4. Übungsblatt

Elementargeometrie

im SS 2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Freitag, den 5.6.15
10 Uhr in die Briefkästen

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1 (2+2 Punkte)

Es sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x) = Ax + v$ mit $A \in O(2)$. Dann gilt $\det A \in \{1, -1\}$. Zeigen Sie:

(a) Wenn $A \in O^+(2) \setminus \{\mathrm{Id}\}$, dann existiert genau ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x_0) = x_0$.

(b) Wenn $A \in O^-(2)$, dann existiert genau eine Gerade $g = \{x_0 + tw \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ und genau ein $t_0 \in \mathbb{R}$ (nach Wahl von w), so dass $F(x_0 + tw) = x_0 + (t + t_0)w$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Es seien $x_0 \in \mathbb{R}^2, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $\varphi \in (0, 2\pi), t_0 \in \mathbb{R}$ gegeben.

(a) Beschreiben Sie eine Drehung um x_0 mit Winkel φ als Element von E(2) und zeigen Sie, dass F in Aufgabe 1a) von diesem Typ ist.

(b) Beschreiben Sie eine Gleitspiegelung an $g = \{x_0 + tw \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ als Element von E(2) und zeigen Sie, dass F in Aufgabe 1b) von diesem Typ ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich zuerst, dass $x \mapsto 2\frac{\langle w,x\rangle}{\|w\|}w - x$ eine Spiegelung an der Geraden $g = \{tw \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ beschreibt.