8. Übungsblatt

Algebraische Topologie 2

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Dienstag, den 23.6.15
18 Uhr vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und
Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Beweisen Sie die folgende Aussagen über kofinale Unterspektren.

(a) Es sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ kofinal und $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ kofinal, dann ist auch $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal.

(b) Es sei $\mathbb{U} \subset \mathbb{E}$ kofinal und $\mathbb{V} \subset \mathbb{E}$ ein Unterspektrum, dann ist $\mathbb{U} \cap \mathbb{V} \subset \mathbb{V}$ kofinal.

(c) Es sei $\mathbb{V} \subset \mathbb{F}$ kofinal und $\mathbf{f} \colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ eine strikte Abbildung, dann ist auch $\mathbf{f}^{-1}(\mathbb{V}) \subset \mathbb{E}$ kofinal.

Aufgabe 2

(a) Es seien f, $g \colon \mathbb{E} \to \mathbb{F}$ Abbildungen. Erklären Sie Definition 7.5 in Termen strikter Abbildungen auf kofinalen Unterspektren.

(b) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Homotopie auf Abbildungen eine Äquivalenzrelation definiert.

(c) Zeigen Sie in dieser Sprache, dass Verkettung von Abbildungen mit Homotopie verträglich ist.

Aufgabe 3

Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ CW-Spektren.

(a) Definieren Sie ein geeignetes CW-Spektrum $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ mit Abbildungen $i \colon \mathbb{E} \to \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ und $j \colon \mathbb{F} \to \mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ vom Grad 0.

(b) Zeigen Sie, dass es in der Kategorie $\mathcal{SCW}_0$ die universelle Eigenschaft eines Koproduktes erfüllt.

(c) Konstruieren Sie Abbildungen $p \colon \mathbb{E} \vee \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ und $q \colon \mathbb{F} \vee \mathbb{F} \to \mathbb{E}$ vom Grad 0, so dass $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{E}}$, $q \circ j = \mathrm{id}_{\mathbb{F}}$ und $p \circ j = q \circ i = 0$.

Bitte wenden

Eine der folgenden Aufgaben ist eine Bonusaufgabe:

Aufgabe 4

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Es seien X und Y CW-Komplexe, dann ist $S^kX \vee S^kY \hookrightarrow S^kX \times S^kY$ eine $(2k-2)$-zusammenhängende Abbildung.

(b) Es seien $\mathbb{E}$, $\mathbb{F}$ und $\mathbb{E}\vee\mathbb{F}$ die Spektren aus der vorigen Aufgabe. Zeigen Sie mit Teil (a) und der vorigen Aufgabe, dass $\mathbb{E} \vee \mathbb{F}$ die universelle Eigenschaft eines Produkts in $\mathcal{SHCW}_0$ erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie die in (b) gesuchte Abbildung induktiv über die Schichtfiltrierung, und beachten Sie, dass wir keine strikte Abbildung suchen.

Aufgabe 5

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Die Verknüpfung von Abbildungen in der Kategorie $\mathcal{SHCW}_0$ ist bilinear bezüglich der Addition.

(b) Das Koprodukt aus Aufgabe 3 ist auch ein Koprodukt in $\mathcal{SHCW}_0$. Insbesondere existieren alle Koprodukte in $\mathcal{SHCW}_0$.

(c) Schließen Sie hieraus mit Hilfe abstrakter Argumente (alternativ zu Aufgabe 2), dass jedes Koprodukt gleichzeitig ein Produkt ist.

Zusatz: Formulieren Sie passende universelle Eigenschaften für das obige Biprodukt (simultane Produkt und Koprodukt), wenn wir Abbildungen von beliebigem Grad zulassen.