2. Übungsblatt

Algebraische Topologie 2

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Dienstag, den 5.5.15
18 Uhr vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Wir betrachten $A = \mathbb{Z}/n$ und konstruieren den Moore-Raum MA_n, indem wir eine $(n+1)$-Zelle mit einer Abbildung $\varphi\colon S^n \to S^n$ vom Grad n an S^n ankleben.

Indem wir das n-Skelett S^n auf einen Punkt abbilden, erhalten wir die Kollaps-Abbildung $f\colon MA_n \to MA_n/S^n \cong S^{n+1}$. Außerdem sei $g\colon MA_n \to S^{n+1}$ eine konstante Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $f_* = g_* = 0\colon \tilde{H}_\bullet(MA_n;\mathbb{Z}) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{n+1};\mathbb{Z})$ für alle $k \geq 0$,

(b) $g_* = 0\colon \tilde{H}_\bullet(MA_n;A) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{n+1};A)$ für alle $k \geq 0$,

(c) $f_{n+1}\colon \tilde{H}_{n+1}(MA_n;A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1};A) \cong A$

Aufgabe 2

Seien A, B abelsche Gruppen. Wir betrachten den Raum $[M(A,n), M(B,n)]$ der punktierten Abbildungen $M(A,n) \to M(B,n)$ bis auf Homotopie.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Puppe-Sequenz und dem Freudenthalschen Einhängungssatz 3.73, dass
$$[M(A,n), M(B,n)] \xrightarrow{S} [M(A,n+1), M(B,n+1)]$$
einen Isomorphismus für $n \geq 3$ liefert.

(b) Konstruieren Sie mit Hilfe der Puppe-Sequenz 4.39 (3) eine kurze exakte Sequenz der Form
$$0 \longrightarrow \operatorname{Ext}\big(A, \pi_{n+1}M(B,n)\big) \longrightarrow [M(A,n), M(B,n)] \longrightarrow \hom(A,B) \longrightarrow 0\,.$$

(c) Es sei $n \geq 3$. Zeigen Sie mit der Homotopiesequenz 3.69 für Kofaserungen, dass
$$\pi_{n+1}(M(B,n)) \cong B \otimes \mathbb{Z}/2 = B/2B\,.$$

(d) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ext}\big(A, B/2B\big) = 0$, wenn Multiplikation mit 2 in B surjektiv oder in A injektiv ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und A ein R-Modul. Bearbeiten Sie eine der folgenden Aufgaben.

(a) Es gelte $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}(A, A/2A) = 0$. Für $n \geq 3$ liefert die Modulstruktur auf A nach der vorangegangenen Aufgabe eine Abbildung

$$R \hookrightarrow \hom_{\mathbb{Z}}(A, A) \cong [MA_n, MA_n] \,.$$

Zeigen Sie, dass man für jeden Homologiefunktor $\tilde{h}_\bullet$, jeden Raum X und jedes k die Gruppe $\tilde{h}_k(X; A)$ als R-Modul auffassen kann. Man erhält also einen Mod_R-wertigen Homologiefunktor.

(b) Es sei $HA_\bullet$ das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu A. Zeigen Sie: Man kann den in Proposition 5.44 konstruierten Funktor $\tilde{H}_\bullet(X; A)$ als Mod_R-wertigen Funktor auffassen.

Aufgabe 4

Es sei $f\colon MA_n \to MB_n$ eine stetige punktierte Abbildung zwischen Moore-Räumen, so dass die induzierte Abbildung $f_*\colon A \cong \tilde{H}_n(MA_n) \to B \cong \tilde{H}_n(MB_n)$ injektiv ist. Zeigen Sie

(a) Dann ist der reduzierte Abbildungskegel Cf ein Moore-Raum zu $C = B/f_*A$.

(b) Für jeden Homologiefunktor $(\tilde{h}_\bullet, \partial_\bullet)$ und jeden Raum X erhalten wir eine natürliche lange exakte Sequenz der Form

$$\cdots \longleftarrow \tilde{h}_k(X; C) \longleftarrow \tilde{h}_k(X; B) \longleftarrow \tilde{h}_k(X; A) \xleftarrow{\partial} \tilde{h}_{k+1}(X; C) \longleftarrow \cdots$$