3. Übungsblatt

Algebraische Topologie 2

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Dienstag, den 12.5.15 18 Uhr vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Wir fassen $A = \mathbb{Z}/n$ als $\mathbb{Z}$-Modul auf. Es sei $f\colon MA_k \to S^{k+1}$ die Kollaps-Abbildung aus Aufgabe 1 vom letzten Blatt.

(a) Bestimmen Sie die Koeffizientensequenzen für $\tilde{H}_{k+1}(MA_n;A)$ und $\tilde{H}_{k+1}(S^{k+1};A)$ aus Satz 5.74, und stellen Sie die von f induzierte Sequenzabbildung in einem kommutativen Diagramm dar.

(b) Überprüfen Sie, dass beide Koeffizientensequenzen spalten, und dass die Spaltungen nicht natürlich sind.

Aufgabe 2

Es sei $A = \mathbb{Z}/n$ und $B = \mathbb{Z}/m$ und $k,\ \ell \geq 2$.

(a) Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet(MA_k \wedge MB_\ell)$ und $\tilde{H}_\bullet(S^{k+1} \wedge MB_\ell)$.

(b) Sei $f\colon MA_k \to S^{k+1}$ die obige Kollaps-Abbildung. Bestimmen Sie

$$(f \wedge \mathrm{id}_{MB_\ell})_*\colon \tilde{H}_\bullet(MA_k \wedge MB_\ell) \longrightarrow \tilde{H}_\bullet(S^{k+1} \wedge MB_\ell)\ .$$

(c) Konstruieren Sie wie in Aufgabe 1 ein Beispiel dafür, dass die Künneth-Sequenz nicht natürlich spaltet.

Aufgabe 3

Es seien X, Y gut punktierte, $(n-1)$- beziehungsweise $(m-1)$-zusammenhängende Räume.

(a) Zeigen Sie, dass $X \wedge Y$ ein $(m+n-1)$-zusammenhängender Raum ist.

(b) Bestimmen Sie $\pi_{m+n}(X \wedge Y)$, falls $m,\ n \geq 2$.

(c) Zusatz: was können Sie über die restlichen Fälle aussagen?

Aufgabe 4

Es sei Y Unterkomplex eines CW-Komplexes X, und es sei A ein R-Modul. Nach Bemerkung 5.12 (2) definiert man relative Homologiemoduln $H_k(X,Y;A) = \tilde{H}_k(X/\!\!/Y;A)$. (Vgl. Definition von $X/\!\!/Y$ in Def. 3.65.) Zeigen Sie

(a) Es gilt $H_k(X,Y;A) \cong \tilde{H}_k(X/Y;A)$.

(b) Wir betrachten $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y;A), d^{\mathrm{CW}}\big)$ als Unterkomplex von $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;A), d^{\mathrm{CW}}\big)$ dann existiert ein natürlicher Quotientenkomplex $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X;A)/\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(Y;A), \bar{d}^{\mathrm{CW}}\big)$.

(c) Der Komplex aus (b) ist natürlich isomorph zu $\big(\tilde{C}^{\mathrm{CW}}_\bullet(X/Y;A), d^{\mathrm{CW}}\big)$.