# 11. Übungsblatt
## Algebraische Topologie 2
### im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

*Abgabe Dienstag, den 14.7.15*
*18 Uhr vor der Vorlesung*

*Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt*

## Aufgabe 1

Sei $\mathbb{E}$ ein Spektrum und $B \subset A \subset X$ seien beliebige Räume. Beweisen Sie die Exaktheit einer der Sequenzen

$$\cdots \longleftarrow E_k(X,A) \longleftarrow E_k(X,B) \longleftarrow E_k(A,B) \xleftarrow{\partial} E_{k+1}(X,A) \longleftarrow \cdots ,$$
$$\cdots \longrightarrow E^k(X,A) \longrightarrow E^k(X,B) \longrightarrow E^k(A,B) \xrightarrow{\delta} E^{k+1}(X,A) \longrightarrow \cdots .$$

Orientieren Sie sich dazu an Übung 3.111.

## Aufgabe 2

Es sei $f\colon (Z,U) \to (W,V)$ eine stetige Abbildung beliebiger Paare. Beweisen Sie die Definition 7.34 zugrunde liegende Behauptung, wonach $f^*\colon E^\bullet(W,V) \to E^\bullet(Z,U)$ nicht von der Wahl der Abbildung $g\colon (X,A) \to (Y,B)$ von Approximationen durch Paare von CW-Komplexen abhängt. Zeigen Sie dann, dass $E^\bullet$ ein homotopieinvarianter Funktor ist.

## Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum und $\alpha \in E^n(\mathbb{R}^m|0)$. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) Es sei $\epsilon \in E^0$ die Eins des Ringspektrums und $\delta S^{m-1}\epsilon$ ihr Bild unter dem Isomorphismus

$$E^0 = \tilde{E}^0(S^0) \xrightarrow{S} \cdots \xrightarrow{S} \tilde{E}^{m-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{\delta} E^m(D^m, S^{m-1}) \cong E^m(\mathbb{R}^m|0) .$$

Dann gibt es eine Einheit $\beta \in E^\bullet$, so dass $\alpha = \beta \wedge \delta S^{m-1}\epsilon$.

(b) Das Kronecker-Produkt $\langle \,\cdot\,, \alpha\rangle\colon E_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \to E_\bullet$ ist ein Isomorphismus.

(c) Für jedes Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum $\mathbb{F}$ ist $\langle \,\cdot\,, \alpha\rangle\colon F_\bullet(\mathbb{R}^m|0) \to F_\bullet$ ein Isomorphismus.

## Aufgabe 4

Es seien $(X,A) \to (Z,U)$ und $(Y,B) \to (W,V)$ Approximationen durch Paare von CW-Komplexen. Zeigen Sie, dass $(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$ eine Approximation von $(Z \times W, U \times W \cup Z \times V)$ durch Paare von CW-Komplexen ist.
*Hinweis:* Arbeiten Sie mit Abbildungskegeln, und beginnen Sie mit dem Spezialfall $U = V = \emptyset$.

## Aufgabe 5

Es sei $\mathbb{E}$ ein Ringspektrum und $\mathbb{F}$ ein Rechts-$\mathbb{E}$-Modulspektrum. Beweisen Sie die Eigenschaften des Produktes “\” aus Bemerkung 7.41.