1. Übungsblatt

Algebraische Topologie 2

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Dienstag, den 28.4.15
18 Uhr vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es seien X, Y punktierte CW-Komplexe und M ein R-Modul. Eine zelluläre Homotopie zwischen zellulären Abbildungen $f, g\colon X \to Y$ ist eine zelluläre Abbildung $h\colon X \wedge I_+ \to Y$, wobei I die CW-Struktur mit einer 1- und zwei 0-Zellen trage.

Zeigen Sie: zelluläre Homotopien induzieren Kettenhomotopien zwischen den Abbildungen $f_\#$ und $g_\#\colon C_\bullet^{\mathrm{CW}}(X;M) \to C_\bullet^{\mathrm{CW}}(Y;M)$.

Aufgabe 2

Es sei R ein Hauptidealring, r, $s \in R$, und B ein R-Modul. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{Tor}_R(R/r, B) \cong \hom(R/r, B) \cong \{\, b \in B \,\big|\, br = 0 \,\} \subset B$

(b) $\operatorname{Ext}_R(R/r, B) \cong (R/r) \otimes B \cong B/rB$

(c) $\operatorname{Tor}_R(R/r, R/s) \cong \hom(R/r, R/s) \cong R/(r,s) \cong (R/r) \otimes (R/s) \cong \operatorname{Ext}_R(R/r, R/s)$

wobei (r, s) das von r und s erzeugte Ideal in R bezeichne.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Proposition 5.66.

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

(a) $A/\operatorname{Tor}_R A$ ist torsionsfrei.

(b) Jeder endlich erzeugte Untermodul von $A/\operatorname{Tor}_R A$ ist frei.

(c) $\operatorname{Tor}_R(B, A/\operatorname{Tor}_R A) = 0$ für alle B

(d) $\operatorname{Tor}_R(B, A) \cong \operatorname{Tor}_R(B, \operatorname{Tor}_R A)$

Hinweis: Jedes Element in einem Tensorprodukt $X \otimes Y$ kann als endliche Summe von Elementen der Form $x \otimes y$ mit $x \in X, y \in Y$ geschrieben werden.

Anwesenheitsaufgaben siehe Rückseite