Wiederholungsblatt

Elementargeometrie

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Dieses Blattes ist freiwillig, es hat keinen Einfluss mehr auf die Klausurzulassung. Lösungsskizzen zu den Aufgaben werden spätestens ab dem 20.7. auf der Homepage verfügbar sein.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie den geometrischen Typ der Lösungsmenge von

$$(1-a^2)x^2 + 2a^2xy + (1-a^2)y^2 + 2ax + 2ay - 1 = 0$$

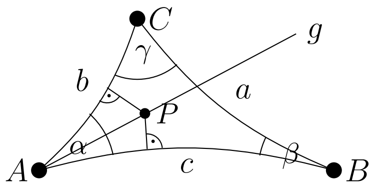
in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{P} = (P, G, I)$ eine projektive Ebene und g und h zwei verschiedene Geraden. Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen den Punkten von g und den Punkten von h an. Geben Sie in jedem Beweisschritt an, welches Axiom Sie benutzen.

Aufgabe 3

In der hyperbolischen Ebene seien nicht-kollineare Punkte A, B, C gegeben. Die Seiten und Winkel des Dreiecks seien bezeichnet wie in der Skizze.



(a) Sei g die Gerade, die den Winkel α halbiert. Der Abstand eines Punktes zu einer Geraden ist gegeben durch die Strecke, die vom Punkt ausgeht und auf der Geraden senkrecht steht.

Zeigen Sie: Ein Punkt P liegt genau dann auf g, wenn er den gleichen Abstand von den (verlängerten) Seiten b und c hat.

(b) Bestimmen Sie einen Punkt M, der von allen drei Seiten den gleichen Abstand hat. Ist dieser Punkt eindeutig?

Hinweis: Betrachten Sie erst den Euklidischen Fall. Benutzen Sie die Kongruenzsätze.

Bitte wenden

Aufgabe 4

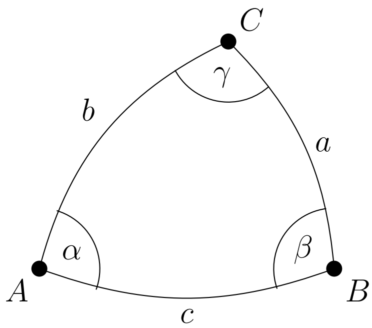
Betrachten Sie folgende Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$f(v) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{22}{5} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass es sich um eine Euklidische Bewegung handelt und beschreiben Sie diese Bewegung geometrisch. D.h., bestimmen Sie den Fixpunkt und Drehwinkel, falls es sich um eine Drehung handelt, und falls es eine Gleitspiegelung ist, bestimmen Sie die invariante Gerade und bestimmen Sie die Größe der Verschiebung entlang der Geraden.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass in jedem sphärischen Dreieck mit Bezeichnungen wie in der Skizze gilt: $\alpha + \beta \leq \gamma + \pi$.
In welchen Fällen gilt Gleichheit?



Hinweis: Benutzen Sie das polare Dreieck.