Wiederholungsblatt

Elementargeometrie

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

LÖSUNGSSKIZZE

Die Lösungen unten enthalten teilweise keine vollständigen Rechnungen. Es sind aber alle wichtigen Zwischenergebnisse und Beweisschritte angegeben.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den geometrischen Typ der Lösungsmenge von

$$(1-a^2)x^2 + 2a^2xy + (1-a^2)y^2 + 2ax + 2ay - 1 = 0$$

in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

LÖSUNG:

In Matrixschreibweise finden wir

$$A = \begin{pmatrix} 1-a^2 & a^2 \\ a^2 & 1-a^2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2a \\ 2a \end{pmatrix}, \quad c = -1.$$

Wir benutzen die Kriterien aus Kapitel 2.2, brauchen also zunächst die Determinante von A und den Verschiebungsvektor v, falls er existiert, und dann auch den neuen Konstanten Term $\tilde{c}$.

Es gilt

$$\det A = (1-a^2)^2 - a^4 = 1 - 2a^2.$$

Die Gleichung $2Av + b = 0$ ist für alle $a \in \mathbb{R}$ lösbar und wir finden

$$v = \begin{pmatrix} -a \\ -a \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{c} = c + \frac{1}{2}\langle v, b\rangle = -(1+2a^2).$$

Also gilt $\tilde{c} < 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Damit haben wir nur nach dem Vorzeichen der Determinante zu unterscheiden:

(a) $1 - 2a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

In diesem Fall ist die Lösungsmenge also eine Ellipse. Für $a = 0$ ist es sogar ein Kreis.

(b) $1 - 2a^2 < 0 \Leftrightarrow |a| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Wir benutzen v und $\tilde{c}$ aus Fall (a). Damit ist die Lösungsmenge in diesem Fall eine Hyperbel.

(c) $1 - 2a^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Mit den gleichen Rechnungen wie oben finden wir, dass die Lösungsmenge in diesem Fall aus 2 parallelen Geraden besteht.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{P} = (P, G, I)$ eine projektive Ebene und g und h zwei verschiedene Geraden. Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen den Punkten von g und den Punkten von h an. Geben Sie in jedem Beweisschritt an, welches Axiom Sie benutzen.

LÖSUNG:

Sei q ein Punkt auf g. Wir konstruieren den Bildpunkt auf h wie folgt:

Wegen Axiom (Pr3) gibt es einen Punkt p, der auf keiner der beiden Geraden liegt.

Sei g_q die Gerade durch q und p. Wegen Axiom (Pr1) ist diese eindeutig.

Dann definieren wir

$$f(q) = \text{ Schnittpunkt von } g_q \text{ und } h.$$

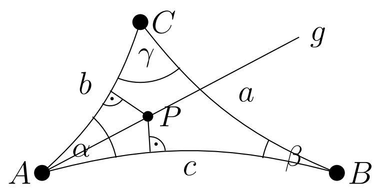
Hier benutzen wir Axiom (Pr2'), denn damit existiert ein eindeutiger Schnittpunkt.

Wir müssen noch zeigen, dass die so definierte Abbildung bijektiv ist: Seien also q_1 und q_2 verschiedene Punkte auf g. Dann sind auch die beiden Geraden g_{q_1} und g_{q_2} verschieden. Denn nach Axiom (Pr1) ist die Gerade durch q_1 und q_2 eindeutig (also gerade g) und g_{q_1} und g_{q_2} gehen beide durch $p \notin g$. Zwei verschiedene Gerade durch p haben verschiedene Schnittpunkte mit h, da sonst die Geraden zwei gemeinsame Punkte hätten und damit nach (Pr1) gleich wären. Also ist f injektiv.

Zur Surjektivität sei $r \in h$ gegeben. Wir zeigen, dass es ein Urbild gibt. Sei dazu h_r die Gerade durch r und p. Diese Gerade hat einen Schnittpunkt mit g nach (Pr2'). Also gilt $h_r = g_q$ für ein $q \in g$. Nach Konstruktion von f gilt also gerade $r = f(q)$. Damit hat r ein Urbild und f ist surjektiv.

Aufgabe 3

In der hyperbolischen Ebene seien nicht-kollineare Punkte A, B, C gegeben. Die Seiten und Winkel des Dreiecks seien bezeichnet wie in der Skizze.



(a) Sei g die Gerade, die den Winkel α halbiert. Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden ist gegeben durch die Strecke, die vom Punkt ausgeht und auf der Geraden senkrecht steht.

Zeigen Sie: Ein Punkt P liegt genau dann auf g, wenn er den gleichen Abstand von den (verlängerten) Seiten b und c hat.

(b) Bestimmen Sie einen Punkt M, der von allen drei Seiten den gleichen Abstand hat. Ist dieser Punkt eindeutig?

LÖSUNG:

(a) $\Rightarrow$ Sei P auf g und seien die Fußpunkte der Lote auf b und c mit L_b und L_c bezeichnet. Betrachte die Dreiecke ΔAL_cP und ΔAL_bP. Beide Dreiecke haben die Seite $\overline{AP}$ gemeinsam und außerdem einen rechten Winkel bei L_b bzw. L_c. Außerdem haben nach Definition von g beide Dreiecke bei A den Winkel $\frac{\alpha}{2}$.

Der Kongruenzsatz WWS gilt in diesem Fall (rechter Winkel bei L_c und Winkel bei A kleiner als $\pi/2$) auch in der hyperbolischen Ebene. Damit sind die beiden Dreiecke kongruent. Insbesondere sind die Seiten $\overline{PL_b}$ und $\overline{PL_c}$ gleich lang.

$\Leftarrow$ In diesem Fall betrachten wir wieder die Dreiecke ΔAL_cP und ΔAL_bP. Nach Voraussetzung sind die beiden Seiten $\overline{PL_b}$ und $\overline{PL_c}$ gleich lang. Nach Konstruktion haben die Dreiecke außerdem wieder die Seite $\overline{AP}$ gemeinsam und einen rechten Winkel bei L_b bzw. L_c.

Wenn wir den Kongruenzsatz WSS anwenden können, sind also auch die beiden Winkel bei A gleich. Da sie sich zu α addieren, ist dann also die Gerade durch A und P die Winkelhalbierende.

Nach Übungsblatt 7 ist WSS anwendbar, wenn die Seite, die dem gegebenen Winkel gegenüber liegt, die längere der beiden Seiten ist. Wir müssen also nachrechnen, dass $\overline{PL_b} = \overline{PL_c} \leq \overline{AP}$ ist.

Nach dem Seitenkosinussatz gilt:

$$\begin{aligned}\cosh \overline{AP} &= \cosh \overline{AL_c} \cdot \cosh \overline{PL_c} - \sinh \overline{AL_c} \cdot \sinh \overline{PL_c} \cdot \cos \sphericalangle AL_cP \\ &= \cosh \overline{AL_c} \cdot \cosh \overline{PL_c}.\end{aligned}$$

Der cosh ist mindestens 1 und auf nicht-negativen Zahlen monoton steigend, also folgt $\overline{PL_c} \leq \overline{AP}$.

Damit ist der Kongruenzsatz WSS anwendbar und die Behauptung gezeigt.

(b) Nach a) liegt der gesuchte Punkt notwendig auf g. Analog liegt der Punkt auf den Winkelhalbierenden der Winkels γ und β.

Wir zeigen zuerst, dass es einen Schnittpunkt P von 2 Winkelhalbierenden gibt. Wegen Transitivität der Abstandgleichheit liegt dieser Punkt dann auch auf der dritten Winkelhalbierenden.

Sei D der Schnittpunkt von g mit der Seite a. Dann schneidet die Winkelhalbierende von β die Seite b des Dreiecks ΔADC und damit nach Axiom (A5) auch die Seite $AD \subset g$. Definiere P nun als diesen Schnittpunkt.

Da der Schnittpunkt zweier Geraden in der hyperbolischen Ebene eindeutig ist, ist auch der Punkt P eindeutig.

Aufgabe 4

Betrachten Sie folgende Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(v) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Euklidische Bewegung handelt und beschreiben Sie diese Bewegung geometrisch, d.h., bestimmen Sie den Fixpunkt und Drehwinkel, falls es sich um eine Drehung handelt, und falls es eine Gleitspiegelung ist, bestimmen Sie die invariante Gerade und bestimmen Sie die Größe der Verschiebung entlang der Geraden.

LÖSUNG:

Bezeichne f als (A, v) mit Matrix A und Vektor v. Wir rechnen nach, dass $A^t A = I$ und $\det A = -1$, also ist $A \in S(2)$ und damit f eine Euklidische Bewegung.

Wir benutzen die Charakterisierung Euklidischer Bewegungen von Übungsblatt 4:

Da die Determinante -1 ist, handelt es sich um eine Gleitspiegelung.

Als ersten Schritt berechnet man die Eigenwerte und Eigenvektoren: Man berechnet zum Eigenwert 1 den Eigenvektor $\binom{1}{2}$. Wie in Aufgabe 1, Blatt 4 ist dies der Richtungsvektor der invarianten Geraden.

Wir bestimmen nun einen Sützvektor w. Dazu bemerken wir, dass jede Gerade mit Richtungsvektor $\binom{1}{2}$ die y-Achse schneidet. Wir dürfen also $w = \binom{0}{y}$ annehmen.

Wie in der Übung werden Punkte auf der invarianten Geraden um ein Vielfaches des Richtungsvektors verschoben. Insbesondere gilt das für den Stützvektor w, also

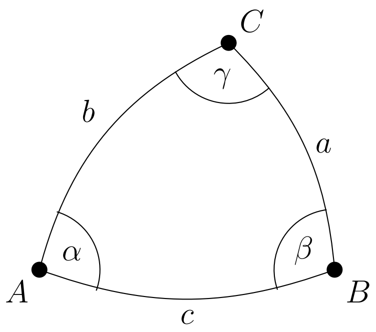
$$f(w) = w + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

für eine reelle Zahl t. Einsetzen von A und v auf der linken Seite liefert dann ein Gleichungssystem für y und t. Die Lösungen sind $y = 1$ und $t = 2$.

Die invariante Gerade ist dann $y = 2x + 1$. Die Verschiebung entlang der Geraden ist $\binom{2}{4}$.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass in jedem sphärischen Dreieck mit Bezeichnungen wie in der Skizze gilt: $\alpha + \beta \leq \gamma + \pi$.
In welchen Fällen gilt Gleichheit?



LÖSUNG:

Aus den Übungen wissen wir, dass für das polare Dreieck mit Bezeichungen a', b', c' und α', β', γ' gilt
$$\alpha = \pi - a', \beta = \pi - b', \gamma = \pi - c'.$$
Wir betrachten die beiden Seiten der Ungleichung getrennt:
Auf der linken Seite steht dann

$$\alpha + \beta = \pi - a' + \pi - b' = 2\pi - (a' + b').$$

Auf der rechten Seite steht

$$\gamma + \pi = \pi - c' + \pi = 2\pi - c'.$$

Wir müssen also zeigen, dass

$$2\pi - (a' + b') \leq 2\pi - c' \Leftrightarrow a' + b' \geq c'.$$

Das ist aber gerade die Dreiecksungleichung für das Dreieck mit den Seiten a, b und c. Damit ist die gesuchte Ungleichung gezeigt.

In der Dreiecksungleichung gilt Gleichheit, wenn die drei Punkte auf einer Geraden, also hier auf einem Großkreis, liegen. In diesem Fall können wir aber nicht mit dem polaren Dreieck argumentieren. Wenn es also ein polares Dreieck gibt, dann gilt keine Gleichheit.
Für Gleichheit betrachten wir also den Fall, dass die drei Punkte A, B, C auf einem Großkreis liegen. In diesem Fall sind alle Winkel gerade π und daher gilt Gleichheit.