

# 5. ÜBUNGSBLATT

## ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE 2

IM SS 2015 BEI PROF. DR. S. GOETTE

*Abgabe Dienstag, den 2.6.15  
vor der Vorlesung*

*Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und  
Nachnamen auf Ihr Blatt*

### Aufgabe 1

Es seien  $X = \mathbb{R}P^2 \times S^3$  und  $Y = S^2 \times \mathbb{R}P^3$ .

- (a) Zeigen Sie, dass  $X$  und  $Y$  isomorphe Homotopiegruppen haben.
- (b) Bestimmen Sie die ganzzahligen Homologiegruppen von  $X$  und  $Y$ .
- (c) Bestimmen Sie die ganzzahligen Kohomologiegruppen von  $X$  und  $Y$ .

### Aufgabe 2

Konstruieren Sie die Stabilisierungs-Isomorphismen für zelluläre Homologie und Kohomologie.

- (a) Geben Sie zuerst mit Hilfe von Proposition 5.81 Isomorphismen

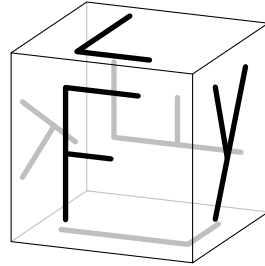
$$\varphi_n: \tilde{C}_n^{\text{CW}}(X; A) \longrightarrow \tilde{C}_{n+1}^{\text{CW}}(S^1 \wedge X; A)$$

mit  $\varphi_{n-1} \circ d_n^{\text{CW}} = -d_{n+1}^{\text{CW}} \circ \varphi_n$  an.

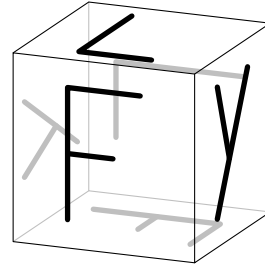
- (b) Zeigen Sie, dass diese mit den Isomorphismen aus Satz 5.17 beziehungsweise Folgerung 6.4 übereinstimmen. *Hinweis:* Betrachten Sie die Kofaserung  $X \hookrightarrow CX = (I, 0) \wedge X$  und gehen Sie vor wie im Beweis von Satz 3.41 (4).

### Aufgabe 3

Man betrachte den Würfel  $I^3$  und definiere  $X_1, X_2$ , indem man je zwei Seiten gemäß der beiden Skizzen so identifiziert („verklebt“), dass gleiche Buchstaben aufeinander zu liegen kommen. Finden Sie eine CW-Struktur für *einen* der Räume  $X_i$  mit je zwei 0-Zellen, vier 1-Zellen, drei 2-Zellen und einer 3-Zelle. Bestimmen Sie die zellulären Randoperatoren und berechnen Sie die unreduzierte zelluläre Homologie und Kohomologie dieses Raumes.



$X_1$



$X_2$

### Aufgabe 4

Bestimmen Sie für  $1 \leq k \leq n$  die folgenden Kronecker-Produkte.

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (\text{a})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (\text{b})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2, \quad (\text{c})$$

$$\tilde{H}_{\text{CW}}^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \times \tilde{H}_k^{\text{CW}}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow \mathbb{Z}/2. \quad (\text{d})$$