9. Übungsblatt

Algebraische Topologie 2

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Dienstag, den 30.6.15
18 Uhr vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Vor- und Nachnamen auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es seien $\mathbb{E} = (E_k, s_k)_k$, $\mathbb{F} = (F_\ell, t_\ell)_\ell$, $\mathbb{G} = (G_m, u_m)_m$ CW-Spektren. Zeigen Sie:

(a) Eine Folge von Abbildungen $\mu_{k,\ell}\colon E_k \wedge F_\ell \to G_{k+\ell}$ induziert genau dann für alle $A = B \,\dot\cup\, C \subset \mathbb{N}$ mit $\#A = \infty$ eine strikte Abbildung $\mu_{B,C}\colon \mathbb{E} \wedge_{B,C} \mathbb{F} \to \mathbb{G}$, wenn für alle k, ℓ gilt, dass
$$\mu_{k+1,\ell} \circ \bigl(s_k \wedge \mathrm{id}_{F_\ell}\bigr) = u_{k+\ell} \circ S\mu_{k,\ell} = \mu_{k,\ell+1} \circ \bigl(\mathrm{id}_{E_k} \wedge (-1)^k t_\ell\bigr) \ .$$

(b) Wenn die Bedingung aus (a) erfüllt ist, existiert eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $\mu\colon \mathbb{E} \wedge \mathbb{F} \to \mathbb{G}$, so dass $\mu_{B,C} \sim \mu \circ \eta_{B,C}$.

Aufgabe 2

Konstruieren Sie Homotopieäquivalenzen $\mu_{k,\ell}\colon S^k \wedge S^\ell \to S^{k+\ell}$, die den Bedingungen aus Aufgabe 1(a) genügen, mit $\mu_{0,0} = \mathrm{id}_{S^0}\colon S^0 \wedge S^0 \to S^0$. Es bezeichne $\tau_{k,\ell}\colon S^k \wedge S^\ell \to S^\ell \wedge S^k$ den Vertauschungshomöomorphismus mit $\tau(x \wedge y) = y \wedge x$. Zeigen Sie, dass $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$ zu $(-1)^{k\ell}\mu_{k,\ell}$ homotop ist, wobei $-1\colon S^{k+\ell} \to S^{k+\ell}$ eine beliebige Abbildung vom Abbildungsgrad -1 bezeichne.

Aufgabe 3

Es sei $\mathbb{HZ} = (H\mathbb{Z}_k, s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ das Eilenberg-Mac Lane-Spektrum zu $\mathbb{Z}$, und es bezeichne $1_k \in \pi_k(H\mathbb{Z}_k) \cong \mathbb{Z}$ den kanonischen Erzeuger mit $s_k \circ S1_k = s_{k+1}$.

(a) Konstruieren Sie Abbildungen $\mu_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_{k+\ell}$, die den Bedingungen aus Aufgabe 1(a) genügen, mit $\mu_{k,\ell}(1_k \wedge 1_\ell) = 1_{k+\ell}$, und beweisen Sie Eindeutigkeit bis auf Homotopie.

(b) Zeigen Sie, dass für alle k, ℓ, $m \geq 0$ die folgenden Paare von Abbildungen jeweils homotop sind:
$$\begin{aligned}
&\mu_{k+\ell,m} \circ (\mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k} \wedge \mu_{\ell,m}) \sim \mu_{k,\ell+m} \circ (\mu_{k,\ell} \wedge \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_m}) \ , \\
&\mu_{0,k} \circ (1_0 \wedge \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k}) \sim \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k}\colon S^0 \wedge H\mathbb{Z}_k \longrightarrow H\mathbb{Z}_k \ , \\
\text{und}\quad &\mu_{k,0} \circ (\mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k} \wedge 1_0) \sim \mathrm{id}_{H\mathbb{Z}_k}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge S^0 \longrightarrow H\mathbb{Z}_k \ .
\end{aligned}$$

Bitte wenden

Aufgabe 4

Es seien $\mu_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_{k+\ell}$ die Abbildungen aus Aufgabe 3. Es bezeichne $\tau_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_\ell \wedge H\mathbb{Z}_k$ den Vertauschungshomöomorphismus mit $\tau(x \wedge y) = y \wedge x$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt für alle $k \geq 1$ eine bis auf Homotopie eindeutige Abbildung $-1\colon H\mathbb{Z}_k \to H\mathbb{Z}_k$, so dass $(-1)_* = -\operatorname{id}_{\pi_k(H\mathbb{Z}_k)}$.

(b) Für alle $k, \ell \geq 0$ sind die Abbildungen $\mu_{\ell,k} \circ \tau_{k,\ell}$ und $(-1)^{k+\ell} \circ \mu_{k,\ell}\colon H\mathbb{Z}_k \wedge H\mathbb{Z}_\ell \to H\mathbb{Z}_{k+\ell}$ homotop.