls $K \subset L$. Eine nicht kompakte zusammenhängende Mannigfaltigkeit heißt *zusammenhängend im Unendlichen,* wenn sie nur ein Ende hat.

Jede nicht kompakte Mannigfaltigkeit hat mindestens ein Ende.

5.23. Folgerung. *Es sei M eine vollständige, irreduzible Mannigfaltigkeit mit* $\mathrm{ric} \geq 0$*, dann ist M entweder kompakt oder zusammenhängend im Unendlichen.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es mindestens zwei Enden e_1, e_2 gibt. Als Kompakta K_n wählen wir metrische Bälle vom Radius n um einen festen Punkt $p_0 \in M$. Dann existiert ein n_0, so dass $e_1(K_n) \neq e_2(K_n)$ für $n = n_0$, und somit auch für alle $n \geq n_0$.

Wir wählen Folgen $p_n \in e_1(K_n)$ und $q_n \in e_2(K_n)$, dann folgt $d(p_n, q_n) \geq 2(n - n_0)$. Sei c_n eine minimierende, nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische von p_n nach q_n, dann trifft c_n das Kompaktum K_{n_0}. Wir fixieren t_n so, dass $c_n(t_n) \in K_{n_0}$. Für eine Teilfolge konvergiert $\dot{c}_n(t_n)$ gegen einen Einheitsvektor v, und die zugehörige Geodätische ist eine Gerade.

Aber dann spaltet M einen Euklidischen Faktor ab, ist also nicht irreduzibel. □

Wir wollen wenigstens einen Bezug zur Konstruktion von Mannigfaltigkeiten mit spezieller Holonomie herstellen.

5.24. Bemerkung. Es gibt Konstruktionen kompakter Mannigfaltigkeiten mit spezieller Holonomie mit $\mathrm{ric} = 0$, bei denen man zwei vollständige Mannigfaltigkeiten M_1, M_2 zusammenklebt, deren Enden jeweils asymptotisch zu $N \times [0, \infty)$ sind. Dabei muss man die Metriken auf M_1 und M_2 vor dem Kleben leicht deformieren, damit sie zusammenpassen, und nach dem Verkleben zeigen, dass es in der Nähe eine Metrik mit der gesuchten Holonomie gibt. Das geht umso leichter, je länger das zylindrische Stück ist, entlang dessen geklebt wird.

Die obige Folgerung zeigt, dass es keine irreduziblen Mannigfaltigkeiten mit zwei asymptotisch zylindrischen Enden und $\mathrm{ric} = 0$ geben kann. Denn jede solche Mannigfaltigkeit enthielte eine Gerade, und wäre damit isometrisch zu einem Zylinder $N \times \mathbb{R}$. Durch das Zwischenschalten eines solchen Zylinders kann man keine neuen Beispiele erhalten.

5.3. Clifford-Algebren und Spin-Gruppen

Es gibt zwei Gründe, um an dieser Stelle Spinoren einzuführen. Zum einen lässt sich die Holonomiegruppe $\mathrm{Spin}(7)$ mit ihrer acht-dimensionalen Darstellung so am besten erklären. Auch die Lie-Gruppe G_2 lernen wir auf diese Weise kennen. Zum anderen kann man mit Hilfe von Spinoren am einfachsten verstehen, warum manche Holonomien implizieren, dass $\mathrm{ric} = 0$. Ein Beispiel dafür sind Calabi-Yau-Metriken—die holomorphe Volumenform lässt sich als paralleler Spinor interpretieren. Tatsächlich kennt man bis heute nur kompakte, Ricci-flache Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit spezieller Holonomie. Und in niedrigen Dimensionen kann man zeigen, dass es keine weiteren Beispiele geben kann.

5.25. Definition. Es sei V ein endlich-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Die *Clifford-Algebra* von V ist die von den Elementen von V erzeugte assoziative $\mathbb{R}$-Algebra $C\ell(V)$ mit Eins 1 mit der Relation

$$v^2 = -\|v\|^2 \qquad \text{für alle } v \in V\,. \tag{1}$$

Die Komplexifizierung von $C\ell(V)$ bezeichnen wir mit $\mathbb{C}\ell(V) = C\ell(V) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Die *Pin-Gruppe* $\mathrm{Pin}(V)$ ist die von den Einheitsvektoren erzeugte Untergruppe der Einheitengruppe von $C\ell(V)$. Die *Spin-Gruppe* $\mathrm{Spin}(V)$ ist die von Elementen der Form vw mit $\|v\| = \|w\| = 1$ erzeugte Untergruppe der Einheitengruppe von $C\ell(V)$. Falls V der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt ist, schreiben wir $\mathrm{Spin}(n) \subset \mathrm{Pin}(n) \subset C\ell_n$.

Wir definieren einen Homomorphismus $\tau\colon \mathrm{Pin}(V) \to O(V)$ durch

$$g(v) = \begin{cases} g \cdot v \cdot g^{-1} \in V \subset C\ell(V) & \text{falls } g \in \mathrm{Spin}(V), \text{ und} \\ -g \cdot v \cdot g^{-1} \in V \subset C\ell(V) & \text{falls } g \in \mathrm{Pin}(V) \setminus \mathrm{Spin}(V)\,. \end{cases} \tag{2}$$

5.26. Bemerkung. Hier ist einiges zu erklären und zu überprüfen.

(1) Die äußere Algebra von V^* kann man als die von den Elementen von V^* erzeugte $\mathbb{R}$-Algebra mit der Relation $\langle v, \cdot\,\rangle^2 = 0$ auffassen. Die Clifford-Algebra $C\ell(V)$ ist eine Deformation der äußeren Algebra von V^*. Da das Skalarprodukt wesentlich in die Konstruktion eingeht, benutzen wir es, um V und V^* vermöge $v \mapsto \langle v, \cdot\,\rangle$ stillschweigend zu identifizieren.

Als Vektorraum ist $C\ell(V)$ zu $\Lambda^\bullet V^*$ isomorph, und Linksmultiplikation mit einem Element $v \in V$ wird gegeben durch

$$v \cdot \alpha = (\langle v, \cdot\,\rangle \wedge - \iota_v)\alpha$$

für alle $v \in V$ und alle $\alpha \in \Lambda^\bullet V^*$. Wir nennen $v\,\cdot$ die *Clifford-Multiplikation* mit v. Der Isomorphismus selbst ist $O(V)$-äquivariant und wird erzeugt von

$$C\ell(V) \ni v_1 \cdots v_k \longmapsto v_1 \cdots v_k \cdot 1 \in \Lambda^\bullet V^*$$

für $v_1, \dots, v_k \in V$, mit $1 \in \Lambda^0 V^* \cong \mathbb{R}$.

(2) Aus der obigen Formel folgt, dass Clifford-Multiplikation (im Gegensatz zur äußeren Multiplikation) die Graduierung der äußeren Algebra nicht respektiert. Wir haben aber immer noch eine $\mathbb{Z}/2$-Graduierung

$$C\ell(V) = C\ell^{\mathrm{ev}}(V) \oplus C\ell^{odd}(V) \qquad \text{mit} \qquad C\ell^{\mathrm{ev}}(V) \cong \Lambda^{\mathrm{ev}} V^* \qquad \text{und} \qquad C\ell^{\mathrm{odd}}(V) \cong \Lambda^{\mathrm{odd}} V^* \;.$$

Das heißt, das Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Elemente ist gerade und das Produkt eines geraden und eines ungeraden Elementes ist ungerade. Multiplikation mit einem Vektor $0 \neq v \in V$ ist ein Isomorphismus zwischen $C\ell^{\mathrm{ev}}(V)$ und $C\ell^{\mathrm{odd}}(V)$. Also haben beide Unterräume Dimension $2^{\dim V - 1}$ falls $\dim V \geq 1$.

(3) Wir wollen überprüfen, dass $\mathrm{Pin}(V)$ und $\mathrm{Spin}(V)$ Gruppen sind. Da $C\ell(V)$ eine assoziative $\mathbb{R}$-Algebra ist, ist auch Multiplikation in $\mathrm{Spin}(V) \subset \mathrm{Pin}(V) \subset C\ell(V)^\times$ assoziativ. Als neutrales Element fungiert $1 \in \Lambda^\bullet V^* \cong C\ell(V)$. Schließlich sind alle Elemente der Form v und vw mit $\|v\| = \|w\|$ invertierbar mit $v^{-1} = -v$ und $(vw)^{-1} = wv$, denn aus (1) folgt

$$-v \cdot v = \|v\|^2 = 1 \;.$$

(4) Aus Definition 5.25 (2) folgt mit dem Cosinus-Satz

$$\begin{aligned} vw + wv &= (v+w)^2 - v^2 - w^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \|v+w\|^2 \\ &= -2 \cos \measuredangle(v,w)\, \|v\|\, \|w\| = -2\langle v, w\rangle \qquad \text{für alle } v, w \in V \;. \end{aligned}$$

In der Literatur wird diese Bedingung gern als definierende Relation benutzt.

5.27. Beispiel. Wir können Clifford-Algebren und Spin-Gruppen in kleinen Dimensionen explizit bestimmen. Es gilt (Übung)

$$\begin{aligned} &C\ell_0 = \mathbb{R}\;, && C\ell_0^{\mathrm{ev}} = \mathbb{R}\;, && \\ &C\ell_1 \cong \mathbb{C}\;, && C\ell_1^{\mathrm{ev}} = \mathbb{R}\;, && \mathrm{Spin}(1) = \{1, -1\}\;, \\ &C\ell_2 \cong \mathbb{H}\;, && C\ell_2^{\mathrm{ev}} \cong \mathbb{C}\;, && \mathrm{Spin}(2) \cong S^1\;, \\ &C\ell_3 \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}\;, && C\ell_3^{\mathrm{ev}} \cong \mathbb{H}\;, && \mathrm{Spin}(3) \cong SU(2) \cong S^3 \subset \mathbb{H}\;. \end{aligned}$$

Für größere n ist $\mathrm{Spin}(n)$ nicht mehr zu einer Sphäre diffeomorph. Wir haben immerhin noch Isomorphismen

$$\mathrm{Spin}(4) \cong SU(2) \times SU(2) \cong S^3 \times S^3\;, \qquad \mathrm{Spin}(5) \cong Sp(2)\;, \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Spin}(6) \cong SU(4)\;.$$

Für noch $n \geq 7$ ist $\mathrm{Spin}(n)$ zu keiner anderen „klassischen" Lie-Gruppe isomorph.

5.28. Proposition. *Die Gruppen* $\mathrm{Pin}(V)$ *und* $\mathrm{Spin}(V)$ *sind Lie-Gruppen, und die Abbildungen* $\tau\colon \mathrm{Pin}(V) \to O(V)$ *und* $\tau\colon \mathrm{Spin}(V) \to SO(V)$ *sind zweifache Überlagerungen und Gruppenhomomorphismen mit Kern* $\{1, -1\}$.

Für $\dim V \geq 2$ *ist* $\mathrm{Spin}(n)$ *zusammenhängend, und für* $\dim V \geq 3$ *auch einfach zusammenhängend. Insbesondere ist* $\tau\colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ *eine universelle Überlagerung für* $n \geq 3$.

Beweis. Wir betrachten die Wirkung von $g = v \in V$ mit $\|v\| = 1$ auf $V \cong \Lambda^1 V^* \subset \Lambda^\bullet V^* \cong C\ell(V)$. Für $u \in V$ berechnen wir mit Bemerkung 5.26 (4) jetzt

$$g(u) = -v \cdot u \cdot (-v) = vuv = -uv^2 - 2v\langle v, u\rangle = u - 2v\langle v, u\rangle \in V$$

Dieser Ausdruck beschreibt gerade eine Spiegelung von u an der zu v senkrechten Hyperebene in V.

Wegen Definition 5.25 (2) ist $\tau\colon \mathrm{Pin}(V) \to O(V)$ ein Gruppenhomomorphismus, insbesondere ist Komposition mit den Vorzeichen in obiger Formel verträglich, denn Elemente von $\mathrm{Spin}(V)$ beziehungsweise $\mathrm{Pin}(V) \setminus \mathrm{Spin}(V)$ sind Produkte einer geraden beziehungsweise ungeraden Anzahl von Einheitsvektoren. Da $O(V)$ von Spiegelungen erzeugt wird, sehen wir, dass $\tau\colon \mathrm{Pin}(V) \to O(V)$ surjektiv ist.

Seien jetzt $v \neq w$ Einheitsvektoren, dann wirkt $vw \in \mathrm{Spin}(V)$ als Hintereinanderschaltung zweier Spiegelungen, mithin als Drehung der von v und w aufgespannten Ebene in V um den doppelten gerichteten Winkel $\measuredangle(w, v)$. Da $SO(V)$ von solchen Drehungen erzeugt wird, ist auch $\tau\colon \mathrm{Spin}(V) \to SO(V)$ surjektiv.

Zum Schluss schreiben wir Elemente der Gruppe $\mathrm{Pin}(V)$ in der Form

$$g = \sum_{A \subset \{1,\dots,n\}} g_A \prod_{i \in A} e_i \in C\ell(V) ,$$

wobei $(e_1, \dots, e_n)$ eine Orthonormalbasis von V sei. Denn dann bilden die Produkte aus verschiedenen Elementen der Basis gerade eine Basis der äußeren Algebra $\Lambda^\bullet V$, also auch von $C\ell(V)$ nach Bemerkung 5.26 (1). Es bezeichne deg die Anzahl der Faktoren in einem Monom, dann wirkt $(-1)^{\deg}$ auf $C\ell(V)$. Es gilt $g \in \ker \tau$ genau dann, wenn $g(e_j) = e_j$ für alle j gilt. Da

$$g(e_j) = ((-1)^{\deg} g) \cdot e_j \cdot g^{-1} = e_j + \bigl(((-1)^{\deg} g) \cdot e_j - e_j \cdot g\bigr) \cdot g^{-1}$$

und g^{-1} invertierbar ist, müssen wir diejenigen Elemente von $\mathrm{Pin}(V)$ bestimmen, für die der Ausdruck in der Klammer verschwindet.

Wir gehen Monom für Monom vor. Es sei $A = i_1, \dots, i_k$. Mit Definition 5.25 (1) und Bemerkung 5.26 (1) erhalten wir induktiv

$$\begin{aligned} e_j \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_k} &= -2\delta_{j,i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} - e_{i_1} \cdot e_j \cdot e_{i_2} \cdots e_{i_k} = \dots \\ &= \sum_{b=1}^{k} 2(-1)^b \delta_{j,i_b}\, e_{i_1} \cdots \widehat{e_{i_b}} \cdots e_{i_k} + (-1)^k e_{i_1} \cdots e_{i_k} \cdot e_j . \end{aligned}$$

Mithin verschwindet $(-1)^k e_{i_1} \cdots e_{i_k} \cdot e_j - e_j \cdot e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ genau dann, wenn $j \notin A$. Ansonsten erhalten wir ein Vielfaches vom Monom zu $A \setminus \{j\}$, insbesondere können sich die Beiträge zweier verschiedener Monome zu $((-1)^{\deg} g) \cdot e_j - e_j \cdot g$ nicht wegheben. Somit gilt $g \in \ker \tau$ genau dann, wenn $g_A = 0$ für alle $A \neq \emptyset$, mithin folgt $g \in \mathbb{R} = \Lambda^0 V^* \subset C\ell(V)$.

Wir können schließlich zeigen, dass Clifford-Multiplikation die Euklidische Norm erhält, bezüglich der die obige Basis von $C\ell(V)$ eine Orthonormalbasis bildet. Dann sieht man, dass $\mathrm{Pin}(V) \cap \mathbb{R} = \{1, -1\}$. Da $O(V)$ und $SO(V)$ Lie-Gruppen sind, ist ein surjektiver Gruppenhomorphismus mit endlichem Kern automatisch eine Überlagerung, und $\mathrm{Pin}(V)$ und $\mathrm{Spin}(V)$ sind ebenfalls Lie-Gruppen.

Die letzten Behauptungen beweisen wir induktiv. Sie sind richtig für $\dim V = 2, 3$ nach Beispiel 5.27. Sei $\mathrm{Spin}(n-1)$ für $n \geq 4$ bereits als zusammenhängend und einfach zusammenhängend bekannt, dann betrachten wir die eigentliche Submersion $\mathrm{Spin}(n) \to S^{n-1}$ mit $g \mapsto g(e_n) = g \cdot e_n \cdot g^{-1}$. Die Isotropiegruppe ist $\mathrm{Spin}(n-1)$; das folgt aus einer Rechnung ähnlich der obigen. Danach verwenden wir die lange exakte Homotopiesequenz und erhalten

$$\begin{aligned} \cdots \longrightarrow \underbrace{\pi_1(\mathrm{Spin}(n-1))}_{=0} \longrightarrow \pi_1(\mathrm{Spin}(n)) \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^{n-1})}_{=0} \longrightarrow \\ \longrightarrow \underbrace{\pi_0(\mathrm{Spin}(n-1))}_{=\{*\}} \longrightarrow \pi_0(\mathrm{Spin}(n)) \longrightarrow \underbrace{\pi_0(S^{n-1})}_{=\{*\}} . \end{aligned}$$

$\square$

Wir brauchen auch Moduln, auf denen die Clifford-Algebra wirken kann. Hier ist es wesentlich einfacher, die komplexifizierte Clifford-Algebra zu betrachten. Später geben wir ohne Beweis auch Moduln für die reellen Clifford-Algebren an.

5.29. Proposition und Definition. *Es sei V ein n-dimensionaler orientierter Euklidischer Vektorraum, und es sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine orientierte Orthonormalbasis von V. Dann sind das* reelle *und das* komplexe Clifford-Volumenelement *durch*

$$\omega_{\mathbb{R}} = e_1 \cdots e_n \in C\ell(V) \qquad \textit{und} \qquad \omega_{\mathbb{C}} = i^{\frac{n(n+1)}{2}} \omega_{\mathbb{R}} \in \mathbb{C}\ell(V) .$$

unabhängig von der gewählten Orthonormalbasis, und es gilt

$$\omega_{\mathbb{R}}^2 = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad \textit{und} \qquad \omega_{\mathbb{C}}^2 = 1 .$$

Falls n ungerade ist, liegen $\omega_{\mathbb{R}}$ und $\omega_{\mathbb{C}}$ im Zentrum der Clifford-Algebra. Falls n gerade ist, antikommutieren $\omega_{\mathbb{R}}$ und $\omega_{\mathbb{C}}$ mit $C\ell^{\mathrm{odd}}(V)$ und kommutieren mit $C\ell^{\mathrm{ev}}(V)$.

Beweis. Unter dem Vektorraum-Isomorphismus $C\ell(V) \cong \Lambda^\bullet V$ aus Bemerkung 5.26 (1) wird $\omega_{\mathbb{R}}$ die orientierte Volumenform der Norm 1 in $\Lambda^n V^*$ abgebildet. Da dieser Isomorphismus $O(V)$-äquivariant und die Volumenform $SO(V)$-invariant ist, liefern alle orientierten Orthonormalbasen das gleiche Element.

Um das Quadrat zu berechnen, sortieren wir zunächst die Vektoren und nutzen dann $e_i \cdot e_i = -1$ aus. Wir erhalten

$$\omega_{\mathbb{R}}^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} e_1 \cdot e_1 \cdots e_n \cdot e_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \in C\ell(V) .$$

Sei schließlich $v \in V$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $v = \lambda e_i$ für ein i und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann kommutiert v mit dem Faktor e_i in $\omega_{\mathbb{R}}$ und antikommutiert mit allen anderen. Hieraus folgt die letzte Behauptung, und ihr Analogon für $\omega_{\mathbb{C}}$. □

5.30. Proposition. *Für alle n gibt es Isomorphismen*

$$\mathbb{C}\ell_{2n} \cong M_{2^n}(\mathbb{C}) \qquad \textit{und} \qquad \mathbb{C}\ell_{2n+1} \cong M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}) ,$$

die Vektoren $v \in \mathbb{R}^{2n}$ $(\mathbb{R}^{2n+1})$ auf (Paare von) schiefadjungierte(n) Matrizen abbilden. Insbesondere hat $\mathbb{C}\ell_{2n}$ bis auf Isomorphie genau einen irreduziblen Modul $\mathbb{C}^{2^n}$, und $\mathbb{C}\ell_{2n+1}$ hat zwei, wobei $\omega_{\mathbb{C}}$ auf dem einen durch 1 und auf dem anderen durch -1 wirkt.

Die zweite Aussage folgt daraus, dass die Matrix-Algebra $M_k(\mathbb{C})$ bis auf Isomorphie genau einen irreduziblen Modul hat, nämlich $\mathbb{C}^k$.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über n. Nach Konstruktion gibt $\mathbb{C}\ell_0 = \mathbb{C} \cong M_{2^0}(\mathbb{C})$. Wir schreiben ω_k für das komplexe Volumenelement von $\mathbb{C}\ell_k$.

Sei ein Isomorphismus $\Phi_{2n} \colon \mathbb{C}\ell_{2n} \cong M_{2^n}(\mathbb{C})$ bereits konstruiert. Die Algebra $\mathbb{C}\ell_{2n+1}$ wird von $\mathbb{C}\ell_{2n}$ und ω_{2n+1} erzeugt, und ω_{2n+1} hat Quadrat 1 und vertauscht mit allen Elementen von $\mathbb{C}\ell_{2n}$. Wir erhalten den gesuchten Algebren-Isomorphismus

$$\begin{aligned} \Phi_{2n+1} \colon \mathbb{C}\ell_{2n+1} \xrightarrow{\cong} M_{2^n}(\mathbb{C}) \oplus M_{2^n}(\mathbb{C}) \qquad &\text{mit} \qquad \Phi_{2n+1}(\omega_{2n+1}) = (1, -1) \\ \text{und} \qquad \Phi_{2n+1}(a) = (a, a) \qquad &\text{für alle } a \in \mathbb{C}\ell_{2n} . \end{aligned}$$

Es seien $\Phi_{2n+1}^{\pm}$ die beiden Komponenten von Φ_{2n+1}. Vektoren $v \in \mathbb{R}^{2n}$ werden auf $(\Phi_{2n}(v), \Phi_{2n}(v))$ von schiefadjungierten Matrizen abgebildet. Für den neuen Einheitsvektor erhalten wir hingegen

$$\Phi_{2n+1}(e_{2n+1}) = \Phi_{2n+1}(-i\omega_{2n} \cdot i\omega_{2n} \cdot e_{2n+1}) = \Phi_{2n+1}(-i\omega_{2n} \cdot \omega_{2n+1}) = \big(-i\Phi_{2n}(\omega_{2n}), i\Phi_{2n}(\omega_{2n})\big) ,$$

und wir zeigen unten induktiv, dass $\Phi_{2n}(\omega_{2n})$ selbstadjungiert ist.

Analog dazu wird $\mathbb{C}\ell_{2n+2}$ von $\mathbb{C}\ell_{2n+1}$ und dem Element e_{2n+2} erzeugt. Dieses Element antikommutiert mit ω_{2n+1} und mit allen ungeraden Elementen von $\mathbb{C}\ell_{2n} \subset \mathbb{C}\ell_{2n+1}$. Da $e_{2n+2}^2 = -1 = -\omega_{2n}^2$, erweitern wir den obigen Algebren-Isomorphismus zu

$$\Phi_{2n+2}\colon \mathbb{C}\ell_{2n+2} \xrightarrow{\cong} M_{2^{n+1}}(\mathbb{C}) \qquad \text{mit} \qquad \Phi_{2n+2}(e_{2n+2}) = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_{2n}(i\omega_{2n}) \\ \Phi_{2n}(i\omega_{2n}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \qquad \Phi_{2n+2}(a) = \begin{pmatrix} \Phi^+_{2n+1}(a) & 0 \\ 0 & \Phi^-_{2n+1}(a) \end{pmatrix} \qquad \text{für alle } a \in \mathbb{C}\ell_{2n+1} .$$

Man sieht leicht, dass die Bilder von Vektoren $v \in \mathbb{R}^{2n+2} \subset \mathbb{C}\ell_{2n+2}$ schiefadjungierte Matrizen sind. Und da $\omega_{2n+2} = \omega_{2n+1} \cdot e_{2n+2}$, erhalten wir eine selbstadjungierte Matrix

$$\Phi_{2n+2}(\omega_{2n+2}) = \begin{pmatrix} 0 & i\Phi_{2n}(\omega_{2n}) \\ -i\Phi_{2n}(\omega_{2n}) & 0 \end{pmatrix} . \qquad \square$$

Wir betrachten Φ_{2n} und Φ_{2n+1} als irreduzible Darstellungen der jeweiligen Clifford-Algebra auf Räumen $\Sigma_{2n} \cong \Sigma^\pm_{2n+1} \cong \mathbb{C}^{2^n}$. Wir schreiben nach wie vor ω_k für das komplexe Volumenelement von $\mathbb{C}\ell_k$. Es sei $\tau\colon \mathrm{Spin}(k) \to SO(k)$ die Projektion aus Proposition 5.25. Wir können τ als Darstellung von $\mathrm{Spin}(k)$ auf $\mathbb{R}^k$ auffassen und schreiben $\tau_g\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ für alle $g \in \mathrm{Spin}(k)$.

5.31. Proposition und Definition. *Die Einschränkung $\Phi_{2n}|_{\mathrm{Spin}(2n)}$ zerfällt in zwei nicht isomorphe irreduzible 2^{n-1}-dimensionale hermitesche Darstellungen $\sigma^\pm_{2n}\colon \mathrm{Spin}(2n) \to \mathrm{End}(\Sigma^\pm_{2n})$, die* Spinor-Darstellungen, *wobei $\Sigma^\pm_{2n} \subset \Sigma_{2n}$ der ± 1-Eigenraum von $\Phi_{2n}(\omega_{2n})$ sei. Für alle $v \in \mathbb{R}^{2n}$, alle $g \in \mathrm{Spin}(2n)$ und alle $s \in \Sigma^\pm_{2n}$ gilt*

$$\sigma_g(v \cdot s) = \tau_g(v) \cdot \sigma_g(s) \in \Sigma^\mp_{2n} .$$

Die Einschränkungen $\Phi^\pm_{2n+1}|_{\mathrm{Spin}(2n+1)}$ sind irreduzibel und zueinander isomorph, und wir erhalten die hermitesche Spinor-Darstellung $\sigma_{2n+1}\colon \mathrm{Spin}(2n+1) \to \mathrm{End}(\Sigma_{2n+1})$. *Für alle $v \in \mathbb{R}^{2n+1}$, alle $g \in \mathrm{Spin}(2n+1)$ und alle $s \in \Sigma^\pm_{2n+1}$ gilt*

$$\sigma_g(v \cdot s) = \tau_g(v) \cdot \sigma_g(s) \in \Sigma^\pm_{2n+1} .$$

Man beachte, dass die Aufspaltung $\Sigma_{2n} = \Sigma^+_{2n} \oplus \Sigma^-_{2n}$ nicht der Aufspaltung von $M_{2^n}(\mathbb{C})$ in Blockmatrizen im Beweis von Proposition 5.30 entspricht.

Beweis. Da $\mathrm{Spin}(2n) \subset C\ell^{\mathrm{ev}}_{2n} \subset \mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}_{2n}$, kommutiert $\Phi_{2n}|_{\mathrm{Spin}(2n)}$ mit ω_{2n}. Insbesondere bildet $\mathrm{Spin}(2n)$ die Eigenräume von ω_{2n} auf sich ab. Da $\omega_{2n}^2 = 1$, sind ± 1 die einzigen Eigenwerte. Die zugehörigen Eigenräume haben die gleiche Dimension, da Clifford-Multiplikation mit einem Einheitsvektor invertierbar ist und mit ω_{2n} antikommutiert, und somit einen Isomorphismus zwischen den beiden Eigenräumen liefert.

Als Teilmenge von $\mathbb{C}\ell_{2n}$ spannt $\mathrm{Spin}(2n)$ die gesamte Unteralgebra $\mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}_{2n}$ auf. Man kann zeigen, dass $\mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}_{2n}$ zu $\mathbb{C}\ell_{2n-1}$ isomorph ist (Übung). Die Spinordarstellungen $\Sigma^\pm_{2n}$ lassen sich zu zwei Darstellungen von $\mathbb{C}\ell_{2n-1}$ fortsetzen, die somit zu $\Sigma^\pm_{2n-1}$ isomorph sind.

Aus der Konstruktion im Beweis von 5.30 sehen wir, dass $\mathbb{C}\ell^{\mathrm{ev}}_{2n+1}$ auf Σ^+_{2n+1} und Σ^-_{2n+1} gleich wirkt. Daher sind die Einschränkungen auf $\mathrm{Spin}(2n+1)$ isomorph, und mit einem ähnlichen Argument wie oben auch irreduzibel.

Mit den Definitionen von σ und τ erhalten wir in beiden Fällen

$$\sigma_g(v \cdot s) = g \cdot v \cdot s = g \cdot v \cdot g^{-1} \cdot g \cdot s = \tau_g(v) \cdot \sigma_g(s) .$$

Die Lie-Algebra $\mathfrak{spin}(k)$ wird von Elementen der Form $v \cdot w$ mit $v \perp w$ aufgespannt, und es gilt

$$\Phi_k(v \cdot w)^* = -\Phi_k(w \cdot v)^* = -\Phi_k(v)^* \cdot \Phi_k(w)^* = -\Phi_k(v) \cdot \Phi_k(w) .$$

Da die Lie-Algebra auf schiefadjungierte Matrizen abgebildet wird und die Spin-Gruppen (für $k \geq 2$) zusammenhängend sind, sind die Spinor-Darstellungen hermitesch. $\square$

Man beachte hierbei, dass sich außer den Spinordarstellungen keine anderen irreduziblen Darstellungen von $\mathrm{Spin}(k)$ auf $\mathbb{C}\ell_k^{\mathrm{ev}}$ fortsetzen lassen.

5.32. Bemerkung. Für geometrische Anwendungen möchte man gern auch die reellen irreduziblen Darstellungen der reellen Clifford-Algebren kennen. Diese lassen sich mit ähnlichen Methoden wie oben konstruieren, allerdings gibt es mehr Einzelfälle, die wir daher nur tabellarisch angegeben.

$$\begin{aligned}
&C\ell_{8n} \cong M_{2^{4n}}(\mathbb{R}) , && C\ell_{8n+1} \cong M_{2^{4n}}(\mathbb{C}) , && C\ell_{8n+2} \cong M_{2^{4n}}(\mathbb{H}) , && C\ell_{8n+3} \cong M_{2^{4n}}(\mathbb{H})^{\oplus 2} ,\\
&C\ell_{8n+4} \cong M_{2^{4n+1}}(\mathbb{H}) , && C\ell_{8n+5} \cong M_{2^{4n+2}}(\mathbb{C}) , && C\ell_{8n+6} \cong M_{2^{4n+3}}(\mathbb{R}) , && C\ell_{8n+7} \cong M_{2^{4n+3}}(\mathbb{R})^{\oplus 2} ,
\end{aligned}$$

siehe auch Beispiel 5.27. Hierbei sei $A^{\oplus 2} = A \oplus A$. Die Tricks aus dem Beweis von Proposition 5.30 lassen sich im reellen nur anwenden, wenn $\omega_{2k}^2 = -1$ und $\omega_{2k+1}^2 = 1$ gilt, das heißt, wenn k ungerade ist. Für gerade k brauchen wir andere Argumente, was man daran erkennen kann, dass wir Matrizen über verschiedenen Grund- (Schief-) Körpern betrachten müssen.

Nach wie vor ist $C\ell_k^{\mathrm{ev}}$ zu $C\ell_{k-1}$ isomorph, so dass wir zwei nicht isomorphe reelle Spinor-Darstellungen von $\mathrm{Spin}(4k)$ für alle k erhalten, während die anderen Spinorgruppen jeweils nur eine irreduzible Spinor-Darstellung besitzen.

5.33. Beispiel. Wir betrachten die Oktonionen $\mathbb{O}$, die wir in den Übungen kennengelernt haben.

(1) Wir identifizieren $\mathbb{R}^7$ mit dem Imaginärteil $\operatorname{Im}\mathbb{O}$. Die Oktonionenmultiplikation mit v beziehungsweise $-v$ induziert je eine Wirkung der Clifford-Algebra $C\ell_7$ auf $\mathbb{O}$. Da $\mathbb{O}$ nicht assoziativ ist, gibt es zu $v, w \in \operatorname{Im}\mathbb{O}$ im Allgemeinen kein Element $u \in \mathbb{O}$, so dass $v\cdot(w\cdot x) = u \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{O}$ gilt. Das erklärt, wieso Oktonionenmultiplikation die Wirkung einer weit größeren Algebra auf $\mathbb{O}$ induzieren kann.

(2) Die Gruppe $\mathrm{Spin}(7)$ wirkt auf $\mathbb{O}$, und wir definieren eine Untergruppe

$$G_2 = \bigl\{\, g \in \mathrm{Spin}(7) \bigm| \sigma_g(1) = 1 \in \mathbb{O} \,\bigr\} .$$

Es sei $v \in \operatorname{Im}\mathbb{O}$ und $g \in G_2$. Wir berechnen

$$\sigma_g(v) = \sigma_g(v \cdot 1) = \tau_g(v) \cdot \sigma_g(1) = \tau_g(v) \cdot 1 = \tau_g(v) ,$$

insbesondere induzieren σ und τ die gleiche Darstellung von G_2 auf den imaginären Oktonionen $\operatorname{Im} O = 1^\perp \subset \mathbb{O}$. Außerdem wirkt G_2 durch Automorphismen, denn für zwei imaginäre Oktonionen gilt

$$\sigma_g(v \cdot w) = \tau_g(v) \cdot \sigma_g(w) = \sigma_g(v) \cdot \sigma_g(w) ,$$

und wenn mindestens einer der Faktoren reell ist, ist die Automorphismeneigenschaft klar.

Man findet leicht Elemente $g \in \mathrm{Spin}(7)$, die 1 auf ein beliebiges Oktonion der Länge 1 abbilden (Übung). Damit haben wir die Darstellung $S^7 \cong \mathrm{Spin}(7)/G_2$ aus Beispiel 3.15 gefunden. Und da $\dim \mathrm{Spin}(7) = \dim SO(7) = 21$, erhalten wir

$$\dim G_2 = \dim \mathrm{Spin}(7) - \dim S^7 = 14 .$$

Aus der langen exakten Homotopiesequenz

$$\begin{aligned}
\cdots \longrightarrow \underbrace{\pi_2(S^7)}_{=0} \longrightarrow \pi_1(G_2) \longrightarrow \underbrace{\pi_1(\mathrm{Spin}(7))}_{=0} \longrightarrow\\
\longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^7)}_{=0} \longrightarrow \pi_0(G_2) \longrightarrow \underbrace{\pi_0(\mathrm{Spin}(7))}_{=\{*\}} \longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

schließen wir, dass G_2 zusammenhängend und einfach zusammenhängend ist.

(3) Wir betrachten jetzt die Wirkung der Gruppe G_2 auf den imaginären Oktonionen $\operatorname{Im}\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$. Man kann zeigen, dass G_2 transitiv auf der imaginären Einheitssphäre S^6 wirkt (Übung). Es sei

$$H = \left\{\, g \in G_2 \;\middle|\; g(e_1) = e_1 \,\right\} ,$$

dann wirkt H auf $e_1^\perp \cap \operatorname{Im}\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^6$.

Auf $e_1^\perp$ induziert e_1 eine komplexe Struktur, denn da das Erzeugnis von e_1 und einem weiteren imaginären Element $v \in e_1^\perp$ assoziativ ist, gilt

$$\begin{gathered}\langle e_1 \cdot v, e_1\rangle = \operatorname{Re}\bigl(\overline{e_1 \cdot v} \cdot e_1\bigr) = \operatorname{Re}\bigl(\bar v \cdot (-e_1) \cdot e_1\bigr) = \operatorname{Re}(\bar v) = 0 \;, \\ \operatorname{Re}(e_1 \cdot v) = \langle -e_1, v\rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad e_1 \cdot (e_1 \cdot v) = (e_1 \cdot e_1) \cdot v = -v \;.\end{gathered}$$

Als Untergruppe der Automorphismengruppe von $\mathbb{O}$ erhält H diese komplexe Struktur, und es folgt $H \subset GL(3, \mathbb{C})$. Da Multiplikation mit e_1 die Norm erhält, gilt $H \subset U(3)$. Schließlich liefert die Dimensionsformel

$$\dim H = \dim G_2 - \dim S^6 = 8 \;,$$

und wegen der langen exakten Homotopiesequenz

$$\cdots \longrightarrow \underbrace{\pi_1(S^6)}_{=0} \longrightarrow \pi_0(H) \longrightarrow \underbrace{\pi_0(G_2)}_{=\{*\}} \longrightarrow \cdots$$

ist auch die Gruppe H zusammenhängend. Die einzige zusammenhängende acht-dimensionale Unter-Lie-Gruppe von $U(3)$ ist $SU(3)$, somit gilt $H \cong SU(3)$, und wir haben auch die Darstellung $S^6 = G_2/SU(3)$ aus Beispiel 3.15 gefunden.

5.4. Holonomiesysteme

In diesem Abschnitt beginnen wir mit der Klassifikation der eingeschränkten Holonomien Riemannscher Mannigfaltigkeiten (M, g). Wir zeigen, dass analog zur de Rham-Zerlegung 5.9 die Holonomie in eine direkte Summe irreduzibler und trivialer Holonomien zerfällt. Für jede irreduzible Holonomie $H \subset SO(n)$ zeigen wir, dass H entweder transitiv auf S^{n-1} wirkt, oder aber die Holonomie eines symmetrischen Raums G/H ist. Wir folgen dem Beweis von Simons [**S**].

Der eigentliche Beweis ist rein algebraisch, und folgt im nächsten Abschnitt. Wir beginnen daher mit der geometrischen Vorarbeit. Die folgende Definition lehnt sich an Satz 1.51 an. Wir erinnern uns, dass jede Lie-Gruppe G durch $\operatorname{Ad}\colon G \to \operatorname{End}(\mathfrak{g})$ auf $\mathfrak{g}$ wirkt, siehe (3.1) für Matrixgruppen.

5.34. Definition. Es sei V ein euklidischer Vektorraum. Ein *Krümmungstensor* auf V ist eine multilineare Abbildung $R\colon V^3 \to V$, so dass für alle u, v, w, $x \in V$ gilt

$$\begin{aligned} R_{v,u}w + R_{u,v}w &= 0 \;, & \langle R_{u,v}x, w\rangle &= -\langle R_{u,v}w, x\rangle \;, \\ R_{u,v}w + R_{v,w}u + R_{w,u}v &= 0 \;, & \langle R_{w,x}u, v\rangle &= \langle R_{u,v}w, x\rangle \;. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir bezeichnen den Raum der Krümmungstensoren auf V mit $\mathcal{R}(V)$.

Die orthogonale Gruppe $O(V)$ und ihre Lie-Algebra $\mathfrak{so}(V)$ wirken auf $\mathcal{R}(V) \subset \Lambda^2 V^* \otimes \mathfrak{so}(V)$ durch

$$g(Q)_{u,v}w = \operatorname{Ad}_g(Q_{g^{-1}u, g^{-1}v}) \qquad \text{und} \qquad A(Q)_{u,v}w = [A, Q_{u,v}] - Q_{Au,v} - Q_{u,Av} \tag{2}$$

für alle $g \in O(V)$, $A \in \mathfrak{so}(V)$, $Q \in \mathcal{R}(V)$ und alle u, $v \in V$.

Sei jetzt (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Wir beschreiben die eingeschränkte Holonomie von M durch das Tripel

$$(V, R, H) = \bigl(T_pM, R|_p, \operatorname{Hol}^0_p(M, g)\bigr) \tag{5.9}$$

aus einem Euklidischen Vektorraum V, einem Krümmungstensor $R \in \mathcal{R}(V)$ und einer zusammenhängenden Unter-Lie-Gruppe $H \subset SO(V)$. Nach Satz 3.25 gilt $R_{u,v} \in \mathfrak{hol}_p(M,g)$ für alle u, $v \in T_pM$.

5.35. Definition. Es sei R ein Krümmungstensor auf V. Eine Unter-Lie-Gruppe $H \subset O(V)$ heißt *Holonomiegruppe* von R, wenn

$$R_{u,v} \in \mathfrak{h} \qquad \text{für alle } u,\, v \in V\ .$$

Ein *Holonomiesystem* ist ein Tripel $S = (V, R, H)$ aus einem Euklidischen Vektorraum, einem Krümmungstensor $R \in \mathcal{R}(V)$ und einer zusammenhängenden Holonomiegruppe von R.

Wir wollen letztendlich nur Holonomien einfach zusammenhängender Riemannscher Mannigfaltigkeiten betrachten, also eingeschränkte Holonomiegruppen. Da diese Holonomiegruppen zusammenhängend sind, ist die Einschränkung in der Definition sinnvoll. Sie ermöglicht es, im Wesentlichen nur noch mit der Lie-Algebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{so}(V)$ von H zu arbeiten.

5.36. Bemerkung. Da H vermöge der adjungierten Darstellung auf $\mathfrak{h}$ wirkt, liegen mit $R_{u,v}$ für feste u, $v \in V$ auch $\mathrm{Ad}_h(R_{u,v})$ und $[A, R_{u,v}]$ in $\mathfrak{h}$ für alle $h \in H$ und alle $A \in \mathfrak{h}$. Wenn das für alle u, $v \in V$ gilt, dann gilt das auch für $h(R)_{u,v}$ und für $A(R)_{u,v}$. Somit ist H auch eine Holonomiegruppe für alle $h(R)$ und all ihre Linearkombinationen. Wir bezeichnen den Raum all dieser Linearkombinationen mit $H(R) \subset \mathcal{R}(V)$. Man beachte, dass $A(R) \in H(R)$ für alle $A \in \mathfrak{h}$ gilt, da $A(R)$ als Grenzwert von Elementen von $H(R)$ geschrieben werden kann und Untervektorräume endlich-dimensionaler Vektorräume stets abgeschlossen sind. Zu einem Krümmungstensor R kann es mehr als nur eine Gruppe H geben. Im Folgenden werden wir häufig den Raum $H(R)$ betrachten, der sowohl von R als auch von H abhängt.

5.37. Proposition. *Es sei (V, R, H) ein Holonomiesystem, dann zerfällt $\mathfrak{h}$ als direkte Summe von Lie-Algebren in $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_R \oplus \mathfrak{h}'$, wobei*

$$\mathfrak{h}_R = \left\{\, Q_{u,v} \in \mathfrak{h} \;\middle|\; Q \in H(R), u, v \in V \,\right\}\ .$$

Für alle $A \in \mathfrak{h}'$ und alle $Q \in H(R)$ gilt $A(Q) = 0$.

Sei $H_R = \exp_H(\mathfrak{h}_R) \subset H$ die zu $\mathfrak{h}_R$ gehörige zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe. Man kann zeigen, dass H_R kompakt ist, also ist auch (V, R, H_R) ein Holonomiesystem.

Beweis. Nach Konstruktion ist die Teilmenge $\mathfrak{h}_R$ invariant unter der adjungierten Wirkung von H, also auch unter Lie-Klammern mit Elementen aus ganz $\mathfrak{h}$. Das heißt, $\mathfrak{h}_R \subset \mathfrak{h}$ ist ein Ideal. Da H Unter-Lie-Gruppe einer kompakten Lie-Gruppe ist, ist $\mathfrak{h}$ reduktiv. Das bedeutet, dass es ein zu $\mathfrak{h}_R$ komplementäres Ideal $\mathfrak{h}'$ gibt.

Sei jetzt $A \in \mathfrak{h}'$ und $Q \in H(R)$. Für alle u, $v \in V$ gilt $Q_{u,v} \in \mathfrak{h}_R$, somit gilt $[A, Q_{u,v}] \in \mathfrak{h}_R \cap \mathfrak{h}' = \{0\}$. Seien jetzt w, $x \in V$, dann folgt

$$\begin{aligned}\langle A(Q)_{u,v} w, x\rangle &= \langle \underbrace{[A, Q_{u,v}]}_{=0}(w), x\rangle - \langle Q_{A(u),v} x, w\rangle - \langle Q_{u,A(v)} x, w\rangle \\ &= -\langle Q_{x,w}(A(u)), v\rangle - \langle Q_{x,w} u, A(v)\rangle = \langle [A, Q_{x,w}](u), v\rangle = 0\ .\end{aligned}$$

□

5.38. Beispiel. Sei (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $n \geq 2$, und sei $(V, R, H) = (T_pM, R|_p, \mathrm{Hol}_p(M, g))$ das Holonomiesystem der zugrundeliegenden Riemannschen Mannigfaltigkeit an der Stelle $p \in M$. Die Lie-Algebra $\mathfrak{u}(n)$ spaltet als $\mathfrak{su}(n) \oplus \mathbb{R}$. Falls $\mathrm{Hol}_p(M, g) \cong U(n)$, gibt es drei Möglichkeiten.

(1) Falls $\mathrm{ric}\,|_p \neq 0$, ist $\mathfrak{h}_R \cong \mathfrak{u}(n)$, und (V, R, H).
(2) Falls $\mathrm{ric}\,|_p = 0$ aber $R|_p \neq 0$, gilt $\mathfrak{h}_R \cong \mathfrak{su}(n)$ und $\mathfrak{h}' \cong \mathbb{R}$; das ergibt sich aus Proposition 4.65 (2) mit ähnlichen Argumenten wie Folgerung 4.70.

(3) Falls $R|_p = 0$, ist $\mathfrak{h}_R = 0$ und $\mathfrak{h}' \cong \mathfrak{u}(n)$.

Der Fall $\mathfrak{h}_R \cong \mathbb{R}$ tritt nur in komplexer Dimension $n = 1$ auf. Man beachte, dass sich durch geschickte Wahl eines Kähler-Potentials die Fälle (2) und (3) in einzelnen Punkten $p \in M$ erreichen lassen, auch wenn die Holonomie insgesamt $U(n)$ ist. Auf einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit (Holonomie $SU(n)$) hingegen ist ω durch seine de Rham-Kohomologieklasse eindeutig bestimmt, so dass wir ω nicht mit Hilfe eines Kähler-Potentials verändern können.

5.39. Definition. Ein Holonomiesystem heißt *irreduzibel,* wenn die Darstellung von H auf V irreduzibel ist, das heißt, wenn es keinen nichttrivialen, H-invarianten Untervektorraum von V gibt.

Ein Holonomiesystem heißt *symmetrisch,* wenn $h(R) = R$ für alle $h \in H$.

Korrekter wäre vielleicht die Bezeichnung „lokal symmetrisch“, denn wenn $h(R) = R$ gilt, können wir R zu einem parallelen Tensor auf der universellen Überlagerung M fortsetzen, und das ist gerade die Bedingung aus Definition 3.1 (3). Allerdings wissen wir deshalb noch nicht, dass diese Fortsetzung tatsächlich der Krümmungstensor von M ist. Es folgt daher eine bessere Erklärung.

5.40. Bemerkung. Es sei $M = G/H$ ein Riemannscher symmetrischer Raum. Wir identifizieren V mit dem Komplement $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{h}$ in $\mathfrak{g}$ aus dem Beweis von Satz 3.17 und schreiben $R_{u,v}w$ für $\widehat{R_{U,V}W}$. Da die algebraische Lie-Klammer auf $\mathfrak{g}$ mit der Einschränkung der adjungierten Darstellung auf H verträglich ist, folgt aus Satz 3.19, dass

$$\begin{aligned} h(R)_{u,v}w &= -\mathrm{Ad}_h \left[[\mathrm{Ad}_h^{-1}u, \mathrm{Ad}_h^{-1}v], \mathrm{Ad}_h^{-1}w\right] \\ &= -\mathrm{Ad}_h \left[\mathrm{Ad}_h^{-1}[u,v], \mathrm{Ad}_h^{-1}w\right] = -\big[[u,v],w\big] = R_{u,v}w \,. \end{aligned}$$

Also ist jedes Holonomiesystem eines Riemannschen symmetrischen Raumes symmetrisch.

Sei umgekehrt (V, R, H) ein symmetrisches Holonomiesystem. Ableiten der obigen Bedingung für $h = e^{sX}$ bei $s = 0$ liefert

$$(XR)_{u,v} = [X, R_{u,v}] - R_{Xu,v} - R_{u,Xv} = 0 \,.$$

Dann konstruieren wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{h} \oplus V && \text{mit} && [X,Y]_{\mathfrak{g}} = [X,Y]_{\mathfrak{h}} \,, \\ [X,u]_{\mathfrak{g}} &= Xu && \text{und} && [u,v]_{\mathfrak{g}} = -R_{u,v} \end{aligned}$$

für alle X, $Y \in \mathfrak{h}$ und alle u, $v \in V$. Da $\mathfrak{h}$ als Lie-Algebra auf V wirkt und die erste Bianchi-Identität gilt, überprüft man leicht, dass $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra ist (Übung). Außerdem ist die Cartan-Involution I mit $I_{\mathfrak{h}} = \mathrm{id}_{\mathfrak{h}}$ und $I_V = -\mathrm{id}_V$ ein Lie-Algebren-Automorphismus nach Konstruktion. Somit sind symmetrische Holonomiesysteme genau die Holonomiesysteme Riemannscher symmetrischer Räume.

Als nächstes beweisen wir ein algebraisches Analogon der de Rham-Zerlegung 5.9.

5.41. Proposition. *Es sei (V, R, H) ein Holonomiesystem. Dann existieren Holonomiesysteme (V_0, R^0, H_0), …, (V_k, R^k, H_k) wobei $R^0 = 0$ gelte und (V_i, R^i, H_i) irreduzibel sei für $1 \le i \le k$ mit $R_i \neq 0$, so dass*

$$V = V_0 \oplus \cdots \oplus V_k \qquad \textit{mit } V_i \perp V_j \textit{ für } i \neq j, \qquad \textit{und} \qquad R = R^0 \oplus \cdots \oplus R^k \,,$$

so dass $V_i \subset V$ ein H-invarianter Unterraum ist und $H_i = \{\, h|_{V_i} \mid h \in H \,\} \subset SO(V_i)$. Die Zerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren (V_1, R^1, H_1), …, (V_k, R^k, H_k) eindeutig.

Beweis. Es sei $U \subset V$ ein H-invarianter Unterraum. Für alle u, $v \in V$ und alle $Q \in H(R)$ gilt $Q_{u,v} \in \mathfrak{h}$, also folgt

$$Q_{v,w}u \in U \qquad \text{für alle } Q \in H(R), \text{ alle } u \in U \text{ und alle } v,\, w \in V \,.$$

Da $H \subset SO(V)$ ist auch $U^\perp$ ein H-invarianter Unterraum. Wegen Blocksymmetrie folgt $Q_{v,w} = 0$ falls $v \in U$ und $w \in U^\perp$ oder umgekehrt. Wegen der Bianchi-Identität gilt außerdem $Q_{u,v}w = 0$, falls u, $v \in U$ und $w \in U^\perp$ oder umgekehrt, denn

$$Q_{u,v}w = -Q_{v,w}u - Q_{w,u}v = 0\ .$$

Somit zerlegt sich jeder Krümmungstensor $Q \in H(R)$ in eine direkte Summe $Q_U \oplus Q_{U^\perp}$. Sei $H_U = \{\, h|_U \mid h \in H\}$, dann folgt $R_{u,v}|_U \in \mathfrak{h}_U$ für alle u, $v \in U$, also ist $(U, R|_U, H_U)$ ein Holonomiesystem, und ebenso $(U^\perp, R|_{U^\perp}, H_{U^\perp})$.

Auf diese Weise zerlegen wir sukzessive (V, R) in eine direkte Summe irreduzibler, H-invarianter Unterräume mit Krümmungstensoren. Alle Unterräume, auf denen R verschwindet, fassen wir zu V_0 zusammen, und erhalten die geforderten Zerlegungen von V und R. Da H kompakt ist, und da H wegen $R_i \neq 0$ nichttrivial auf allen V_i für $i \geq 1$ wirkt, ist diese Zerlegung bis auf die Reihenfolge eindeutig. □

Die Gruppen auf Bergers Liste der möglichen irreduziblen Riemannschen Holonomien wirken alle transitiv auf der Einheitssphäre der jeweiligen Holonomiedarstellung. Berger hat das bereits beobachtet, und Simons hat später einen unabhängigen Beweis dafür gegeben. Wir werden den folgenden Satz benutzen, um Bergers Satz zu beweisen.

5.42. Satz (Simons). *Es sei (V, R, H) ein irreduzibles Holonomiesystem. Wenn H nicht transitiv auf der Einheitssphäre von V wirkt, dann ist das Holonomiesystem symmetrisch.*

Wir haben eine Liste der transitiven Gruppenwirkungen in Beispiel 3.15 angegeben. Im nächsten Abschnitt betrachten wir die jeweiligen Gruppen im Einzelnen. Dabei bleiben zwei Möglichkeiten $\mathrm{Spin}(9) \subset SO(16)$ und $Sp(n) \cdot S^1 \subset SO(4n)$, bei denen man „von Hand“ zeigen muss, dass sie nicht als Holonomiegruppen nicht symmetrischer Riemannscher Mannigfaltigkeiten auftreten können.

5.43. Bemerkung. Die beiden Möglichkeiten im obigen Satz schließen sich nicht gegenseitig aus. Wenn bei einem symmetrischen Raum $M = G/H$ die Gruppe H transitiv auf der Einheitssphäre von $T_{eH}M$ wirkt, dann bedeutet das, dass es zu je zwei Paaren von Punkten (p, q) und $(p', q') \in M^2$ mit $d(p, q) = d(p', q')$ ein Element $g \in G$ gibt, so dass $p' = g(p)$ und $q' = g(q)$ gilt (Übung). Man nennt Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft auch *zwei-Punkt-homogen.*

Indem man die Liste aller symmetrischen Räume vom kompakten Typ betrachtet, findet man drei Familien und einen weiteren symmetrischen Raum mit dieser Eigenschaft, nämlich

$$S^n = SO(n+1)/SO(n)\ , \qquad \mathbb{C}P^n = SU(n+1)/U(n)$$
$$\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1)\ , \qquad \mathbb{O}P^2 = F_4/\mathrm{Spin}(9)\ ,$$

wobei jeweils $n \geq 2$ sei, denn S^1 ist nicht einfach zusammenhängend, und die Räume $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{H}P^1$ und $\mathbb{O}P^1$ sind jeweils isometrisch zu S^2, S^4 beziehungsweise S^8. Die dazu dualen hyperbolischen Räume sind natürlich ebenfalls zwei-Punkt-homogen.

5.44. Satz (Berger, Simons). *Es sei (M, g) eine zusammenhängende, nicht notwendigerweise vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Wenn $(T_pM, R|_p, \mathrm{Hol}_p^0(M, g))$ ein irreduzibles Holonomiesystem ist und $\mathrm{Hol}_p^0(M, g)$ nicht transitiv auf der Einheitssphäre von T_pM wirkt, dann ist (M, g) lokal symmetrisch.*

Man beachte, dass wir anstelle der de Rham-Zerlegung 5.9 Proposition 5.41 benutzen dürfen. Das erlaubt es, Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten zu betrachten, deren regulärer Teil in der Regel nicht vollständig ist.

Für den Beweis benutzen wir ohne Beweis einige Fakten über symmetrische Räume, sowie die *zweite Bianchi-Identität*

$$(\nabla_U R)_{V,W} + (\nabla_V R)_{W,U} + (\nabla_W R)_{U,V} = 0\ .$$

Hierbei ist ∇R wie in Definition 3.1 (3) definiert. Die zweite Bianchi-Identität folgt leicht aus der Definition des Krümmungstensors, da ∇ torsionsfrei ist (Übung).

Beweis. Als erstes beachten wir, dass die obigen Bedingungen an das Holonomiesystem nur von der Wirkung von $\mathrm{Hol}_p^0(M,g)$ auf T_pM abhängen. Da M zusammenhängend ist und Parallelverschiebung entlang eines Pfades von p nach q einen Isomorphismus der Holonomien bei p und q induziert, sind beide Bedingungen an jedem Punkt $q \in M$ erfüllt.

Falls $\dim M = 1$, ist (M,g) flach, und falls $\dim M = 2$, gilt entweder $\mathrm{Hol}_p^0(M,g) = \{e\}$ und (M,g) ist flach, oder $\mathrm{Hol}_p^0(M,g) \cong SO(2)$ wirkt transitiv auf der Einheitssphäre. Wir dürfen also $\dim M \geq 3$ annehmen.

Falls $R|_q = 0$ für alle $q \in M$ gilt, ist (M,g) lokal isometrisch zu einem Euklidischen Raum, und daher lokal symmetrisch. Wir dürfen daher annehmen, dass es Punkte $q \in M$ mit $R|_q \neq 0$ gibt. Diese Punkte bilden eine offene Teilmenge $M' \subset M$.

Sei $q \in M'$. Nach Satz 5.42 ist $(V,R,H) = (T_pM, R|_p, \mathrm{Hol}_p^0(M,g))$ ein symmetrisches Holonomiesystem. Nach Bemerkung 5.40 trägt $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus V$ die Struktur einer Lie-Algebra. Man kann zeigen, dass es Lie-Gruppen $H \subset G$ zu den Lie-Algebren $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ gibt, so dass G/H ein Riemannscher symmetrischer Raum ist. Jetzt folgt entweder aus der Klassifikation aller symmetrischen Räume oder einem Resultat von Kostant, dass für jedes symmetrische Holonomiesystem (V,R',H) mit der gleichen Wirkung von H auf V eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $R' = cR$ existiert.

Hieraus schließen wir, dass $\nabla_V R|_q = \alpha_q(V) \cdot R|_q$ für alle $q \in M'$ gilt, wobei $\alpha_q \in T_q^*M$. Es seien jetzt u, v, $w \in T_qM$ mit v, $w \in \ker \alpha_q$. Aus der zweiten Bianchi-Identität folgt

$$0 = (\nabla_u R)_{v,w} + (\nabla_v R)_{w,u} + (\nabla_w R)_{u,v} = \alpha_q(u) R_{v,w}\ .$$

Wäre $\alpha_q(u) \neq 0$, so besäße (V,R,H) einen flachen Unterraum $\ker \alpha_q$ der Kodimension 1. Auf der Liste aller symmetrischen Räume gibt es jedoch keinen symmetrischen Raum M der Dimension $\dim M \geq 3$ mit dieser Eigenschaft außer dem flachen Euklidischen Raum. Somit ist $\alpha_q = 0$.

Also gilt $\nabla R = 0$ auf der offenen Teilmenge $M' \subset M$. Wegen Stetigkeit von R folgt $R \neq 0$ auf dem Rand von M' und somit $\partial M' = \emptyset$ nach Definition von M'. Also gilt $M' = M$, weil M zusammenhängend ist, und (M,g) ist lokal symmetrisch nach Definition 3.1 (3). $\square$

5.5. Flache und singuläre Unterräume

In diesem Abschnitt beweisen wir Satz 5.42. Sei (V,R,H) ein Holonomiesystem. Wenn H nicht transitiv auf der Einheitssphäre in V wirkt, dann enthält V stets „flache“ Unterräume. Das Komplement dieser Unterräume zerfällt in simultane Eigenräume einer Familie selbstadjungierter Operatoren, die wir mit Hilfe der Krümmungstensoren in $H(R)$ definieren. Hiermit konstruieren wir diverse „totalgeodätische“ Unterräume. Schließlich bestimmen wir Elemente $A_i \in \mathfrak{h}$, so dass der Raum $H(A_i(R))$ eine strikt kleinere Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{so}(V)$ aufspannt als $H(R)$. Eine doppelte Induktion liefert schließlich, dass alle $X \in \mathfrak{h}$ den Krümmungstensor annihilieren, so dass (V,R,H) im Sinne von Definition 5.39 symmetrisch ist.

Die folgenden Überlegungen sind rein algebraisch und benutzen fast ausschließlich die Symmetrien des Krümmungstensors und Satz 3.25, die sich in den Definitionen 5.34 und 5.35 wiederspiegeln. Erst gegen Ende des Beweises benutzen wir auch die spezielle Form des Krümmungstensors symmetrischer Räume aus Satz 3.19. Dennoch gibt es einen geometrischen Hintergrund, den wir zumindest teilweise zu erläutern versuchen.

5.45. Definition. Es sei (V, R, H) ein Holonomiesystem. Ein Untervektorraum $W \subset V$ heißt *totalgeodätisch,* wenn $Q_{u,v}w \in W$ für alle u, v, $w \in W$ und alle $Q \in H(R)$.

Er heißt *flach,* wenn $Q_{v,w} = 0$ für alle v, $w \in W$ und alle $Q \in H(R)$.

Sei $N \subset (M, g)$ eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit, und seien U, V, $W \in \mathfrak{X}(M)$ tangential an N, dann sind auch $\nabla_U V$, $\nabla_U W$ und so weiter tangential an N, und somit auch $R_{U,V}W$. Eine totalgeodätische Untermannigfaltigkeit heißt flach (oder kurz „ein Flach"), wenn sie überdies intrinsisch flach ist. Aufgrund von Satz 3.19 ist dann auch das Normalenbündel flach. Flachs existieren in allen symmetrischen Räumen (M, g), die nicht zwei-Punkt-homogen sind. Man definiert den Rang als

$$\operatorname{rk}(M, g) = \min_{p \in M} \min_{v \in T_pM \setminus \{0\}} \max\{ \dim N \bigm| N \text{ ist ein Flach durch } p \text{ mit } v \in T_pN \} \; .$$

Räume vom Rang ≥ 2 sind entweder Riemannsche Produkte oder lokal symmetrisch, und die Räume aus Bemerkung 5.43 sind genau die irreduziblen symmetrischen Räume vom Rang 1. Die Struktur, die die Flachs zueinander bilden, ist charakteristisch für den jeweiligen symmetrischen Raum.

Die obigen Definitionen sind nur im Spezialfall eines lokal symmetrischen Raumes äquivalent zu den hier skizzierten geometrischen Begriffen. Dennoch motiviert der Vergleich mit der geometrischen Situation einige der folgenden Überlegungen.

5.46. Beispiel. Wir geben einige Beispiele.

(1) Der Krümmungstensor der runden Sphäre S^n wird gegeben durch

$$R^{\mathrm{sph}}_{u,v} w = \langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v \qquad \text{für alle } u,\ v,\ w \in \mathbb{R}^n \; .$$

Es folgt $h(R^{\mathrm{sph}}) = R^{\mathrm{sph}}$ für alle $h \in SO(n)$. Jeder Untervektorraum von T_pS^n ist totalgeodätisch in $(V, R^{\mathrm{sph}}, SO(n))$. Das liegt daran, dass jeder Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n+1}$ die Einheitssphäre $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ in einer totalgeodätischen Untermannigfaltigkeit schneidet.

(2) Wir betrachten den Raum $M = SU(n)/SO(n)$ der orientierten speziellen Lagrangeschen Untervektorräume in $(\mathbb{C}^n, \Omega)$, wobei $\Omega = dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n$. Man kann zeigen, dass $\operatorname{rk} M = n-1$, und alle Flachs maximaler Dimension explizit angeben (Übung). Sei auf der anderen Seite $u \in \mathfrak{p}$ eine Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten, dann gilt $h(u) = u$ nur für endlich viele $h \in H$. Also hat der Orbit $H(u)$ die gleiche Dimension wie H, und es gilt

$$\dim V = \frac{n(n+1)}{2} - 1 = n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \operatorname{rk}(M, g) + \max\{ \dim H(u) \mid u \in V \} \; .$$

(3) Es sei $M = M_0 \times \cdots \times M_k$ ein Riemannsches Produkt wie im Satz 5.9 von de Rham. Wenn $N_i \subset M_i$ für alle $i \leq k$ ein Flach in M_i ist, dann ist $N = N_0 \times \cdots \times N_k$ ein Flach in M. Man kann zeigen, dass der Rang additiv unter Riemannschen Produkten ist.

5.47. Bemerkung. Es sei (V, R, H) ein Holonomiesystem.

(1) Es sei $W \subset V$ totalgeodätisch (flach) und $h \in H$, dann ist auch $h(W) \subset V$ totalgeodätisch (flach).

(2) Sei $F \subset V$ flach, dann gilt für alle v, $w \in F$, $A \in \mathfrak{h}$ und $Q \in H(R)$, dass

$$Q_{Av,w} - Q_{Aw,v} = Q_{Av,w} + Q_{v,Aw} = [A, \underbrace{Q_{u,v}}_{=0}] - \underbrace{A(Q)_{v,w}}_{=0} = 0 \; .$$

(3) Ein Unterraum $F \subset V$ ist genau dann flach, wenn $A(F) \subset F^\perp$ für alle $A \in \mathfrak{h}_R$. Hierzu überlegen wir uns, dass F flach ist genau dann, wenn für alle x, $y \in V$ und v, $w \in F$ und alle $Q \in H(R)$ gilt

$$0 = \langle Q_{v,w}x, y \rangle = \langle Q_{x,y}v, w \rangle \; .$$

Letzteres gilt genau dann, wenn $\mathfrak{h}_R(F) \subset F^\perp$.

5.48. Lemma. *Sei (V, R, H) ein Holonomiesystem. Wenn H nicht transitiv auf der Einheitssphäre in V wirkt, liegt jeder Vektor $v \in V$ in einem flachen Unterraum $F \subset V$ der Dimension* $\dim F \geq 2$.

Wenn umgekehrt H_R auf der Einheitssphäre transitiv wirkt, existieren keine flachen Unterräume der Dimension größer als 1, aber diese Rückrichtung benötigen wir im Folgenden nicht.

Beweis. Wir bezeichnen die Einheitssphäre in V mit SV. Da H kompakt ist, sind auch die Orbits $H(v) \subset V$ für alle $v \in V$ kompakt, und haben daher mindestens Kodimension 1. Es gibt also zu jedem $v \in SV$ einen Vektor $w \in T_vSV = v^\perp$, so dass $w \in T_vH(v)^\perp$. Insbesondere folgt $w \perp Av$ für alle $A \in \mathfrak{h}$. Sei jetzt $Q \in H(R)$, dann gilt $Q_{u,x} \in \mathfrak{h}$, also

$$\langle Q_{v,w}u, x\rangle = \langle Q_{u,x}v, w\rangle = 0$$

für alle u, $x \in V$. Also spannen v, w einen flachen Unterraum der Dimension 2 auf. □

Wir bezeichnen mit $\operatorname{Sym}^2 F^*$ den Raum der symmetrischen Bilinearformen auf F.

5.49. Proposition und Definition. *Es sei $F \subset V$ ein flacher Unterraum, dann induziert $Q \in H(R)$ eine symmetrische Bilinearform $T_Q \in \operatorname{Sym}^2 F^* \otimes \operatorname{End} V$ auf F mit Werten in den selbstadjungierten Operatoren auf V durch*

$$T_Q(u, v)x = Q_{x,u}v \qquad \text{für alle } u,\ v \in F \text{ und alle } x \in V\ . \tag{1}$$

Für alle u, v, w, $z \in F$ kommutieren die Operatoren $T_Q(u, v)$ und $T_Q(w, z)$.

Für ein festes $Q \in H(R)$ existieren paarweise verschiedene symmetrische Bilinearformen λ_0, …, $\lambda_k \in \operatorname{Sym}^2 F^*$, so dass $\lambda_0 = 0$ und $\operatorname{rk} \lambda_i = 1$ für $1 \leq i \leq k$, und eine Zerlegung

$$V = V_0 \oplus \dots \oplus V_k\ , \qquad \text{so dass} \qquad T_Q(u, v)|_{V_i} = \lambda_i(u, v)\,\mathrm{id}_{V_i} \qquad \text{für alle } u,\ v \in F\ . \tag{2}$$

Für $i \neq 0$ heißt $U_i = \ker \lambda_i$ ein singulärer Unterraum *von F. Es gilt $\dim U_i = \dim F - 1$ und*

$$P_{u,x_i} = 0 \qquad \text{für alle } x_i \in V_i,\ P \in H(R) \text{ und } u \in U_i \subset F\ . \tag{3}$$

Für $w \in F$ und den Krümmungstensor R selbst ist $T_R(w, w)$ gerade der Operator in der Jacobifeld-Gleichung aus Definition 1.79 für eine Geodätische mit Startvektor w. Offensichtlich gilt $F \subset V_0$, und mit Proposition 5.53 sehen wir später, dass Gleichheit gilt. Die Gleichung (3) impliziert $T_P(u, \cdot\,)|_{V_i} = 0$ für alle $P \in H(R)$ und alle $u \in U_i$. Somit ist V_i nicht nur ein simultaner Eigenraum aller T_P, darüberhinaus hängt der Unterraum U_i nicht von der Wahl von P ab, solange es ein Element $x_i \in V_i$ und ein $w \in F$ mit $T_P(w, w)x_i \neq 0$ gibt. Allerdings kann einer der Eigenwerte λ_j das Vielfache eines anderen Eigenwertes λ_i sein, so dass $U_i = U_j$. Ein Beispiel ist $\mathbb{C}P^n$, dort gilt bei geeigneter Nummerierung $\lambda_2 = 4\lambda_1$ auf einem eindimensionalen Flach $F \cong \mathbb{R}$, siehe Beispiel 3.21.

Wir nennen einen flachen Unterraum F *maximal*, wenn F nicht echter Unterraum eines anderen flachen Unterraums ist. Wegen Aussage (3) spannt U_i zusammen mit einem Vektor $x_i \in V_i$ wieder einen flachen Unterraum der Dimension $\dim F$ auf. Später sehen wir, dass $w \in F$ genau in einem maximalen flachen Unterraum liegt, wenn w nicht in einem der singulären Unterräume U_i liegt. Solche Vektoren heißen *regulär* in V, und man könnte später zeigen, dass ihre H-Orbiten maximale Dimension haben, so dass wie in Beispiel 5.46 (2) gilt

$$\dim(H(w)) + \dim F = \dim V\ .$$

Beweis. Seien u, $v \in F$ und x, $y \in V$. Aus der ersten Bianchi-Identität folgt

$$\langle T_Q(u, v)x, y\rangle = \langle Q_{x,u}v, y\rangle = -\langle \underbrace{Q_{u,v}}_{=0}x, y\rangle - \langle Q_{v,x}u, y\rangle = \langle Q_{x,v}u, y\rangle = \langle T_Q(v, u)x, y\rangle\ ,$$

also $T_Q \in \operatorname{Sym}^2 F^* \otimes \operatorname{End} V$. Wegen Blocksymmetrie gilt auch

$$\langle T_Q(u, v)y, x\rangle = \langle Q_{y,u}v, x\rangle = \langle Q_{v,x}y, u\rangle = \langle T_Q(v, u)x, y\rangle = \langle T_Q(u, v)x, y\rangle\ ,$$

also ist $T_Q(u,v)$ für alle u, $v \in F$ selbstadjungiert.

Mit Hilfe von Bemerkung 5.47 (2) erhalten wir

$$T_Q(u,v)T_Q(w,z)x = Q_{\underbrace{Q_{x,w}}_{\in\mathfrak{h}_R}z,u}v = Q_{Q_{x,w}u,z}v = T_Q(z,v)T_Q(w,u)(x) \;.$$

Hieraus folgt zusammen mit den obigen Überlegungen, dass

$$T_Q(u,v) \circ T_Q(w,z) = T_Q(z,v) \circ T_Q(w,u) = T_Q(v,z) \circ T_Q(u,w) = T_q(w,z) \circ T_Q(u,v) \;.$$

Wir fixieren Q und diagonalisieren die Operatoren $T_Q(u,v)$ simultan. Wir finden also paarweise verschiedene symmetrische Bilinearformen $0 = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathrm{Sym}^2 F^*$, die „Eigenwerte" von T_Q, und eine Zerlegung wie in (2) mit $T_Q(u,v)|_{V_i} = \lambda_i(u,v)\,\mathrm{id}_{V_i}$ für alle u, $v \in F$.

Falls $\lambda_i \neq 0$ gilt, wählen wir $x_i \in V_i$ beliebig und $v \in F$ mit $\lambda_i(v,v) \neq 0$, dann gilt

$$x_i = \frac{1}{\lambda_i(v,v)}\,T_Q(v,v)x_i = \frac{1}{\lambda_i(v,v)}\,Q_{x_i,v}v \;.$$

Sei $\lambda_i(u,v) = 0$. Mit Hilfe von Bemerkung 5.47 (2) erhalten wir

$$P_{u,x_i} = \frac{1}{\lambda_i(v,v)}\,P_{u,Q_{x_i,v}v} = \frac{1}{\lambda_i(v,v)}\,P_{v,Q_{x_i,v}u} = \frac{1}{\lambda_i(v,v)}\,P_{v,\lambda_i(u,v)x_i} = 0$$

unabhängig von v und x_i, also gilt (3). Da das auch für $P = Q$ gilt, ist $U_i = \ker\lambda_i = \ker(\lambda_i(\,\cdot\,,v)) \subset F$ ein Unterraum der Kodimension 1. Insbesondere gilt $\mathrm{rk}\,\lambda_i = 1$, und wir erhalten (2). ☐

5.50. Proposition und Definition. *Es sei $F \subset V$ ein flacher Unterraum, und $U_i \subset F$ seien die singulären Unterräume aus Proposition 5.49. Für alle $i = 1, \dots, k$ erhalten wir den totalgeodätischen, sogenannten* einhüllenden *Unterraum*

$$W_i = \bigl\{\, w \in V \bigm| P_{u,w} = 0 \text{ für alle } u \in U_i \text{ und alle } P \in H(R) \,\bigr\} \;. \tag{1}$$

Sei jetzt V'_j ein simultaner Eigenraum der Operatoren T_P mit $P \in H(R)$, so dass $T_P(v,v)|_{V'_i} \neq 0$ für einen Vektor $v \in F$, und sei W_i zu U_i wie in (1) definiert. Dann gilt

$$V'_j \subset W_i \qquad \text{oder} \qquad V'_j \subset W_i^\perp \;. \tag{2}$$

Wir erhalten als weiteren totalgeodätischen Unterraum von V den Nullraum

$$Z(F) = \bigl\{\, w \in V \bigm| T_Q(u,v)w = 0 \text{ für alle } u,\ v \in F \text{ und alle } Q \in H(R) \,\bigr\} \;. \tag{3}$$

Die Unterräume W_i sind nach Konstruktion die Vereinigung aller flachen Unterräume von V mit $U_i \subset V$, *hüllen* diese gewissermaßen *ein.* Man beachte, dass W_k nur von der Hyperebene $U_i \subset F$ abhängt, nicht jedoch von dem Operator Q, den wir zur Definition von U_i benutzt haben, und dass W_k durchaus mehrere simultane Eigenräume der Operatoren $T_Q(u,v)$ enthalten kann.

Der Nullraum $Z(F)$ ist der Durchschnitt aller $\ker T_Q(u,v)$ für u, $v \in F$ und $Q \in H(R)$, und enthält daher ebenfalls F.

Beweis. Um zu zeigen, dass W_i totalgeodätisch ist, müssen wir für alle $L \in H(R)$ und alle x, y, $z \in W_i$ zeigen, dass $L_{x,y}z \in W_i$. Sei dazu $P \in H(R)$ beliebig und $u \in U_i$. Mit Hilfe der $\mathfrak{h}$-Wirkung und der ersten Bianchi-Identität erhalten wir

$$P_{u,\underbrace{L_{x,y}}_{\in\mathfrak{h}}z} = -\underbrace{L_{x,y}(P)_{u,z}}_{=0} + \bigl[L_{x,y}, \underbrace{P_{u,z}}_{=0}\bigr] - P_{L_{x,y}u,z} = P_{\underbrace{L_{y,u}}_{=0}x,z} + P_{\underbrace{L_{u,x}}_{=0}y,z} = 0 \tag{5.10}$$

nach Definition von W_i, da $L_{x,y}(P) \in H(R)$. Es folgt $L_{x,y}z \in W_i$, also ist W_i totalgeodätisch.

Seien jetzt $P \in H(R)$ und V'_j wie in der Proposition gegeben, sei $0 \neq \lambda'_j \in \mathrm{Sym}^2 F^*$ der zugehörige Eigenwert von T_P, das heißt

$$T_P(u,v)|_{V'_j} = \lambda'_j(u,v)\,\mathrm{id}_{V'_j} \;,$$

und sei $U'_j = \ker \lambda'_j$. Wir nehmen an, dass $x \in V'_j \backslash W_i$ existiert, dann existieren $u \in U_j$ und $L \in H(R)$ mit $L_{u,x} \neq 0$. Aus Proposition 5.49 (3) folgt $u \notin U'_j$. Für alle $w \in W_i$ gilt somit

$$\langle x, w\rangle = \frac{1}{\lambda'_j(u,u)}\langle T_P(u,u)x, w\rangle = \frac{1}{\lambda'_j(u,u)}\langle P_{x,u}u, w\rangle = \frac{1}{\lambda'_j(u,u)}\langle \underbrace{P_{u,w}}_{=0} x, u\rangle = 0 \ .$$

Da das für jeden Vektor in $V'_j \setminus W_i$ gilt, folgt $V'_j \subset W_i^\perp$, also gilt (2).

Um (3) zu beweisen, müssen wir zeigen, dass für alle P, $Q \in H(R)$, alle v, $w \in F$ und alle x, y, $z \in Z(F)$ gilt, dass $T_Q(v,w)(P_{x,y}z) = 0$. Im Spezialfall $y = u \in F$ folgt mit Hilfe der Wirkung von $P_{x,u} \in \mathfrak{h}$, dass

$$\begin{aligned} T_Q(v,w)(P_{x,u}z) &= Q_{P_{x,u}z,v}w = -\underbrace{P_{x,u}(Q)}_{\in H(R)}{}_{z,v}w - Q_{z,P_{x,u}v}w + P_{x,u}Q_{z,v}w - Q_{z,v}P_{x,u}w \\ &= -\underbrace{T_{P_{x,u}Q}(v,w)z}_{=0} - Q_{z,\underbrace{T_P(u,v)x}_{=0}}w + P_{x,u}\underbrace{T_Q(v,w)z}_{=0} - Q_{z,v}\underbrace{T_P(u,w)x}_{=0} = 0\ , \end{aligned}$$

da x, $z \in Z(F)$ und u, v, $w \in F$, so dass $P_{x,u}z \in Z(F)$. Aus der ersten Bianchi-Identität folgt für x, $y \in Z(F)$ und $v \in F$ auch

$$P_{x,y}v = -P_{y,v}x - P_{v,x}y \in Z(F)\ .$$

Im Allgemeinen liefert die analoge Rechnung daher

$$T_Q(v,w)(P_{x,y}z) = -\underbrace{T_{P_{x,y}Q}(v,w)z}_{=0} - Q_{z,\underbrace{P_{x,y}v}_{\in Z(F)}}w + P_{x,y}\underbrace{T_Q(v,w)z}_{=0} - Q_{z,v}\underbrace{P_{x,y}w}_{\in Z(F)} \in Z(F)\ .$$

Für alle $t \in Z(F)$ gilt

$$\langle T_Q(v,w)(P_{x,y}z), t\rangle = \langle Q_{P_{x,y}z,v}w, t\rangle = \langle Q_{t,w}v, P_{x,y}z\rangle = \langle T_Q(w,v)t, P_{x,y}z\rangle = 0\ .$$

Da $T_Q(v,w)(P_{x,y}z) \in Z(F)$, folgt daraus $T_Q(v,w)(P_{x,y}z) = 0$, also $P_{x,y}z \in Z(F)$. ☐

Das folgende Lemma erlaubt uns später, Elemente $A \in \mathfrak{h}$ mit $A(R) = 0$ zu finden.

5.51. Lemma. *Es sei (V,R,H) ein Holonomiesystem und $U \subset V$ totalgeodätisch. Dann ist*

$$\mathfrak{h}_U = \bigl\{\, A \in \mathfrak{h} \bigm| A(Q)|_U = 0 \text{ für alle } Q \in H(R) \,\bigr\}$$

ein Ideal, und es gilt

$$\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}_U \tag{1}$$

$$Q_{w,x} \in \mathfrak{h}_U \qquad \text{für alle } w \in U,\ x \in U^\perp \text{ und alle } Q \in H(R)\ . \tag{2}$$

Beweis. Wenn $U \subset V$ totalgeodätisch ist, lässt sich jeder Krümmungstensor $Q \in H(R)$ zu einem Krümmungstensor $Q|_U \in \mathcal{R}(U)$ auf U einschränken. Der Kern K_U der Einschränkungsabbildung $H(R) \to \mathcal{R}(U)$ mit $Q \mapsto Q|_U$ ist invariant unter $\mathfrak{h}$, denn aus $Q|_U = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \langle A(Q)_{u,v}w, x\rangle &= \langle A(Q_{u,v}w), x\rangle - \langle Q_{Au,v}w + Q_{u,Av}w + Q_{u,v}Aw, x\rangle \\ &= -\langle Q_{u,v}w, Ax\rangle + \langle Q_{w,x}v, Au\rangle - \langle Q_{w,x}u, Av\rangle + \langle Q_{u,v}x, Aw\rangle = 0 \end{aligned} \tag{*}$$

für alle u, v, w, $x \in U$. Da U totalgeodätisch ist, folgt daraus $A(Q) = 0$. Der Unterraum $\mathfrak{h}_U \subset \mathfrak{h}$ enthält alle Elemente, die $H(R)$ nach K_U abbilden. Er ist ein Ideal, denn seien $A \in \mathfrak{h}_U$ und $B \in \mathfrak{h}$ beliebig, dann gilt

$$[A,B](Q) = A(\underbrace{B(Q)}_{\in H(R)}) - B(\underbrace{A(Q)}_{\in K_U}) \in K_U\ .$$

Sei jetzt $A \in \mathfrak{h}'$, dann gilt $A(Q) = 0$ für alle $Q \in H(R)$ nach Proposition 5.37. Es folgt (1).

Sei $A \in \mathfrak{h}$ gegeben, so dass $A(U) \subset U^\perp$, dann gilt $A(Q) \in K_U$; das folgt aus der Rechnung (*), da U totalgeodätisch ist. Sei jetzt $x \in U^\perp$ und $u,\ v,\ w \in U$, dann gilt

$$\langle Q_{w,x}u, v\rangle = \langle Q_{u,v}w, x\rangle = 0\ , \tag{5.11}$$

so dass $Q_{w,x}(U) \subset U^\perp$, und es folgt (2). □

An dieser Stelle beginnt der eigentliche Beweis von Satz 5.42. Wir führen die einzelnen Schritte als Propositionen aus und setzen sie am Ende des Abschnitts zusammen.

Wir nehmen an, dass Satz 5.42 für alle Holonomiesysteme der Dimension $\dim V \leq n$ bereits bewiesen ist. Es sei (V, R, H) ein Holonomiesystem der Dimension $\dim V = n+1$ und F ein maximaler flacher Unterraum in dem Sinne, dass F in keinem anderen flachen Unterraum echt enthalten ist. Wir dürfen annehmen, dass $Z(F) \neq V$, denn wäre $Z(F) = V$ für alle flachen Unterräume, so könnten wir zu $v,\ w \in V$ einen flachen Unterraum F wählen, der v enthält, und aus $w \in Z(F)$ dann $R_{w,v}v = T_R(v,v)w = 0$ schließen. Aber in diesem Fall wäre die Schnittkrümmung identisch 0, und daher auch $R = 0$, und (V, R, H) wäre insbesondere symmetrisch.

5.52. Proposition. *Es sei F ein maximaler flacher Unterraum, so dass $Z(F) \neq V$. Es sei $w \in F$ und $y,\ z \in Z(F)$. Dann gilt $Q_{w,y}z = 0$ für alle $Q \in H(R)$.*

Beweis. Es sei $K' \subset H$ die Untergruppe, die $Z(F)$ nach $Z(F)$ abbildet, und K der Quotient von K' nach allen Elementen, die trivial auf $Z(F)$ wirken. Dann liefert $Q \in H(R)$ liefert ein Holonomiesystem $(Z(F), Q|_{Z(F)}, K)$, denn für alle $x,\ y \in Z(F)$ bildet $Q_{x,y} \in \mathfrak{h}$ den Raum $Z(F)$ nach Proposition 5.50 (3) auf sich selbst ab, und induziert somit ein Element von $\mathfrak{k}$.

Der Kürze halber schreiben wir Q für $Q|_{Z(F)}$. Wir nehmen zunächst an, dass $(Z(F), Q, K)$ irreduzibel ist. Da $\dim Z(F) \leq n = \dim V - 1$, gibt es nach Induktionsannahme nur zwei Fälle.

(1) Das Holonomiesystem $(Z(F), Q, K)$ ist symmetrisch. In diesem Fall folgt aus Bemerkung 5.40 und Satz 3.19 (3) für beliebige $x,\ y \in Z(F)$ dass $Q_{x,y} = 0$, wenn $Q_{x,y}x = 0$. Da $w \in F$ und $y \in Z(F)$, gilt

$$Q_{w,y}w = T_Q(w,w)y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad Q_{w,y} = 0\ .$$

(2) Die Wirkung von K auf der Einheitssphäre in $Z(F)$ ist transitiv. Dann existiert ein Element $k \in K$, so dass $k(y) \in F$, und es folgt

$$k(Q_{z,y}y) = k(Q)_{k(z),k(y)}k(y) = T_{k(Q)}(k(y),k(y))(k(z)) = 0\ .$$

Aber daraus folgt, wie oben gesagt, bereits $Q = 0$.

Falls $(Z(F), Q, K)$ reduzibel ist, können wir K durch K_Q ersetzen und die obigen Argumente auf die durch Proposition 5.41 gegebenen einzelnen Summanden in anwenden. □

5.53. Proposition. *Sei $F \subset V$ ein maximales Flach. Dann wird V erzeugt von den einhüllenden Unterräumen W_i aller singulären Unterräume $U_i \subset F$. Der Schnitt aller W_i ist F*

Beweis. Es sei $y \in V$ ein Vektor, der auf allen W_i senkrecht steht. Dann steht y insbesondere auf allen zugehörigen Eigenräumen V_i senkrecht, also gilt $y \in Z(F)$. Wir wollen zeigen, dass $Q_{y,v} = 0$ für alle $v \in F$, alle $y \in Z(F)$ und alle $Q \in H(R)$. Dann folgt $y \in F$ wegen Maximalität von F. Außerdem ist y in allen Unterräumen W_i aus Proposition 5.50 (1) enthalten, und daher $y = 0$, was zu zeigen war.

Als erstes überlegen wir uns, dass $Q_{y,v}(W_i) \subset W_i$. Wie in (5.10) gilt für alle $P \in H(R)$, alle $u \in U_i$ und alle $w \in W_i$, dass

$$P_{u,\underbrace{Q_{y,v}}_{\in\mathfrak{h}}w} = -\underbrace{Q_{y,v}(P)}_{\in H(R)}{}_{u,w} + [Q_{y,v}, \underbrace{P_{u,w}}_{=0}] - P_{Q_{y,v}u,w} = -P_{\underbrace{T_Q(v,u)y}_{=0},w} = 0\ .$$

Nach Definition 5.50 (1) von W_i gilt also $Q_{y,v}w \in W_i$. Nach (5.11) gilt andererseits $Q_{v,y}(W_i) \subset W_i^\perp$, so dass $Q_{v,y}|_{W_i} = 0$.

Wegen Proposition 5.52 gilt aber auch $Q_{v,y}(Z(F)) = 0$, so dass insgesamt $Q_{v,y} = 0$ folgt.

Zur letzten Aussage unterscheiden wir zwei Fälle.

(1) Es gibt nur einen einhüllenden Unterraum W_1. Dann folgt $W_1 = V$, und für alle $w \in U_1$, alle $x \in V$ und alle $Q \in H(R)$ gilt $Q_{x,w} = 0$. Der Unterraum

$$U = \{\, u \in V \mid Q_{u,x} = 0 \text{ für alle } x \in V \text{ und alle } Q \in H(R) \,\}$$

ist H-invariant. Da wir angenommen hatten, dass (V, R, H) irreduzibel ist, folgt $U = V$. Es folgt $R = 0$, $F = V$, und (V, R, H) ist symmetrisch.

(2) Es seien $U_1 \neq U_2$ zwei verschiedene singuläre Unterräume und W_1, W_2 die zugehörigen einhüllenden Unterräume. Da $\dim F \geq 2$, spannen U_1, U_2 zusammen F auf. Für $x \in W_1 \cap W_2$ und $w = u_1 + u_2 \in F$ mit $u_i \in U_i$ gilt

$$Q_{x,w} = Q_{x,u_1} + Q_{x,u_2} = 0 \;.$$

Wegen Maximalität von F folgt $M_1 \cap M_2 = F$. □

5.54. Proposition. *Es sei F ein maximales Flach, $P \in H(R)$, $V_k \subset F^\perp$ ein simultaner Eigenraum der Operatoren $T_P(u,v)$ für u, $v \in F$, und $W_k \supset V_k$ der zugehörige Unterraum aus Proposition 5.50 (1). Es seien $w \in F$, $x \in V_k$ und $y \in W_k^\perp$, dann ist der von F und x aufgespannte Unterraum $F \subset V$ flach im Holonomiesystem $(V, P_{w,y}(R), H)$.*

Beweis. Wir schließen aus Lemma 5.51 (2), dass $P_{w,y} \in \mathfrak{h}_{W_k}$. Da $\mathfrak{h}_{W_k}$ ein Ideal ist, folgt

$$\mathrm{Ad}_h(P_{w,y})(Q)|_{W_k} = 0 \qquad \text{für alle } h \in H \text{ und alle } Q \in H(R) \;.$$

Indem wir $Q = h(R)$ setzen, erhalten wir insbesondere $h(P_{w,y}(R))|_{W_k} = 0$ für alle $h \in H$.

Da F flach ist, müssen wir noch $Q_{v,x} = 0$ für alle $Q \in H(P_{w,y}(R))$ und alle $v \in F$ zeigen. Sei also $Q \in H(P_{w,y}(R))$, und seien p, $q \in M_k$, $z \in M_\ell$. Für $u \in U_\ell$ und $L \in H(R)$ berechnen wir mit (5.10), dass

$$L_{u,Q_{v,x}z} = -L_{Q_{v,x}u,z} = 0 \;,$$

da u, v, $x \in W_k$, und da ganz $H(P_{w,y}(R))$ auf W_k verschwindet. Es folgt $Q_{v,x}(W_\ell) \subset W_\ell$ für alle ℓ.

Nach Proposition 5.53 und den Vorüberlegungen müssen wir nur noch $Q_{v,x}|_{W_\ell} = 0$ für $\ell \neq k$ zeigen. Im Fall (2) im Beweis von Proposition 5.53 haben wir gesehen, dass $x \notin W_\ell$. Wegen Proposition 5.50 (2) gilt sogar $x \in W_\ell^\perp$. Seien jetzt p, $q \in W_\ell$, dann erhalten wir schließlich

$$\langle Q_{v,x}p, q\rangle = \langle \underbrace{Q_{p,q}v}_{\in M_\ell}, x\rangle = 0 \;. \qquad \square$$

5.55. Proposition. *Es gibt eine Basis $(A_i)_i$ von $\mathfrak{h}$, so dass für alle i gilt*

$$\dim \mathfrak{h}_{A_i(R)} < \dim \mathfrak{h}_R \;.$$

Beweis. Nach Proposition 5.37 gilt $A(R) = 0$ für alle $A \in \mathfrak{h}'$. Daher brauchen wir nur eine entsprechende Basis der Lie-Algebra $\mathfrak{h}_R$ zu finden.

Wir starten mit einem maximalen Flach F mit $Z(F) \neq V$, so dass die Propositionen 5.52–5.54 gelten. Wir wählen $w \in F$, so dass $w \notin U_i$ für alle i, und eine Basis (y_j) von $F^\perp$, so dass jeder Vektor y_j im orthogonalen Komplement $W_k^\perp$ eines Unterraumes aus Proposition 5.50 (1) liegt. Sei x_k Element eines zugehörigen Eigenraums $V_k \subset W_k$. Da $F \oplus x_k\mathbb{R}$ in $(V, P_{w,x_j}(R), H)$ nach Proposition 5.54 flach ist, gibt es kein Element $A = Q_{p,q} \in \mathfrak{h}_{P_{w,x_j}(R)}$, das w auf x_k abbildet, denn sonst wäre

$$\langle Q_{w,x_k}p, q\rangle = \langle Q_{p,q}w, x_k\rangle \neq 0 \;.$$

In $\mathfrak{h}_R$ gibt es hingegen ein solches Element, denn für ein geeignetes $Q \in H(R)$ gilt

$$\frac{1}{\lambda_k(w,w)}\, Q_{w,x_k} w = \frac{1}{\lambda_k(w,w)}\, T_Q(x_k) = x_k \ .$$

Also folgt $\dim \mathfrak{h}_{P_{w,x_j}(R)} < \dim \mathfrak{h}_R$.

Wir können (y_j) durch Vektoren aus F zu einer Basis von V ergänzen. Da $P_{w,v} = 0$ für v, $w \in F$, erhalten wir dadurch aber keine neue Elemente von $\mathfrak{h}_R$.

Da V irreduzibel ist, spannen die Vektoren $h(w)$ für alle $h \in H$ den Vektorraum V auf. Man überzeugt sich, dass der flache Unterraum $h(F)$ die gleichen Eigenschaften wie F hat, so dass wir das obige Argument auch für $h(F)$ durchführen können. Auf diese Weise erhalten wir schließlich genügend Elemente von $\mathfrak{h}_R$, aus denen wir die gesuchte Basis auswählen können. $\square$

Beweis von Satz 5.42. Der Satz ist für Holonomiesysteme (V, R, H) der Dimension $\dim V \leq 2$ klar, siehe Beweis von Satz 5.44. Wir nehmen daher induktiv an, dass er auch für $\dim V \leq n$ bereits bewiesen ist; diese Annahme haben wir im Beweis von Proposition 5.52 bereits eingesetzt.

Es sei also (V, R, H) ein irreduzibles Holonomiesystem der Dimension $\dim V = n+1$, so dass H nicht transitiv auf der Einheitssphäre in V wirkt. Wir starten eine zweite Induktion über $\dim \mathfrak{h}_R$. Im Fall $\dim \mathfrak{h}_R = 0$ folgt $R = 0$, und (V, R, H) ist symmetrisch.

Sei also der Satz für alle (V', R', H') mit $\dim V' = n + 1$ und $\dim \mathfrak{h}'_{R'} < p$ bewiesen, und sei $\dim \mathfrak{h}_R = p$. Dann finden wir nach Proposition 5.55 eine Basis $(A_i)_i$ von $\mathfrak{h}_R$, so dass der Satz für die Holonomiesysteme $(V, A_i(R), H)$ richtig ist.

Insbesondere sind die Holonomiesysteme $(V, A_i(R), H)$ symmetrisch, mithin gilt $B(A_i(R)) = 0$ für alle $B \in \mathfrak{h}$. Indem wir B in der Basis A_i darstellen, erhalten wir $B(B(R)) = 0$. Nun wirkt aber B als schiefsymmetrischer Endomorphismus auf dem Raum $\mathcal{R}(V)$ bezüglich des natürlichen Skalarproduktes (Übung), also folgt bereits $B(R) = 0$. Aber dann ist auch (V, R, H) symmetrisch, denn wir haben H als zusammenhängend vorausgesetzt, und der Beweis ist beendet. $\square$

5.6. Spinstrukturen und Spinoren

Wir greifen Abschnitt 5.3 wieder auf. Ziel ist es, sogenannte Spinorbündel über einer Mannigfaltigkeit M zu konstruieren; Schnitte solcher Bündel heißen Spinoren. Wenn eine Mannigfaltigkeit einen parallelen Spinor trägt, dann verschwindet ihre Ricci-Krümmung. Das werden wir uns im nächsten Abschnitt zunutze machen, um zu zeigen, dass bestimmte Holonomiegruppen (wie zum Beispiel $SU(n)$) nur auf Ricci-flachen Mannigfaltigkeiten möglich sind.

Die Motivation zur Einführung von Spinoren stammt aus der Physik. Dirac hat versucht, einen Differentialoperator D konstruieren, so dass D^2 ein Operator vom Laplace-Typ ist. Diracs Ansatz führt zu folgender Definition, die wir als Motivation für die folgenden Konstruktionen verstehen wollen.

5.56. Definition. Ein *reelles* (*komplexes*) *Diracbündel* über einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist ein Euklidisches (Hermitesches) Vektorbündel $S \to M$ mit einem metrischen Zusammenhang ∇^S und einer $C^\infty(M)$-bilinearen Abbildung $c\colon \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(S) \to \Gamma(S)$ mit $(v, s) \mapsto c_v s$, der *Clifford-Multiplikation,* mit den folgenden Eigenschaften:

(1) *Clifford-Relation:* für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ gilt $c_v^2 = -\|v\|^2 \in \operatorname{End} S_p$;
(2) *Schiefsymmetrie:* für alle $p \in M$ und alle $v \in T_pM$ wirkt c_v antiselbstadjungiert auf S_p;
(3) *Produktregel:* für alle Vektorfelder v, $w \in \mathfrak{X}(M)$ und alle Schnitte $s \in \Gamma(S)$ gilt

$$\nabla^S_v(c_w s) = c_{\nabla_v w} s + c_w \nabla^S_v s \ .$$

Später schreiben wir auch $v \cdot s$ anstelle von $c_v s$. Eigenschaften (1) und (2) implizieren, dass die Clifford-Algebra von (T_pM, g_p) auf S_p wirkt, und zwar schiefsymmetrisch wie in Proposition 5.30. Eigenschaft (3) stellt eine Beziehung zwischen dem Zusammenhang ∇^S und dem Levi-Civita-Zusammenhang auf TM her.

5.57. Bemerkung. Das Bündel $\Lambda^\bullet T^*M$ der äußeren Formen trägt eine Dirac-Bündel-Struktur. Zunächst sei $e^1, \dots, e^n \in T^*M$ die zu einer orthonormalen Basis von TM duale Basis, dann definieren ein Skalarprodukt auf $\Lambda^\bullet T^*M$ so, dass $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ für alle k und alle $1 \le i_1 < \dots < i_k \le n$ eine Orthonormalbasis von $\Lambda^\bullet T^*M$ bilden. Wir wählen den Zusammenhang ∇ aus (4.15) und definieren Clifford-Multiplikation durch

$$c_v \alpha = (\langle v, \cdot \rangle - \iota_v)\alpha \,.$$

Man kann sich überzeugen, dass dann die obigen Eigenschaften (1)–(3) gelten.

Falls (M, h) eine Kähler-Mannigfaltigkeit ist, erhalten wir analog für alle p eine Clifford-Bündel-Struktur auf $\Lambda^{p,\bullet} T^*M$. Im Spezialfall $p = 0$ haben wir zumindest die zugehörige Clifford-Multiplikation bereits in den Übungen betrachtet.

Ausgehend vom Spinormodul Σ_n aus Abschnitt 5.3 können wir die „kleinstmöglichen“ Diracbündel über (M, g) definieren. Da die Clifford-Multiplikation eine enge Beziehung zum Tangentialbündel herstellt, wollen wir im Prinzip das Bündel der orthonormalen Rahmen $P_O(M, g)$ aus Bemerkung 3.28 (1) betrachten und ein dazu assoziiertes Bündel wie in den Übungen konstruieren. Dabei haben wir aber das Problem, dass die Gruppe $O(n)$ nicht auf Σ_n wirkt, sondern nur die Gruppen $\mathrm{Pin}(n)$ und $\mathrm{Spin}(n)$ aus Definition 5.25. Wir sind aus verschiedenen Gründen nur an der Gruppe $\mathrm{Spin}(n)$ interessiert, und betrachten daher die Abbildungen

$$\mathrm{Spin}(n) \twoheadrightarrow SO(n) \hookrightarrow O(n) \,.$$

Wenn M orientierbar ist, wählen wir eine Orientierung und erhalten das Unterbündel $P_{SO}(M, g)$ der orientierten Orthonormalrahmen von (M, g), siehe Bemerkung 3.28 (1).

Der Übergang zu einem $\mathrm{Spin}(n)$-Prinzipalbündel ist schwieriger. Wir erinnern uns an Reduktionen der Strukturgruppe, siehe Definition 3.29 und an den Gruppenhomomorphismus $\tau \colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$ aus Proposition 5.28.

5.58. Definition. Es sei (M, g) eine orientierte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit orientiertem Rahmenbündel $\pi \colon P_{SO}(M, g) \to M$. Eine *Spinstruktur* auf M ist ein $\mathrm{Spin}(n)$-Prinzipalbündel $\tilde\pi \colon P \to M$ zusammen mit einer Reduktion der Strukturgruppe $P \to P_{SO}(M, g)$ zu $\tau \colon \mathrm{Spin}(n) \to SO(n)$. Wir nennen (M, g) *spin,* wenn eine Spinstruktur existiert.

5.59. Bemerkung. Nicht jede orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit besitzt eine Spinstruktur. Es gibt eine charakteristische Klasse, die *zweite Stiefel-Whitney-Klasse* $w_2(TM)$ des Tangentialbündels, so dass Spinstrukturen genau dann existieren, wenn $w_2(TM) = 0 \in H^2(M; \mathbb{Z}/2)$. In der Tat ist „spin“ also eine rein topologische Bedingung; auf die Riemannsche Metrik kommt es hier in Wirklichkeit nicht an. In Analogie dazu ist M genau dann orientierbar, wenn $w_1(TM) = 0 \in H^1(M; \mathbb{Z}/2)$.

So wie eine orientierte Mannigfaltigkeit mehrere Orientierungen tragen kann, kann eine spin Mannigfaltigkeit auch mehrere Spin-Strukturen tragen. Genauer gesagt, wirkt $H^0(M; \mathbb{Z}/2)$ einfach transitiv auf der Menge der Orientierungen, und $H^1(M; \mathbb{Z}/2)$ wirkt einfach transitiv auf der Menge der Spinstrukturen.

Die nächsthöhere analoge Bedingung ist übrigens die sogenannte „String“-Bedingung. Hierzu muss eine bestimmte charakteristische Klasse in $H^4(M; \mathbb{Z})$ verschwinden, und $H^3(M; \mathbb{Z})$ wirkt einfach transitiv auf der Menge der String-Strukturen.

Wir wollen die Spin-Bedingung $w_2(TM) = 0$ hier nicht weiter verfolgen. Stattdessen geben wir eine einfache Konstruktion an, die die Existenz von Spinstrukturen für unsere Zwecke sicherstellt.

5.60. Proposition. *Es sei (M, g) eine orientierbare n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $H \subset SO(n)$ eine zusammenhängende und einfach zusammenhängende Untergruppe. Dann existiert ein eindeutiger Gruppenhomomorphismus $\mu\colon H \hookrightarrow \mathrm{Spin}(n)$, so dass $\tau \circ \mu = \iota\colon H \to SO(n)$, und jede Reduktion der Strukturgruppe $F\colon P_H \to P_{SO}(M, g)$ induziert eine Spinstruktur*

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}\colon P_H \times_H \mathrm{Spin}(n) &= \bigl\{\, [p, g] \bigm| p \in P_H, g \in \mathrm{Spin}(n) \,\bigr\} \longrightarrow M \\ \textit{mit} \qquad [p, g] &= \bigl\{\, (ph^{-1}, \mu(h)g) \bigm| h \in H \,\bigr\} \\ \textit{und} \qquad [p, g] &\mapsto \pi(p) \in M \qquad \textit{sowie} \qquad [p, g] \mapsto F(p)\,\tau(g) \in P_{SO}(M, g)\ . \end{aligned}$$

Beweis. Nach dem Liftungssatz aus der Topologie existiert genau dann eine stetige Abbildung $\mu\colon H \to \mathrm{Spin}(n)$ mit $\tau \circ \mu = \iota$, wenn

$$\mathrm{im}\bigl(\iota_*\colon \pi_1(H, e) \to \pi_1(SO(n), e)\bigr) \subset \mathrm{im}\bigl(\tau_*\colon \pi_1(\mathrm{Spin}(n), e) \to \pi_1(SO(n), e)\bigr)\ .$$

Diese Bedingung ist erfüllt, da wir H als einfach zusammenhängend vorausgesetzt haben.

Da $\ker \tau = \{\pm 1\} \subset \mathrm{Spin}(n)$, existiert eine stetige Abbildung $\varepsilon\colon H \times H \to \{\pm 1\}$, so dass

$$\varepsilon(h, k) = \mu(h)\,\mu(k)\,\mu(hk)^{-1} \in \mathrm{Spin}(n)$$

für alle h, $k \in H$, denn da ι und τ Gruppenhomorphismen sind, gilt

$$\tau\bigl(\mu(h)\,\mu(k)\,\mu(hk)^{-1}\bigr) = \tau\bigl(\mu(h)\bigr)\,\tau\bigl(\mu(k)\bigr)\,\tau\bigl(\mu(hk)^{-1}\bigr) = \iota(h)\,\iota(k)\,\iota((hk)^{-1}) = e \in SO(n)\ .$$

Aber wir hatten H auch als zusammenhängend vorausgesetzt, und aufgrund ihrer Stetigkeit ist die Abbildung ε somit konstant mit Wert $1 = \varepsilon(e, e)$. Also ist μ ein Gruppenhomomorphismus.

Wir können daher $\tilde{\pi}\colon P = P_H \times_H \mathrm{Spin}(n) \to M$ wie in der Proposition definieren. Man kann zeigen, dass $\tilde{\pi}$ ein $\mathrm{Spin}(n)$-Prinzipalbündel mit Rechtswirkung $\rho([p, g], g') = [p, gg']$ ist. Auch die anderen Eigenschaften einer Spinstruktur lassen sich leicht überprüfen. □

5.61. Bemerkung. Es sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Wenn die Holonomiegruppe $\mathrm{Hol}(M, g)$ zusammenhängend ist, lässt sich M orientieren. Wenn $\mathrm{Hol}(M, g)$ darüberhinaus einfach zusammenhängend ist, dann konstruieren wir mit der obigen Proposition 5.60 eine Spin-Struktur auf M, ausgehend vom $\mathrm{Hol}(M, g)$-Prinzipalbündel $P_{\mathrm{Hol}}(M, g)$ aus Bemerkung 3.28 (3).

Unter den Gruppen, die transitiv auf S^{n-1} wirken, sind die Gruppen $SU(n) \subset SO(2n)$, $Sp(n) \subset SO(4n)$, $G_2 \subset SO(7)$ und $\mathrm{Spin}(7) \subset SO(8)$. Alle Mannigfaltigkeiten mit einer dieser Gruppen als Holonomiegruppe tragen somit eine durch die Holonomie induzierte Spin-Struktur.

5.62. Proposition und Definition. *Es sei $\pi\colon P \to M$ ein H-Prinzipalbündel und V ein $\Bbbk$-Vektorraum mit einer linearen H-Wirkung $\gamma\colon H \to \mathrm{Aut}_{\Bbbk}(V)$, für $\Bbbk = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$. Dann ist das zu P und V assoziierte $\Bbbk$-Vektorbündel definiert als*

$$\begin{aligned} \pi\colon P \times_H V &= \bigl\{\, [p, v] \bigm| p \in P, v \in V \,\bigr\} \longrightarrow M \\ \textit{mit} \qquad [p, v] &\longmapsto \pi(p)\ , \\ \textit{wobei} \qquad [p, v] &= \bigl\{\, (ph^{-1}, \gamma_h(v)) \bigm| h \in H \,\bigr\}\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Schnitte von $P \times_H V$ werden beschrieben durch

$$\Gamma(P \times_H V) \cong \bigl\{\hat{s}\colon P \to V \bigm| \hat{s}(ph^{-1}) = \gamma_h \hat{s}(p) \,\bigr\}\ . \tag{2}$$

Dabei entspricht eine Abbildung $\hat{s}\colon P \to V$ gerade einem Schnitt $s \in \Gamma(P \times_H V)$, wobei $s(\pi(p)) = [p, \hat{s}(p)]$.

Wir schreiben auch kurz $\hat{s}\colon P \to_H V$. Wir haben das Tangentialbündel eines symmetrischen Raumes $M = G/H$ in Abschnitt 3.4 bereits auf diese Weise mit Hilfe des H-Prinizpalbündels $G \to M$ aus Bemerkung 3.28 (2) beschrieben.

Beweis. Übung. $\square$

Wenn V eine Euklidische beziehungsweise Hermitesche Metrik trägt und H diese Metrik respektiert, dann erhalten wir ein Euklidisches beziehungsweise Hermitesches Vektorbündel.

Wir wollen jetzt H-Zusammenhänge auf assoziierten Vektorbündeln beschreiben. Im Falle eines trivialen Bündels $M \times V \to M$ bedeutet das, dass Parallelverschiebung stets durch Elemente von H wirken soll. Das erreichen wir, indem wir eine $\mathfrak{h}$-wertige 1-Form $\omega \in \Omega^1(M;\mathfrak{h})$ wählen und einen Zusammenhang definieren durch

$$\nabla_V s = V(s) + \gamma_{*\omega(V)} s$$

für alle $V \in \mathfrak{X}(M)$ und alle $s\colon M \to V$. Hierbei sei

$$\gamma_{*X} v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_{e^{tX}} v \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{h} \text{ und alle } v \in V\ .$$

Wir gehen jetzt zum trivialen H-Prinzipalbündel $\pi\colon P = M \times H \to M$ über und schreiben Schnitte s jetzt als $\hat{s}\colon P \to_H V$ wie in Definition 5.62 (2). Zu $s\colon M \to V$ erhalten wir also $\hat{s}\colon M \times H \to V$ mit $\hat{s}(x,h) = \gamma_h^{-1} s(x)$. Sei jetzt $\bar{V}$ ein π-verwandtes Vektorfeld zu $V \in \mathfrak{X}(M)$, dann machen wir den Ansatz

$$\widehat{\nabla_V s} = \bar{V}(\hat{s}) + \gamma_{*\omega(\bar{V})} \hat{s} \tag{5.12}$$

für eine $\mathfrak{h}$-wertige 1-Form $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{h})$, die das obige ω fortsetzt.

Sei zunächst $\bar{V}$ ein π-verwandtes Vektorfeld zu $0 \in fX(M)$, dann können wir $\bar{V}$ schreiben als Abbildung $\hat{V}\colon P \to \mathfrak{h}$, so dass

$$\bar{V}(x,h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(x, he^{t\hat{V}(x,h)}\big)\ .$$

Einsetzen in die obige Gleichung (5.12) liefert

$$\begin{aligned}
0 = \widehat{\nabla_V s} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \hat{s}\big(x, he^{t\hat{V}(x,h)}\big) + \gamma_{*\omega_{(x,h)}(\bar{V})}\hat{s}(x,h) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \gamma_{e^{-t\bar{V}(x,h)}} \gamma_h^{-1} s(x) + \gamma_{*\omega_{(x,h)}(\bar{V}(x,h))}\gamma_h^{-1} s(x) = \big(-\gamma_{*\bar{V}(x,h)} + \gamma_{*\omega_{(x,h)}(\bar{V}(x,h))}\big)\gamma_h^{-1} s(x)\ .
\end{aligned}$$

Das ist äquivalent zur Forderung

$$\omega(P_X) = X \in \mathfrak{h} \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{h}, \text{ wobei} \qquad P_X(x,h) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big(x, he^{tX}\big)\ .$$

Man beachte, dass sich verschiedene möglich Wahlen von $\bar{V}$ gerade um Vektorfelder unterscheiden, die π-verwandt zu $0 \in \mathfrak{X}(M)$ sind. Da wir solche Vektorfelder bereits betrachtet haben, dürfen wir jetzt annehmen, dass $\bar{V}$ ein H-äquivariantes Vektorfeld ist, für Rechtsmultiplikation $\rho_k = \rho(\,\cdot\,,k)$ mit $k \in H$ gilt also $\bar{V}(x,hk) = d\rho_k|_{(x,h)}\bar{V}(x,h)$. Die Bedingung (2) an $\hat{s}$ in Definition 5.62 lässt sich auch als $\hat{s} \circ \rho_k = \gamma_k^{-1} \circ \hat{s}$ schreiben. Für alle $k \in H$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla_V s}(x,h) = \gamma_k \widehat{\nabla_V s}(x,hk) &= \gamma_k \Big(\big(d\rho_k \bar{V}(x,h)\big)(\hat{s}) + \gamma_{*\omega_{(x,hk)}(d\rho_k\bar{V}(x,h))}\hat{s}(x,hk)\Big) \\
&= \gamma_k \Big(\bar{V}_{(x,h)}(\hat{s} \circ \rho_k) + \gamma_{*\rho_k^*\omega_{(x,hk)}(\bar{V}(x,h))}\gamma_k^{-1}\hat{s}(x,h)\Big) \\
&= \bar{V}_{(x,h)}(\hat{s}) + \gamma_{*\mathrm{Ad}_k(\rho_k^*\omega_{(x,hk)}(\bar{V}(x,h)))}\hat{s}(x,h)\ .
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit (5.12) liefert die Forderung

$$\omega_{(x,h)} = \mathrm{Ad}_k\big(\rho_k^*\omega_{(x,hk)}\big)\ .$$

Schließlich berechnen wir noch die Krümmung von ∇. Für $\bar V$, $\bar W \in \mathfrak{X}(P)$ zu V, $W \in \mathfrak{X}(M)$ und $\hat s\colon P \to_H V$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\widehat{F_{V,W}s} &= \Bigl(\bigl(\bar V + \gamma_{*\omega(\bar V)}\bigr)\bigl(\bar W + \gamma_{*\omega(\bar W)}\bigr) - \bigl(\bar W + \gamma_{*\omega(\bar W)}\bigr)\bigl(\bar V + \gamma_{*\omega(\bar V)}\bigr) - \bigl([\bar V, \bar W] + \gamma_{*\omega([\bar V,\bar W])}\bigr)\Bigr)(\hat s)\\ &= \bigl(\gamma_{*\bar V(\omega(\bar W))} - \gamma_{*\bar W(\omega(\bar V))} - \gamma_{*\omega([\bar V,\bar W])}\bigr)\hat s + \gamma_{*[\omega(\bar V),\omega(\bar W)]}\hat s = \gamma_{*(d\omega+\omega\wedge\omega)(\bar V,\bar W)}\hat s\;.\end{aligned}$$

Hierbei betrachten wir $\mathfrak{h}$ als Matrix-Lie-Algebra, so dass wir $\omega \wedge \omega \in \Omega^2(P;\mathfrak{h})$ bilden dürfen. Für beliebige Lie-Algebren lautet die korrekte Schreibweise $\frac{1}{2}[\omega,\omega]$.

Da alle H-Prinzipalbündel lokal trivial sind, übertragen sich die obigen Überlegungen auf beliebige assoziierte Vektorbündel und führen zu den folgenden Definitionen.

5.63. Definition. Es sei $\pi\colon P \to M$ ein H-Prinzipalbündel. Für alle $X \in \mathfrak{h}$ definieren wir ein Vektorfeld $X_P \in \mathfrak{X}(P)$ durch

$$X_P(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\rho\bigl(p, e^{tX}\bigr)\;. \tag{1}$$

Dann ist ein *Zusammenhang* auf P eine $\mathfrak{h}$-wertige 1-Form $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{h})$ mit den Eigenschaften

$$\omega(P_X) = X \qquad \text{für alle } X \in \mathfrak{h}\;, \tag{2}$$

$$\omega = \mathrm{Ad}_h \circ \rho_h^*\omega \qquad \text{für alle } h \in H\;. \tag{3}$$

Die *Krümmung* von ω ist definiert als

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega \quad \in \quad \Omega^2(P;\mathfrak{h})\;. \tag{4}$$

Allein aus der Tatsache, dass die Krümmung in unserer Vorüberlegung wohldefiniert ist, können wir ableiten, dass Ω in (4) verschwindet, wenn wir ein vertikales Vektorfeld wie X_P für $X \in \mathfrak{h}$ einsetzen. Außerdem ist Ω auch H-äquivariant, das heißt, es gilt $\Omega = \mathrm{Ad}_k \circ \rho_k^*\Omega$.

Mithilfe eines Zusammenhangs auf P erhalten wir jetzt Zusammenhänge auf allen assoziierten Vektorbündeln, wieder genau wie in der Vorüberlegung.

5.64. Proposition und Definition. *Es sei $\pi\colon P \to M$ ein H-Prinzipalbündel mit Zusammenhang $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{h})$. Es sei $\gamma\colon H \to \operatorname{Aut} V$ eine H-Darstellung und $P \times_H V \to M$ das assoziierte Vektorbündel. Der von ω* induzierte Zusammenhang ∇ *auf $P \times_H V$ ist definiert durch*

$$\widehat{\nabla_V s} = \bar V(\hat s) + \gamma_{*\omega(\bar V)}\hat s \tag{1}$$

für alle $V \in \mathfrak{X}(M)$ und dazu π-verwandte $\bar V \in \mathfrak{X}(P)$ und alle $\hat s\colon P \to_H V$. Seine Krümmung wird gegeben durch

$$\widehat{F_{V,W}s} = \gamma_{*\Omega(\bar V,\bar W)}\hat s\;. \quad \square \tag{2}$$

5.65. Bemerkung. Man kann die obige Konstruktion auch anders interpretieren. Ein Vektor $w \in T_pP$ heißt *vertikal,* wenn $w \in \ker(d_p\pi)$ gilt. Wegen Definition 5.63 (2) können wir $w = X_P(p)$ für $X = \omega(w) \in \mathfrak{h}$ schreiben. Wir nennen einen Vektor $w \in T_pP$ *horizontal,* wenn $\omega(w) = 0$ gilt, und definieren folglich den *Horizontalraum* zu ω als $T_p^HP = \ker(\omega_p)$. Mit Hilfe von ω zerlegen wir jeden Vektor $w \in T_pP$ in einen vertikalen Anteil $X_P(p)$ mit $X = \omega_p(w) \in \mathfrak{h}$ und einen horizontalen Anteil $w - X_P(p) \in T_p^HP$.

Umgekehrt können wir ein ρ-invariantes Untervektorbündel $T^HP \subset TP$ so festlegen, dass $TP = T^HP \oplus \ker(d\pi)$. Dann existiert genau ein Zusammenhang $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{h})$, so dass $T^HP = \ker(\omega)$.

Für einen Vektor $v \in T_{\pi(p)}M$ existiert wegen Definition 5.63 (2) genau ein π-verwandter horizontaler Vektor $w \in T_p^HP$, der *horizontale Lift* von v. Dann entspricht $\nabla_v s$ nach Definition 5.64 (1) gerade der Ableitung von $\hat s$ nach dem horizontalen Lift von v.

Wäre das Untervektorbündel $T^H P \subset TP$ involutiv im Sinne von Definition 5.5, so wäre die Lie-Klammer zweier horizontaler Vektorfelder wieder horizontal, und die Krümmung des Zusammenhangs ∇ würde wegen Natürlichkeit der Lie-Klammer verschwinden. Die Krümmung Ω des Zusammenhangs ω auf P misst also gerade, wie nicht-involutiv das Bündel $T^H P$ ist.

Man kann umgekehrt geeignete Zusammenhänge auf assoziierten Vektorbündeln benutzen, um Zusammenhänge auf den zugehörigen Prinzipalbündeln festzulegen.

5.66. Lemma. *Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und H eine Lie-Gruppe, so dass $\mathrm{Hol}_p(M,g) \subset H \subset O(T_pM)$. Dann existiert ein H-Prinzipalbündel $\pi\colon P \to M$ mit Zusammenhang ω, so dass $TM \cong P \times_H (T_pM)$ gilt und ω gerade den Levi-Civita-Zusammenhang auf TM induziert. Das Paar (P,ω) ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir skizzieren den Beweis für den Fall, dass H gerade die Holonomiegruppe von (M,g) ist. Das zugehörige Prinzipalbündel $\pi\colon P = P_{\mathrm{Hol}} \to M$ haben wir bereits in Bemerkung 3.28 (3) konstruiert. Die Faser P_q über $q \in M$ ist die Teilmenge von $\mathrm{Hom}(T_pM, T_qM)$ aus Vektorraumisomorphismen, die durch Parallelverschiebungen P_γ gegeben werden. Wir erhalten einen kanonischen Isomorphismus

$$P_{\mathrm{Hol}} \times_{\mathrm{Hol}_p(M,g)} (T_pM) \longrightarrow TM \qquad \text{mit} \qquad [P_\gamma, v] \longmapsto P_\gamma(v) \in T_{\gamma(1)}M = T_{\pi(P_\gamma)}M \;.$$

Sei $\beta\colon [0,1] \to M$ eine Schleife im Punkt p und P_β das zugehörige Element von $\mathrm{Hol}_p(M,g)$. Dann wird $[P_\gamma P_\beta, P_\beta^{-1}(v)] = [P_{\beta\gamma}, P_\beta^{-1}(v)]$ wieder auf $P_\gamma(v)$ abgebildet, der obige Isomorphismus ist also wohldefiniert.

Wir definieren ein horizontales Unterbündel $T^H P_{\mathrm{Hol}}$, das gerade die Geschwindigkeitsbvektoren von Kurven in P der Form $t \mapsto P_{\gamma|_{[0,t]}}$ enthält. Dieses horizontale Unterbündel ist $\mathrm{Hol}_p(M,g)$-invariant und definiert nach der obigen Bemerkung einen Zusammenhang $\omega \in \Omega^1(P;\mathfrak{hol})$.

Falls wir ein weiteres $\mathrm{Hol}_p(M,g)$-Prinzipalbündel $\pi'\colon P' \to M$ mit den gleichen Eigenschaften gegeben haben, können wir einen Isomorphismus $P \to P'$ konstruieren, indem wir P_γ abbilden auf Kurven $\bar\gamma\colon [0,1] \to P'$ mit $\bar\gamma(0) = p_0' \in P_p'$ fest, so dass $\pi' \circ \bar\gamma = \gamma$ und $\omega'(\dot{\bar\gamma}) = 0$.

Für jede andere Lie-Gruppe H wie in der Proposition betrachten wir das Prinzipalbündel $P_H = P \times_{\mathrm{Hol}_p(M,g)} H \to M$. Dann gilt $P \subset P_H$, und wir können das horizontale Unterbündel $T^H P$ äquivariant auf ganz P_H fortsetzen. □

Insbesondere induziert der Levi-Civita-Zusammenhang stets einen Zusammenhang auf dem orientierten orthonormalen Rahmenbündel $P_{SO}(M,g)$ einer n-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit M. Falls $P_{\mathrm{Spin}} \to P_{SO}$ eine Spin-Struktur ist, ziehen wir den zugehörige Zusammenhang zurück zu $\omega \in \Omega^1(P_{\mathrm{Spin}};\mathfrak{spin}(n))$. Falls (M,g) eine kleinere Holonomiegruppe besitzt, erhalten wir den gleichen Zusammenhang auch auf dem Weg über das Bündel P_{Hol}.

5.67. Proposition und Definition. *Es sei (M,g) eine orientierte n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Spinstruktur $P_{\mathrm{Spin}} \to P_{SO}$ und dem vom Levi-Civita-Zusammenhang auf TM induzierten Zusammenhang $\omega \in \Omega^1(P_{\mathrm{Spin}};\mathfrak{spin}(n))$. Dann ist das assoziierte Vektorbündel*

$$\pi\colon \Sigma M = P_{\mathrm{Spin}} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \Sigma_n \longrightarrow M$$

mit induzierter Metrik und induziertem Zusammenghang ein Dirac-Bündel im Sinne von Definition 5.56. Es heißt das Spinorbündel *zur Spinstruktur P_{Spin}. Schnitte von ΣM heißen* Spinoren *auf M.*

Man beachte, dass Spinoren im Gegensatz zu Vektoren immer Felder auf M bezeichnen; diese Terminologie lehnt sich an die Physik an.

Beweis. Wir definieren eine Clifford-Multiplikation c von $TM = P_{\mathrm{Spin}} \times_{\mathrm{Spin}(n)} \mathbb{R}^n$ auf ΣM durch

$$[p,v]\cdot[p,s] = [p, v\cdot s]$$

für alle $p \in P_{\mathrm{Spin}(n)}$, alle $v \in \mathbb{R}^n$ und alle $s \in \Sigma_n$, dabei bezeichne „ $\cdot$ “ die Clifford-Multiplikation aus Proposition 5.31. Dort haben wir auch gezeigt, dass $\sigma_g(v\cdot s) = \tau_g(v)\cdot\sigma_g(s)$. Es folgt die Wohldefiniertheit, denn

$$[pg^{-1}, \tau_g(v)]\cdot[pg^{-1},\sigma_g(s)] = [pg^{-1}, \tau_g(v)\cdot\sigma_g(s)] = [pg^{-1}, \sigma_g(v\cdot s)] = [p, v\cdot s]\ .$$

Die Clifford-Relation (1) und die Schiefsymmetrie (2) in Definition 5.56 ergeben sich aus Proposition 5.30.

Zur Produktregel (3) wählen wir $\bar V \in \mathfrak{X}(P)$ und $\mathrm{Spin}(n)$-äquivariante Abbildungen $\widehat W\colon P \to \mathbb{R}^n$ und $\hat s\colon P \to \Sigma_n$ und berechnen

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla_V(W\cdot s)} &= \bar V(\widehat W\cdot\hat s) + \sigma_{*\omega(\bar V)}(\widehat W\cdot\hat s)\\ &= \bar V(\widehat W)\cdot\hat s) + \tau_{*\omega(\bar V)}(\widehat W)\cdot\hat s + \widehat W\cdot\bar V(\hat s) + \widehat W\cdot\sigma_{*\omega(\bar V)}(\hat s) = \widehat{\nabla_V W}\cdot\hat s + \widehat W\cdot\widehat{\nabla_V s}\ .\end{aligned}$$

Im mittleren Schritt haben wir die Ableitung der Gleichung $\sigma_g(v\cdot s) = \tau_g(v)\cdot\sigma_g(s)$ in Richtung von g im Punkt $1 \in \mathrm{Spin}(n)$ benutzt. □

5.68. Proposition. *Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit einer Spin-Struktur, und es sei $(e_1,\dots,e_n)$ ein lokaler orthonormaler Rahmen von TM. Dann hat die Krümmung des Spinorbündels die Form*

$$F^{\Sigma M}_{U,V}s = \frac14\sum_{i,j}\langle R_{U,V}e_i, e_j\rangle\, e_i\cdot e_j\cdot s\ .$$

Beweis. Der obige Rahmen definiert einen Punkt in P_{SO}. Der Einfachheit halber arbeiten wir in einem der zwei Urbilder dieses Punktes in P_{Spin}, so dass wir unten den gleichen Rahmen weiter benutzen dürfen.

Wir wenden Proposition 5.64 (2) zunächst auf das Tangentialbündel an. Seien $\bar U$, $\bar V \in \mathfrak{X}(P)$ verwandt zu U, $V \in \mathfrak{X}(M)$, und sei $\hat W\colon P \to \mathbb{R}^n$ äquivariant unter $\mathrm{Spin}(n)$. Dann ist $\Omega(\bar U,\bar V) \in \mathfrak{spin}(n) \subset C\ell(n)$ eindeutig bestimmt durch

$$\widehat{R_{U,V}W} = \tau_{*\Omega(\bar U,\bar V)}W = \Omega(\bar U,\bar V)\cdot\hat W - \hat W\cdot\Omega(\bar U,\bar V)\ .$$

Diese Relation wird genau erfüllt von

$$\Omega(\bar U,\bar V) = \frac14\sum_{i,j}\langle R_{U,V}e_i,e_j\rangle e_i\cdot e_j\ ,$$

denn

$$\frac14\sum_{i,j}\langle R_{U,V}e_i,e_j\rangle(e_i\cdot e_j\cdot e_k - e_k\cdot e_i\cdot e_j) = -\frac12\sum_i\langle R_{U,V}e_i,e_k\rangle e_i + \frac12\sum_j\langle R_{U,V}e_k,e_j\rangle e_j = R_{U,V}e_k\ .$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn

$$\widehat{F^{\Sigma M}_{U,V}s} = \sigma_{*\Omega(\bar U,\bar V)}\hat s = \frac14\sum_{i,j}\langle R_{U,V}e_i,e_j\rangle e_i\cdot e_j\cdot\hat s\ .$$ □

5.69. Satz (Hitchin, Friedrich). *Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit einem parallelen Spinor sind Ricci-flach.*

Der folgende Beweis benutzt ähnliche Methoden wie der von Proposition 4.65.

Beweis. Es sei $s \in \Gamma(\Sigma M)$ ein Spinorfeld auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g). Wir betrachten die ΣM-wertige 1-Form

$$\alpha_s = \sum_i e_i \cdot F^{\Sigma M}_{\cdot\,,e_i} s = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} \langle R_{\cdot\,,e_i} e_j, e_k \rangle \, e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot s \in \Omega^1(M; \Sigma M) \, ,$$

hierbei sei $(e_1, \dots, e_n)$ wieder ein lokaler orthonormaler Rahmen. Wenn s parallel ist, folgt $F^{\Sigma M} s = 0$ und daher $\alpha_s = 0$ mit der Krümmungsformel aus Proposition 5.68 für den Spin-Zusammenhang.

Wir benutzen die erste Bianchi-Identität für den Riemannschen Krümmungstensor und berechnen

$$\begin{aligned}
0 &= -\sum_{i,j,k} \langle R_{e_i,e_j} e_k + R_{e_j,e_k} e_i + R_{e_k,e_i} e_j, x \rangle \, e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot s \\
&= \sum_{i,j,k} \langle R_{x,e_i} e_j, e_k \rangle \, (e_i \cdot e_j \cdot e_k + e_j \cdot e_k \cdot e_i + e_k \cdot e_i \cdot e_j) \cdot s \\
&= 3 \sum_{i,j,k} \langle R_{x,e_i} e_j, e_k \rangle e_i \cdot e_j \cdot e_k \cdot s \\
&\qquad - 2 \sum_{i,j} \langle R_{x,e_i} e_j, e_i \rangle e_j \cdot s + 2 \sum_{i,k} \langle R_{x,e_i} e_i, e_k \rangle e_k \cdot s \\
&\qquad - 2 \sum_{i,j} \langle R_{x,e_i} e_j, e_i \rangle e_j \cdot s + 2 \sum_{i,j} \langle R_{x,e_i} e_j, e_j \rangle e_i \cdot s \\
&= 12 \alpha_s(x) + 6 \sum_i \operatorname{ric}(x, e_i) \, e_i \cdot s \, .
\end{aligned}$$

Da die Ricci-Krümmung symmetrisch ist, folgt $\operatorname{ric} = 0$ aus $\alpha_s = 0$, insbesondere also auch aus der Existenz eines parallelen Spinors s. □

5.7. Bergers Liste irreduzibler Holonomien

In diesem Abschnitt betrachten wir die einzelnen Holonomiegruppen auf Bergers Liste. Wir werden zwei Typen kennen lernen: zum einen Holonomiegruppen symmetrischer Räume vom Rang 1, zum anderen Holonomiegruppen, die (zumindest lokal) stets parallele Spinoren und daher $\operatorname{ric} = 0$ implizieren.

5.70. Satz (Berger). *Es sei (M, g) eine zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit irreduzibler eingeschränkter Holonomie $(T_pM, \operatorname{Hol}^0_p(M, g))$. Dann ist entweder (M, g) lokalsymmetrisch, oder die Holonomie ist von einem der folgenden Typen*

$\operatorname{Hol}^0_p(M, g)$		$\dim M$	*Kalibrierungen*	N	*Name*
$SO(n)$	$n \geq 2$	n			*Allgemeiner Fall*
$U(m)$		$2m$	ω		*Kähler*
$Sp(k) \cdot Sp(1)$		$4k$	ϑ		*Quaternionisch Kähler*
$SU(m)$	*m gerade* *$m \geq 3$ ungerade*	$2m$	$\omega, \operatorname{Re}\Omega, \operatorname{Im}\Omega$	$(2,0)$ $(1,1)$	*Calabi-Yau*
$Sp(k)$		$4k$	$\omega_I, \omega_J, \omega_K$	$(k+1, 0)$	*Hyperkähler*
G_2		7	φ, ψ	1	
$\operatorname{Spin}(7)$		8	Ψ	$(1,0)$	

Hier bezeichnet $Sp(k) \cdot Sp(1)$ die Lie-Gruppe $Sp(k) \times Sp(1)/\{(1,1),(-1,-1)\}$. Einelementige Lie-Gruppen haben wir ausgeschlossen, da sie zu flachen, also lokal symmetrischen Räumen gehören. Für kleine Dimensionen gibt es doppelte Einträge:

$$SO(2) \cong U(1)\;, \qquad Sp(1) \cdot Sp(1) \cong SO(4)\;, \qquad \text{sowie} \qquad Sp(1) \cong SU(2)\;,$$

allerdings würde man allgemeine Riemannsche 4-Mannigfaltigkeiten üblicherweise nicht quaternionisch Kähler nennen. Für die exzeptionellen Holonomiegruppen G_2 und $\mathrm{Spin}(7)$ gibt es keine speziellen Namen, man spricht einfach von G_2- beziehungsweise $\mathrm{Spin}(7)$-Mannigfaltigkeiten. In der Spalte „Kalibrierungen“ haben wir ein Erzeugendensystem des Rings der parallelen Differentialformen aufgelistet, und die Spalte „N“ erklären wir weiter unten.

Beweis. Es sei (M,g) Riemannsche Mannigfaltigkeit mit irreduzibler eingeschränkter Holonomie. Wir haben in Satz 5.44 bereits gesehen, dass $\mathrm{Hol}_p^0(M,g)$ transitiv auf der Einheitssphäre in T_pM wirkt, wenn (M,g) nicht lokal symmetrisch ist. In Beispiel 3.15 haben wir alle zusammenhängenden Unter-Lie-Gruppen von $SO(n)$ aufgelistet, die transitiv auf S^{n-1} wirken. Den Rest des Beweises skizzieren wir nur.

Zusätzlich zu den oben genannten Gruppen kommen noch die Gruppen $Sp(k) \cdot U(1)$ und $\mathrm{Spin}(9)$ vor. Berger konnte bereits zeigen, dass $Sp(k) \cdot U(1)$ für $k \geq 2$ nicht als Holonomiegruppe in Frage kommt (und es gilt $Sp(1) \cdot U(1) \cong U(2)$). Die Gruppe $\mathrm{Spin}(9)$ tauchte in Bergers ursprünglicher Liste noch auf. Alekseevski sowie Brown und Gray konnten später zeigen, dass alle Riemannschen Mannigfaltigkeiten mit Holonomie $\mathrm{Spin}(9)$ lokal symmetrisch sind, und zwar bis auf Skalierung lokal isometrisch zu $\mathbb{O}P^2 \cong F_4/\mathrm{Spin}(9)$ oder dem dazu dualen Raum $\mathbb{O}H^2$. $\square$

5.71. Bemerkung. Bemerkung 5.43 legt nahe, die obige Liste in zwei Gruppen zu unterteilen. Zunächst betrachten wir alle Holonomiegruppen, die auch bei symmetrischen Räumen vom Rang 1 auftreten, das heißt bei Sphären und projektiven Räumen, sowie den zugehörigen dualen symmetrischen Räumen. Da die Holonomiegruppe $\mathrm{Spin}(9)$ ausgeschlossen wurde, listen wir dort nur die Gruppen $SO(n)$, $U(m)$ und $Sp(k) \cdot Sp(1)$ auf.

Es fällt auf, dass die verbleibenden Holonomiegruppen alle einfach zusammenhängend sind. Nach Proposition 5.60 tragen alle Mannigfaltigkeiten mit einer dieser Holonomiegruppen automatisch eine Spin-Struktur. Wir wollen im Folgenden zeigen, dass solche Mannigfaltigkeiten immer mindestens einen parallelen Spinor besitzen und daher nach Satz 5.69 Ricci-flach sind.

Wenn die eingeschränkte Holonomie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M,g) irreduzibel ist, gibt es also die folgenden drei Fälle.

(1) Die Holonomie hat Rang ≥ 2, und (M,g) ist lokal symmetrisch.
(2) Die Holonomiegruppe gehört zu einem symmetrischen Raum vom Rang 1.
(3) Es gibt (lokal) parallele Spinorfelder, und (M,g) ist Ricci-flach.

Mannigfaltigkeiten vom letzten Typ sind in der theoretischen Physik von Bedeutung. Dort geht man davon aus, dass die Raum-Zeit lokal die Gestalt $\mathbb{R}^{3,1} \times M$ hat, wobei M eine kompakte Ricci-flache Mannigfaltigkeit der reellen Dimension 6 (String-Theorie), 7 (M-Theorie) oder 8 (F-Theorie) ist. Ein paralleler Spinor führt dabei zu einer sogenannten *Super-Symmetrie.*

Zum heutigen Zeitpunkt kennt man übrigens keine vollständigen Ricci-flachen Mannigfaltigkeiten mit allgemeiner eingeschränkter Holonomie $SO(n)$. Es gibt aber auch kein allgemeines Argument, dass Ricci-flache Mannigfaltigkeiten spezielle Holonomie haben, etwa weil sie einen parallelen Spinor tragen.

5.72. Proposition. *Es sei (M,g) eine einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit mit irreduzibler Holonomie. Dann trägt (M,g) genau dann einen parallelen Spinor, wenn (M,g) Holonomie $SU(m)$, $Sp(k)$, $\mathrm{Spin}(7)$ oder G_2 hat. Insbesondere sind alle Mannigfaltigkeiten mit einer dieser Holonomiegruppen Ricci-flach.*

Wenn ein (lokales) Riemannsches Produkt einen parallelen Spinor trägt, dann lässt sich zeigen, dass jeder der Faktoren einen parallelen Spinor trägt. Die Dimensionen der Räume paralleler Spinoren in $\Gamma(\Sigma^{\pm}M)$ haben wir oben in der Spalte „N“ eingetragen, falls $\mathrm{Hol}_p(M,g)$ einfach zusammenhängend ist. Nur im Falle G_2 steht dort nur eine Zahl, denn G_2-Mannigfaltigkeiten M sind ungerade-dimensional, also gibt es keine Aufspaltung von ΣM in ein positives und ein negatives Unterbündel.

Beweis. Es sei $n = \dim M$, und wir nehmen an, dass M eine Spin-Struktur trägt. Die Holonomiegruppe induziert eine Untergruppe $\tau^{-1}(\mathrm{Hol}_p(M,g)) \subset \mathrm{Spin}(n)$, die gerade das Verhalten von Spinoren unter Parallelverschiebung beschreibt. Ein paralleler Spinor auf M entspricht nach dem Holonomieprinzip gerade einem Element des Spinormoduls $\Sigma \cong \Sigma_p M$, das unter $\tau^{-1}(\mathrm{Hol}_p(M,g))$ invariant ist. Um der Spin-Bedingung aus dem Wege zu gehen, betrachten wir im Folgenden nur eine Umgebung U eines festen Punktes $p \in M$, die eine Spin-Struktur trägt.

Zu „$\Longrightarrow$“ müssen wir zeigen, dass die Isotropiegruppen symmetrischer Räume keine Elemente von Σ invariant lassen. Das folgt aus Satz 5.69, denn alle symmetrischen Räume sind Einstein-Mannigfaltigkeiten mit nicht verschwindender Einstein-Konstante, das heißt, sie haben Ricci-Krümmung $\mathrm{ric} = c\,g$ mit $c \neq 0$.

Zu „$\Longleftarrow$“ müssen wir invariante Elemente von Σ bestimmen. Das werden wir bei der Besprechung der einzelnen Holonomiegruppen tun. Sobald wir ein $\mathrm{Hol}_p(M,g)$-invariantes Element von $\Sigma_p M$ gefunden haben, setzen wir es zu einem parallelen Spinor fort und schließen mit Satz 5.69, dass $\mathrm{ric} = 0$. □

Als letztes erinnern wir uns an den Satz 5.11 von Cheeger und Gromoll und seine Konsequenzen. In Bemerkung 5.21 haben wir gesehen, dass Ricci-flache Mannigfaltigkeiten ohne flache lokale de Rham-Faktoren stets endliche Fundamentalgruppe haben. Aus den Sätzen von Hurewicz und de Rham folgt dann insbesondere $H^1_{\mathrm{dR}}(M) = 0$. Außerdem hatten wir in Folgerung 5.23 gesehen, dass nicht kompakte Ricci-flache ohne flache lokale de Rham-Faktoren im Unendlichen zusammenhängend sind. Diese Konsequenzen betreffen also insbesondere alle Mannigfaltigkeiten mit Holonomie $SU(m)$, $Sp(k)$, G_2 sowie $\mathrm{Spin}(7)$.

5.7.a. Kähler-Mannigfaltigkeiten. Wir wissen aus Proposition 4.13, dass eine Riemannsche Mannigfaltigkeit genau dann eine Kähler-Struktur trägt, wenn ihre Holonomiegruppe zu einer Untergruppe von $U(m) \subset O(2m)$ konjugiert ist. Wenn eine Kähler-Mannigfaltigkeit (M,h) irreduzibel ist, gibt es folgende Möglichkeiten.

(1) Die Mannigfaltigkeit (M,g) ist ein Hermitesch symmetrischer Raum G/H, siehe Bemerkung 4.9, insbesondere gibt es eine H-invariante fast komplexe Struktur auf $\mathfrak{p}$. In Beispiel 4.10 haben wir uns unter anderem komplexe Grassmann-Mannigfaltigkeiten und die Quadrik $Q = SO(2m+2)/SO(2m) \times SO(2)$ angeschaut.

(2) Die Mannigfaltigkeit hat eine der Holonomiegruppen
$$U(m)\,, \qquad SU(m) \subset U(m) \qquad \text{oder} \qquad Sp(k) \subset SU(2m) \subset U(2m)\,.$$
Zu allgemeinen Kähler-Mannigfaltigkeiten haben wir in Kapitel 4 bereits genug gesagt. Die Spezialfälle $SU(m)$ und $Sp(k)$ betrachten wir in den folgenden Abschnitten näher.

Wir erinnern an die Wirtinger-Ungleichung 4.59, wonach $\frac{\omega^k}{k!}$ für $1 \leq k \leq m$ eine Kalibrierung ist. Die zugehörigen kalibrierten Untermannigfaltigkeiten sind gerade die komplexen Untermannigfaltigkeiten von M.

5.7.b. Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten. Wir haben in Folgerung 4.70 gesehen, dass die Holonomiegruppe einer Calabi-Yau-Mannigfaltigkeit (M,h) stets konjugiert zu einer Untergruppe H

von $SU(m) \subset SO(2m)$ ist. Zusätzlich zu den Kalibrierungen $\frac{\omega^k}{k!}$, die uns die Kähler-Form vorgibt, erhalten wir auf noch die Kalibrierungen $\operatorname{Re}\Omega$, $\operatorname{Im}\Omega$ aus der holomorphen Volumenform. Da $\Omega \wedge \omega = 0$ gilt, erhalten wir keine weiteren Kalibrierungen.

Da die Lie-Gruppe $SU(m)$ (im Gegensatz zu $U(m)$) einfach zusammenhängend ist, sind Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten nach Proposition 5.60 immer spin. Wir haben in den Übungen gesehen, dass wir den Spinormodul Σ_{2m} beschreiben können als $\Lambda^{0,\bullet}V^*$, wenn wir eine fast komplexe Struktur auf $\mathbb{R}^{2m}$ vorgeben. Tatsächlich haben wir natürliche Isomorphismen

$$\Sigma M \cong \Lambda^{0,\bullet}(M) \cong \Lambda^{\bullet,0}(M) \; .$$

Als parallele komplexe Spinoren erhalten wir also 1 sowie Ω und $\bar{\Omega}$. Wenn m gerade ist, erhalten wir zwei linear unabhängige parallele Spinoren in Σ^+M. Falls m ungerade ist, liegt ein paralleler Spinor (1) in $\Gamma(\Sigma^+M)$, der andere (Ω) in $\Gamma(\Sigma^-M)$.

5.7.c. Hyperkähler-Mannigfaltigkeiten. Die Holonomiegruppe $Sp(k)$ wirkt vermöge der Identifikation $\mathbb{H}^k \cong \mathbb{R}^{4k}$. Insbesondere liefert jedes imaginäre Einheitsquaternion durch skalare Multiplikation eine komplexe Struktur auf jeder Mannigfaltigkeit (M,g) mit $\operatorname{Hol}(M,g) \subset Sp(k)$. Jede solche komplexe Struktur J liefert eine Faktorisierung $Sp(k) \to SU_J(2k) \to SO(4k)$, wobei die Untergruppen $SU_J(2k) \subset SO(4k)$ zueinander konjugiert, aber nicht gleich sind. Insbesondere liefert jede komplexe Struktur eine Calabi-Yau- und insbesondere auch eine Kähler-Struktur auf M, daher der Name „Hyperkähler".

Wir fixieren drei paarweise senkrechte imaginäre Einheitsquaternionen I, J, K mit $IJK = -1$, so dass die üblichen Quaternionen-Identitäten gelten. Wir betrachten $\omega_I = g(\,\cdot\,, I\,\cdot\,)$ als Kähler-Form. Für die analog definierten Formen ω_J, ω_K finden wir, dass

$$\big(\omega_J + i\omega_K\big)(v + iJv2, w) = g(v, Jw) - g(Iv, Kw) + ig(Iv, Jw) + ig(v, Kw) = 0 \; ,$$

wobei wir g komplex bilinear fortgesetzt haben und ausnutzen, dass I, J und K schiefsymmetrische Endomorphismen sind. Da $v+iJv$ ein antiholomorpher Vektor ist, folgt $\omega_J+i\omega_K \in \Omega^{2,0}(M)$, und ein geeignetes Vielfaches der k-ten Potenz definiert eine holomorphe Volumenform. Somit haben wir die zu $Sp(m) \subset SU_I(m) = SU(m)$ gehörige Calabi-Yau-Struktur beschrieben. Insgesamt erzeugen ω_I, ω_J und ω_K den Ring aller parallelen Differentialformen.

Da Hyperkähler-Mannigfaltigkeiten Calabi-Yau sind, tragen sie eine induzierte Spinstruktur, und der Raum der parallelen Spinoren ist gerade der Raum der parallelen $(p,0)$-Formen. Dieser Raum wird von Potenzen von $\omega_J + i\omega_K$ erzeugt, hat also Dimension $k+1$.

5.7.d. Quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeiten. Diese Bezeichnung ist irreführend, denn diese Räume tragen in der Regel keine Kähler-Struktur. Ähnlich wie bei Hyperkähler-Mannigfaltigkeiten trägt T_pM an jedem Punkt $p \in M$ eine ausgezeichnete Menge komplexer Strukturen, die sich zueinander wie Erzeuger der imaginären Quaternionen verhalten. Allerdings sind diese komplexen Strukturen für sich genommen nicht parallel. Stattdessen existiert ein paralleles, dreidimensionales Untervektorbündel $\mathcal{I} \subset \operatorname{End}(TM)$, das alle diese komplexen Strukturen enthält.

Auch sind quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeiten nicht Ricci-flach, sie sind aber immerhin Einstein Mannigfaltigkeiten, das heißt, es gilt $\operatorname{ric} = cg$ mit *Einstein-Konstante* $c \in \mathbb{R}$. Wenn (M,g) nicht Hyperkähler ist, gilt $c \neq 0$.

Wir erhalten auch keine kalibrierenden 2-Formen. Seien allerdings I, J, K ein lokaler Rahmen von $\mathcal{I}$ von $\operatorname{End}(TM)$, dann können wir eine parallele 4-Form

$$\vartheta = \omega_I^2 + \omega_J^2 + \omega_K^2 \in \Omega^4(M)$$

definieren, die sogenannte Kraines-Form. Sie erzeugt den Ring der parallelen Differentialformen.

Zu jeder kompakten, einfachen Lie-Gruppe G existiert genau ein quaternionisch-Kähler symmetrischer Raum G/H, der sogenannte *Wolf-Raum,* und sein nicht-kompakter Dualraum. Beispiele sind $\mathbb{H}P^k$ zur Gruppe $Sp(k+1)$ oder die orientierte Grassmann-Mannigfaltigkeit $\tilde{G}_4(\mathbb{R}^{k+4})$ zur Lie-Gruppe $SO(k+4)$. Tatsächlich ist keine vollständige quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit mit Einstein-Konstante $c > 0$ bekannt, die nicht symmetrisch ist. Auf der anderen Seite gibt es aber vollständige quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeiten mit Einstein Konstante $c < 0$, so dass die Holonomiegruppe $Sp(k) \cdot Sp(1)$ zu Recht in Bergers Liste auftaucht.

Schließlich sei (M, g) eine quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $4k$ mit Einstein-Konstante $c > 0$. Dann bildet das Einheitssphärenbündel $S\mathcal{I}$ der ausgezeichneten komplexen Strukturen selbst eine Kähler-Mannigfaltigkeit der komplexen Dimension $2k+1$, den sogenannten *Twistor-Raum* von M. Beispielsweise ist der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^{2k+1}$ gerade der Twistorraum des quaternionisch projektiven Raumes $\mathbb{H}P^k$. Dadurch lassen sich manche Fragen über quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeiten auf komplexe oder gar algebraische Geometrie zurückspielen.

5.7.e. G_2-Mannigfaltigkeiten. Die gesamte Geometrie einer G_2-Mannigfaltigkeit wird durch eine 3-Form $\varphi \in \Omega^3(M)$ kodiert. Sei $\mathbb{R}^7 \cong \operatorname{Im} \mathbb{O}$, dann setzen wir

$$\varphi(u, v, w) = \langle u \cdot v, w \rangle ,$$

wobei „·“ das Oktaven-Produkt bezeichne. Diese Form ist nicht ausgeartet im Sinne von Definition 4.4, das heißt, zu zwei linear unabhängigen Vektoren u, $v \in \mathbb{R}^7$ existiert stets ein $w \in \mathbb{R}^7$ mit $\varphi(u, v, w) \neq 0$. Da φ invariant unter der Automorphismen-Gruppe G_2 ist, erhalten wir auf jeder G_2-Mannigfaltigkeit eine solche 3-Form φ, indem wir T_pM mit $\operatorname{Im} \mathbb{O}$ identifizieren. Diese Form ist parallel und definiert eine Kalibrierung (die Hodge-duale Form $\psi = *\varphi \in \Omega^4(M)$ ist ebenfalls eine Kalibrierung).

Eine nicht ausgeartete 3-Form φ legt sowohl eine Orientierung als auch eine symmetrische Bilinearform g auf $\mathbb{R}^7$ fest, so dass

$$6g(u, v)\, d\mathrm{vol}_g = \iota_u \varphi \wedge \iota_v \varphi \wedge \varphi , \tag{5.13}$$

hierbei bezeichne $d\mathrm{vol}_g$ die durch Orientierung und g festgelegte Volumenform. Zur Begründung schreiben wir die rechte Seite lokal als $6h \otimes \alpha$, wobei h eine symmetrische 2-Form und $\alpha > 0$ eine positive Volumenform bezüglich einer gewählten Orientierung sei. Dann definiert h ebenfalls eine Volumenform $d\mathrm{vol}_h = f\alpha$ für eine Funktion f, und man kann zeigen, dass $f \neq 0$. Falls f negativ ist, ändern wir die Orientierung und setzen $\alpha = -\alpha$. Wir machen den Ansatz $g = f^{2a}\, h$, dann folgt

$$6g \otimes d\mathrm{vol}_g = 6f^{2a} h\, f^{7a}\, d\mathrm{vol}_h = 6f^{9a+1} h \otimes \alpha ,$$

also liefert $g = f^{\frac{2}{9}} h$ die gesuchte Bilinearform.

Die Menge der nicht ausgearteten 3-Formen ist offen in $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$ und zerfällt in vier Komponenten, von denen zwei zu Skalarprodukten und entgegengesetzten Orientierungen führen, während die anderen zwei zu Metriken der Signatur $(3, 4)$ führen. Die Gruppe $GL^+(\mathbb{R}, 7)$ der invertierbaren Matrizen mit positiver Determinante wirkt transitiv auf jeder der Komponenten, und die Isotropiegruppe ist jeweils die kompakte Lie-Gruppe G_2 beziehungsweise eine ihrer nicht-kompakten Formen. Wenn wir eine Orientierung vorgeben, nennen wir eine 3-Form *positiv,* wenn sie zu einer Riemannschen Metrik g mit passender Orientierung führt.

In Analogie zu fast komplexen Mannigfaltigkeiten können wir Mannigfaltigkeiten (M, φ) betrachten, bei denen φ überall positiv ist. Wir erhalten eine Riemannsche Metrik g_φ nach (5.13). Die Holonomiegruppe $\mathrm{Hol}(M, g_\varphi)$ ist genau dann zu einer Untergruppe von $G_2 \subset SO(7)$ mit zugehöriger 3-Form φ konjugiert, wenn $d\varphi = d^*\varphi = 0$. Es sei bemerkt, dass $d^*\varphi = 0$ eine nicht-lineare Bedingung an φ ist, da d^* von der Riemannschen Metrik g_φ, und somit von φ abhängt,

Jede G_2-Mannigfaltigkeit trägt einen parallelen Spinor. Wir haben in Beispiel 5.33 (2) gesehen, dass die Spinordarstellung von $\mathrm{Spin}(7)$ auf $\mathbb{O}$ sich auf G_2 einschränkt zur direkten Summe

„Standard-Darstellung“ von G_2 auf $\operatorname{Im}\mathbb{O} \cong \mathbb{R}^7$ und der trivialen Darstellung auf den reellen Oktaven $\operatorname{Re}\mathbb{O} \cong \mathbb{R}$. Somit induziert $1 \in \mathbb{O}$ einen parallelen Spinor $s \in \Gamma(\Sigma M)$.

Umgekehrt sei (M, g) eine Riemannsche 7-Mannigfaltigkeit mit Spin-Struktur und einem parallelen Spinor $s \in \Gamma(\Sigma M)$, dann ist die Holonomiegruppe von M eine Untergruppe von $\mathrm{Spin}(7)$, die diesen Spinor festhält, und daher konjugiert zu einer Untergruppe von $G_2 \subset \mathrm{Spin}(7)$, denn $\mathrm{Spin}(7)$ wirkt transitiv auf den Oktaven der Länge 1 und es ist daher egal, welcher Spinor von $\mathrm{Hol}_p(M, g)$ festgehalten wird. Wir sehen also, dass man G_2-Mannigfaltigkeiten wahlweise durch die 3-Form φ oder durch einen parallelen Spinor charakterisieren kann.

5.7.f. $\mathrm{Spin}(7)$**-Mannigfaltigkeiten.** Um die Holonomiegruppe $\mathrm{Spin}(7)$ besser zu verstehen, betrachten wir erst einmal die Lie-Gruppe $\mathrm{Spin}(8)$ und die sogenannte „Trialität“. Wir erinnern uns, dass zwei endlich-dimensionale $\Bbbk$-Vektorräume V und W zueinander dual sind, wenn es eine nicht ausgeartete bilineare Paarung $V \times W \to \Bbbk$ gibt. In diesem Fall ist V isomorph zum Dualraum von W und umgekehrt.

5.73. Definition. Es seien U, V und W drei $\Bbbk$-Vektorräume. Eine *Trialität* ist eine trilineare Abbildung $\Phi\colon U \times V \times W \to \Bbbk$, so dass man zu je zwei der drei Elemente $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ das dritte so bestimmen kann, dass $\Phi(u, v, w) \neq 0$.

Seien U, V und W Euklidische Vektorräume, dann heißt eine Trialität Φ *Euklidisch,* wenn

$$|\Phi(u, v, w)| \leq \|u\| \, \|v\| \, \|w\|$$

für alle $u \in U$, $v \in V$ und $w \in W$ gilt, und wenn man zu zwei dieser Elemente das dritte stets so wählen kann, dass Gleichheit gilt.

Eine Trialität definiert eine Abbildung $U \otimes V \to W^*$. Da Multiplikation mit einem von 0 verschiedenen Vektor stets injektiv ist, schließen wir, dass die drei beteiligten Vektorräume stets die gleiche Dimension haben. Bei einer Euklidischen Trialität können wir aus der obigen Abbildung mit Hilfe der Metrik auf W ein Produkt $U \otimes V \to W$ machen, so dass $\|u \times v\| = \|u\| \, \|v\|$ gilt.

5.74. Bemerkung. Zu jeder der Divisonsalgebren $A = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ gehört je eine Euklidische Trialität

$$\Phi\colon A \times A \times A \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad \Phi(u, v, w) = \operatorname{Re}((uv)w) \in \mathbb{R} \,.$$

Die entsprechenden Produkte werden gegeben durch

$$(u, v) \mapsto \bar{v}\bar{u} \,, \qquad (u, w) \mapsto \bar{u}\bar{w} \,, \qquad \text{und} \qquad (v, w) \mapsto \bar{w}\bar{v} \,.$$

Im Fall $A = \mathbb{O}$ liegen die zwei Faktoren und das Produkt stets in einer assoziativen Unteralgebra, so dass es auf die Klammerung nicht ankommt. Das Produkt $\Phi(u, v, w)$ können wir uns als Euklidische Skalarprodukt des Produktes zweier Elemente mit dem dritten vorstellen, so dass es auch hierbei in Wirklichkeit nicht auf die Klammerung ankommt. Man kann zeigen, dass alle Trialitäten zu Trialitäten von Divisionsalgebren isomorph sind.

Es sei $\Phi\colon U \times V \times W \to \mathbb{R}$ eine Euklidische Trialität. Wir fassen $V \oplus W$ als reelles Spinormodul zur Clifford-Algebra $C\ell(U)$ auf. Für $u \in U$ definieren wir die Clifford-Multiplikation $u\,\cdot\colon V \to W$ als das durch Φ gegebene Produkt. Die Clifford-Multiplikation $u\,\cdot\colon W \to V$ sei dazu schiefadjungiert. Da das Produkt mit einem Einheitsvektor eine Isometrie $V \to W$ liefert, erhalten wir die Clifford-Relation $u \cdot u \cdot x = -\|u\|^2 x$ für alle $x \in V$ oder W. Falls k gerade ist, können wir eine Orientierung von $U = \mathbb{R}^k$ so festlegen, dass $V = \Sigma_k^+$ und $W = \Sigma_k^-$ gilt. Umgekehrt erhalten wir die Trialität zurück als

$$\Phi\colon \mathbb{R}^8 \times \Sigma^+ \times \Sigma^- \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad \Phi(u, v, w) = \langle u \cdot v, w\rangle = -\langle v, u \cdot w\rangle \in \mathbb{R} \,.$$

Man beachte, dass diese Konstruktion genau zu Bemerkung 5.32 und zu Beispiel 5.33 (1) passt. Da die drei Räume U, V, W die gleiche Dimension k haben und k als Dimension eines Spinormoduls stets eine Zweierpotenz ist, die in etwa exponentiell mit k wächst, sehen wir, dass es Trialitäten nur für $\dim U \in \{1, 2, 4, 8\}$ geben kann.

Wir interessieren uns im Folgenden für den Fall $A = \mathbb{O}$, wobei wir die drei Kopien von $\mathbb{O}$ mit $\mathbb{R}^8$, Σ_8^+ und Σ_8^- identifizieren wollen. Die Gruppe Spin(8) wirkt auf diesen Vektorräumen vermöge der Darstellungen τ, σ^+ und σ^-. Die zueghörige Trialität ist mit diesen Wirkungen verträglich, das heißt, es gilt

$$\Phi(\tau_g u, \sigma_g^+ v, \sigma_g^- w) = \Phi(u, v, w) \qquad \text{für alle } u \in \mathbb{R}^8,\ v \in \Sigma_8^+,\ w \in \Sigma_8^- \text{ und alle } g \in \mathrm{Spin}(8)\ .$$

Die Darstellungen $\sigma^\pm$ sind nach Bemerkung 5.32 reelle Darstellungen. Sie lassen sich also als Abbildungen $\sigma_\pm \colon \mathrm{Spin}(8) \to SO(8)$ auffassen. Da Spin(8) einfach zusammenhängend ist, erhalten wir nach Proposition 5.60 Abbildungen $\tilde\sigma_\pm \colon \mathrm{Spin}(8) \to \mathrm{Spin}(8)$. Da die Spin-Gruppen einfache Lie-Gruppen sind, handelt es sich bei diesen Abbildungen um Isomorphismen.

Um zu sehen, dass diese Isomorphismen äußere Isomorphismen sind, also nicht als Konjugation mit einem Element von Spin(8) geschrieben werden können, betrachten wir das Zentrum von Spin(8). Es besteht aus den Elementen ± 1 und $\pm\omega$, wobei ω das Clifford-Volumenelement aus Definition 5.29 sei. Es gilt $\ker(\tau) = \{\pm 1\}$, und $\ker(\sigma_\pm) = \{1, \pm\omega\}$, somit sind die Darstellungen τ, σ_+ und σ_- verschieden, und die Darstellungen $\sigma^\pm$ bilden -1 auf $\pm\omega$ ab. Da außerdem Konjugation mit einer Spiegelung in $\mathbb{R}^8$ (die nicht in Spin(8) enthalten ist) die Rolle von σ^+ und σ^- vertauscht, sehen wir, dass die Gruppe der äußeren Automorphismen surjektiv auf die symmetrische Gruppe S_3 der Menge $\{\tau, \sigma^+, \sigma^-\}$ abbildet (tatsächlich ist die Gruppe der äußeren modulo der inneren Automorphismen genau zu S_3 isomorph).

Wir können die Gruppe $\mathrm{Spin}(7) \subset \mathrm{Spin}(8)$ als die Untergruppe verstehen, die einen von 0 verschiedenen Vektor von $\mathbb{R}^8$ unter der Standarddarstellung τ festhält. Ihr Urbild unter $\sigma^\pm \colon \mathrm{Spin}(8) \to \mathrm{Spin}(8)$ nennen wir $\mathrm{Spin}^\pm(7)$. Es hält einen von 0 verschiedenen Vektor in der Spinordarstellung $\sigma^\pm$ fest. Aus dem Holonomieprinzip folgt also, dass eine acht-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) genau dann einen (lokalen) parallelen positiven Spinor trägt, wenn die (eingeschränkte) Holonomie konjugiert zu einer Untergruppe von $\mathrm{Spin}^+(7) \subset SO(8)$ ist. Wenn M einen parallelen negativen Spinor trägt, ändern wir die Orientierung und erhalten einen parallelen positiven Spinor. Wenn wir also von Spin(7)-Holonomie sprechen, meinen wir immer die Untergruppe $\mathrm{Spin}^+(7) \subset SO(8)$.

Wir können Spin(7)-Mannigfaltigkeiten (M, g) genau wie G_2-Mannigfaltigkeiten mit Hilfe einer nicht ausgearteten Differentialform $\Psi \in \Omega^4(M)$ beschreiben. Dazu betrachten wir wieder T_pM als Spinormodul von $\mathrm{Hol}_p(M, g) = \mathrm{Spin}(7)$ wie in Beispiel 5.33 (1) und schreiben

$$\Psi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{7} \langle c_{e_i} \cdot\,, \,\cdot\,\rangle \wedge \langle c_{e_i} \cdot\,, \,\cdot\,\rangle\ .$$

Aus der Äquivarianz der Clifford-Multiplikation folgt, dass Ψ invariant unter $\mathrm{Spin}^+(7)$ ist. Wir erhalten ein Modell für diese Form auf $\mathbb{R}^8 \cong \mathrm{Re}\,\mathbb{O} \oplus \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ als

$$\Psi = e^0 \wedge \varphi + \psi\ ,$$

wobei $\varphi \in \Lambda^3(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})^*$ und $\psi \in \Lambda^4(\mathrm{Im}\,\mathbb{O})^*$ gerade die Formen aus 5.7.e sind und $e^0 \in (\mathrm{Re}\,\mathbb{O})^*$ mit $e^0(1) = 1$ sei. Einsetzen von e_0 in die obige Definition zeigt, dass $\iota_{e_0}\Psi = \varphi$ gilt. Die volle Gleichung ergibt sich, wenn wir zeigen, dass $\Psi = *\Psi$ zu sich selbst Hodge-dual ist.

Um zu sehen, dass Ψ nicht ausgeartet ist, seien u, v, w linear unabhängige Vektoren. Da Spin(7) transitiv auf der Einheitssphäre wirkt, dürfen wir $u \in \mathrm{Re}\,O$ annehmen. Es folgt

$$\Psi(u, v, w, \,\cdot\,) = \varphi(\pi(v), \pi(w), \,\cdot\,)\ ,$$

wobei π die Projektion auf $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ bezeichne. Da φ nicht ausgeartet ist, folgt $\Psi(u, v, w, \,\cdot\,) \neq 0$.

Im Gegensatz zur G_2-Form φ erzeugt Ψ keinen offenen Orbit in $\Lambda^4(\mathbb{R}^8)^*$. Daher können wir nicht jede beliebige nicht ausgeartete 4-Form zur Definition einer Spin(7)-Struktur heranziehen. Wenn wir aber eine Form $\Psi \in \Omega^4(M)$ vom richtigen Typ haben, dann definiert diese eine Metrik mit Holonomie Spin(7), so dass Ψ parallel ist, genau dann, wenn $d\Psi = 0$. Diese Bedingung ist zwar linear, aber die Formen vom richtigen Typ bilden keinen Untervektorraum, so dass wir insgesamt wieder ein nicht-lineares Problem haben.

5.75. Bemerkung. Wir können schließlich einen Überblick über die irreduziblen (eingeschränkten) Holonomiegruppen in Dimension 8 geben. Aufgrund der obigen Überlegungen erhalten wir Inklusionen

$$\begin{aligned} Sp(2) \hookrightarrow SU(4) \hookrightarrow \mathrm{Spin}(7) \hookrightarrow SO(8) &\qquad \text{(parallele Spinoren)} \\ Sp(2) \hookrightarrow SU(4) \hookrightarrow U(4) \hookrightarrow SO(8) &\qquad \text{(Kählerstrukturen)} \\ Sp(2) \hookrightarrow Sp(2) \cdot Sp(1) \hookrightarrow SO(8) &\qquad \text{(quaternionische Kählerstruktur).} \end{aligned}$$

Für $n = 4k$ mit $k \geq 3$ erhalten wir ein ähnliches Bild, bis auf die obere Zeile. Für $n = 2m$ mit $m \geq 3$ ungerade (sowie für $m = 2$, da $Sp(1) \cong SU(2)$ und $Sp(1) \cdot Sp(1) \cong SO(4)$) hingegen sehen wir nur

$$SU(m) \hookrightarrow U(m) \hookrightarrow SO(2m) .$$

Für ungerade $n \geq 3$, $n \neq 7$ gibt es nur eine irreduzible Holonomiegruppe $SO(n)$. Nur im Fall $n = 7$ erhalten wir

$$G_2 \hookrightarrow SO(7) .$$

Literatur

[Ba] W. Ballmann, *Lectures on Kähler Manifolds,* European Mathematical Society (EMS), Zrich 2006.

[Be] A. L. Besse, *Einstein Manifolds,* Springer, Berlin 1987.

[CE] J. Cheeger, D. G. Ebin, *Comparison Theorems in Riemannian Geometry,* North-Holland, Amsterdam 1975.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1987.

[GKM] D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, *Riemannsche Geometrie im Großen,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1975.

[H] D. Huybrechts, *Complex Geometry,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 2005.

[J] D. Joyce, *Compact Manifolds with Special Holonomy,* Oxford University Press, Oxford 2000.

[L1] J. M. Lee, Riemannian manifolds, An introduction to curvature, Springer-Verlag, New York, 1997.

[L2] J. M. Lee, Introduction to smooth manifolds, Springer-Verlag, New York, 2003.

[NN] A. Newlander, L. Nirenberg, Complex Analytic Coordinates in Almost Complex Manifolds, Ann. Math. (2) 65 (1957), 391–404.

[P] P. Petersen, Riemannian Geometry, third edition, Springer-Verlag, Cham, 2016.

[S] J. Simons, On the Transitivity of Holonomy Systems, Ann. Math. (2) 76 (1962), 213–234