7. Übungsblatt - Bonusblatt

Algebraische Topologie 2

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Dienstag, den 16.6.15
18 Uhr vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Für die folgenden Aufgaben benötigt man das Kapitel Vektorbündel im Skript, das in der Vorlesung nicht behandelt wurde. Deswegen wird dieses Blatt als Bonusblatt behandelt.

Aufgabe 1

Zeigen Sie: Es gibt kovariante Funktoren B und E von der Kategorie der topologischen Gruppen in die Kategorie $kw\mathcal{H}$, die jeder Gruppe G einen Raum EG und einen klassifizierenden Raum BG zuordnen, so dass $BG = EG/G$.

Aufgabe 2

Es sei $H \subset G$ Untergruppe einer topologischen Gruppe. Zeigen Sie, dass der Raum EG/H zu BH homotopieäquivalent ist. Folgern Sie, dass der Quotient G/H die Homotopiefaser der natürlichen Abbildung $BH \to BG$ ist.

Aufgabe 3

Überlegen Sie sich, dass die Menge der positiv definiten selbstadjungierten Matrizen über $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ konvex ist. Folgern Sie, dass jedes $\mathbb{k}$-Vektorbündel vom Rang r über einem CW-Komplex eine $U(r, \mathbb{k})$-Struktur trägt. Da $BGL_r(\mathbb{k})$ als CW-Komplex dargestellt werden kann, gibt es daher eine klassifizierende Abbildung $BGL_r(\mathbb{k}) \to BU(r, \mathbb{k})$ für das tautologische Bündel.

Aufgabe 4

Die übliche Wirkung von $U(n+1)$ auf $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ induziert eine Abbildung $p\colon U(n+1) \ni g \mapsto g \cdot e_1 \in S^{2n+1}$.

(a) Zeigen Sie, dass p ein Faserbündel mit Faser $U(n) \subset U(n+1)$ ist.

(b) Folgern Sie, dass $\iota_n\colon U(n) \hookrightarrow U(n+1)$ eine $(2n)$-zusammenhängende Abbildung ist.

(c) Bestimmen Sie $\pi_k(U(n))$ für $k = 0$, 1 und alle n.

(d) Aufgrund von Bott-Periodizität gilt

$$\varinjlim \pi_k(U(n)) = \varinjlim \pi_{k+2}(U(n))$$

für alle k, wobei der Limes über n läuft. Welche $\pi_k(U(n))$ können Sie mit dieser Information bestimmen?