

Elementargeometrie  
Sommersemester 2015

Mario Listing  
überarbeitet von Sebastian Goette und Doris Hein

25. Juli 2015

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Geometrien der Ebene</b>	<b>2</b>
1.1 Inzidenzen und affine Ebenen . . . . .	2
1.2 Hilberts Axiome der Euklidischen Geometrie . . . . .	6
1.3 Euklidische Vektorräume und das kartesische Modell der Euklidischen Geometrie . . . . .	10
1.4 Isometriegruppen Euklidischer Räume . . . . .	16
1.5 Die hyperbolische Ebene . . . . .	19
1.6 Alternativer Zugang zur hyperbolischen Geometrie . . . . .	29
1.7 Projektive Geometrie . . . . .	34
1.8 Zentral- und Parallelprojektion . . . . .	41
1.9 Trigonometrie . . . . .	44
<b>2 Kegelschnitte</b>	<b>49</b>
2.1 Geometrische Figuren . . . . .	49
2.2 Die Kegelschnittgleichung bzw. die allgemeine Gleichung zweiten Grades in $x$ und $y$ . . . . .	51
2.3 Beispiel . . . . .	55
2.4 Projektive Quadriken . . . . .	56
2.5 Die Gleichung zweiten Grades in $n$ Variablen . . . . .	59
<b>3 Polyeder</b>	<b>62</b>
3.1 Polygone und Polyeder . . . . .	62
3.2 Eulersche Polyederformel . . . . .	66
3.3 Platonische Körper . . . . .	69

# Kapitel 1

## Geometrien der Ebene

Die Grundlagen für eine Euklidische Geometrie sind Punkte und Geraden. Im Allgemeinen modelliert man heute die Euklidische Ebene durch den  $\mathbb{R}^2$  und die Begriffe Punkte, Gerade sind in diesem Modell aus der linearen Algebra bekannt. Wir sind aber an einer axiomatischen Beschreibung der Euklidischen Ebene interessiert, so dass wir eine mathematische Definition der Begriffe Punkte, Geraden benötigen. Weiterhin braucht es eine Relation, die erklärt, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt. Dies führt auf den Begriff der Inzidenzstruktur.

### 1.1 Inzidenzen und affine Ebenen

Seien  $P, G$  Mengen und  $I \subseteq P \times G$  eine Teilmenge des kartesischen Produktes, dann heißt das Tripel  $\mathcal{I} := (P, G, I)$  eine *Inzidenzstruktur*. Die Elemente der Menge  $P$  sind die *Punkte* und die Elemente der Menge  $G$  sind die *Geraden* der Inzidenzstruktur  $\mathcal{I}$ . Ein Punkt  $p \in P$  liegt genau dann auf einer Geraden  $g \in G$ , falls  $(p, g) \in I$  gilt. Analog schreibt man dafür auch  $pIg$ , d.h.  $p$  *inzidiert* mit  $g$ . Liegt der Punkt  $p \in P$  nicht auf der Geraden  $g \in G$  schreiben wir  $(p, g) \notin I$ .

Inzidenzstrukturen  $\mathcal{I} = (P, G, I)$  und  $\mathcal{I}' = (P', G', I')$  heißen *isomorph*, wenn es bijektive Abbildungen  $\sigma : P \rightarrow P'$  und  $\tau : G \rightarrow G'$  gibt, so dass  $\sigma \times \tau(I) = I'$ . Diese Bedingung kann man auch folgendermaßen formulieren: für  $p \in P$  und  $g \in G$  gilt  $pIg$  genau dann, wenn  $\sigma(p)I'\tau(g)$  gilt. Wir kennzeichnen einen Isomorphismus durch  $(\sigma, \tau) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$ . Im Fall  $\mathcal{I} = \mathcal{I}'$  heißt ein Isomorphismus  $(\sigma, \tau) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$  *Kollineation*. Insbesondere definiert die komponentenweise Verknüpfung eine Gruppenstruktur auf der Menge der Kollineationen  $\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}$ .

**Beispiel 1.1.** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Wir betrachten den Vektorraum  $\mathbb{K}^2$  mit Punkten  $p := (x, y) \in P = \mathbb{K}^2$  und Geraden  $g := (a, b) + \mathbb{K} \cdot (c, d) \subset \mathbb{K}^2$ , mit  $(c, d) \in \mathbb{K}_*^2 := \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ , sowie der Inzidenzstruktur  $pIg$  gdw.  $p \in \mathbb{K}^2$  ist ein Element der Teilmenge  $g \subset \mathbb{K}^2$ . Zur Beschreibung der Menge der Geraden definieren wir eine Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}_*^2$  durch  $((a, b), (c, d)) \sim ((a', b'), (c', d'))$  gdw.  $(a, b) + \mathbb{K} \cdot (c, d) = (a', b') + \mathbb{K} \cdot (c', d') \subset \mathbb{K}^2$ . Die Menge der Geraden wird also durch den Quotienten  $G := \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}_*^2 / \sim$  beschrieben, d.h. eine Gerade  $g = (a, b) + \mathbb{K} \cdot (c, d) \subset \mathbb{K}^2$  ist eindeutig durch die Äquivalenzklasse  $[(a, b), (c, d)] \in G$  bestimmt. Die Inzidenzstruktur  $I \subseteq P \times G$  ist also definiert durch

$$I = \{((x, y), [(a, b), (c, d)]) \in \mathbb{K}^2 \times G \mid \exists t \in \mathbb{K} : (x - a, y - d) = t(c, d)\}.$$

Diese Geometrie bezeichnet man auch als *kartesische Ebene* über  $\mathbb{K}$ .

Sei  $(P, G, I)$  eine Inzidenzstruktur und  $X \subseteq P$  eine Menge von Punkten, dann heißen die Punkte aus  $X$  *kollinear*, wenn es ein  $g \in G$  mit  $(x, g) \in I$  für alle  $x \in X$  gibt (d.h. die Punkte aus  $X$  liegen alle auf einer Geraden). Eine Menge von Geraden  $H \subseteq G$  heißt *konfluent*, wenn es einen Punkt  $p \in P$  gibt mit  $(p, h) \in I$  für alle  $h \in H$  (d.h. die Geraden aus  $H$  schneiden sich alle in dem Punkt  $p$ ).

Bis auf die Bezeichnungen Punkte und Geraden hat eine Inzidenzstruktur bisher keine geometrische Eigenschaft. Die meisten von uns betrachteten Geometrien sind spezielle Inzidenzgeometrien. Eine *Inzidenzgeometrie* wird durch eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{I} = (P, G, I)$  gegeben, welche die *Inzidenzaxiome* (I1)–(I3) erfüllt:

- (I1) Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
- (I2) Jede Gerade enthält mindestens zwei Punkte.
- (I3) Es gibt drei nicht kollineare Punkte (d.h. es gibt drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen).

(I3) besagt, dass in Inzidenzgeometrien ein Dreieck existiert. Ein weiteres wichtiges Inzidenzaxiom der Euklidischen Ebene wird das Parallelenaxiom sein:

- (P) Für jede Gerade  $g$  und jeden Punkt  $p$ , der nicht auf  $g$  liegt, gibt es höchstens eine Gerade  $h$  durch  $p$  mit  $g \cap h = \emptyset$  ( $g \cap h = \emptyset$  gilt per Definition gdw.  $g$  und  $h$  keinen gemeinsamen Punkt haben).

**Definition 1.2.** Geraden  $g$  und  $h$  sind *parallel* (Bezeichnung  $g \parallel h$ ), wenn  $g$  und  $h$  keinen gemeinsamen Punkt haben (d.h.  $g \cap h = \emptyset$ ) oder es gilt  $g = h$ .

*Übung.* Die kartesische Ebene  $\mathbb{K}^2$  erfüllt die Inzidenzaxiome (I1), (I2), (I3) und (P).

**Definition 1.3.** Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{A}$  heißt *affine Ebene*, wenn  $\mathcal{A}$  den Axiomen (I1), (I3) und dem strengen Parallelenaxiom

(PE) Für jede Gerade  $h$  und jeden Punkt  $p$  von  $\mathcal{A}$  gibt es genau eine durch  $p$  verlaufende Gerade  $g$ , die parallel zu  $h$  ist.

genügt.

*Übung.* Eine affine Ebene ist eine Inzidenzgeometrie, d.h. Axiom (I2) ist auch erfüllt. Parallelität in affinen Ebenen definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geraden.

Den Begriff des affinen Raumes kennen wir bereits aus der linearen Algebra, zum Beispiel ist die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems ein affiner Raum. Insbesondere definiert die kartesische Ebene über  $\mathbb{K}$  eine affine Ebene. Es gibt aber auch affine Ebenen, die nicht isomorph zu kartesischen Ebenen sind. Diese bezeichnet man häufig als nicht Desarguesche Ebenen, da in diesem Fall das Theorem von Desargue nicht gilt.

**Satz 1.4.** (a) *Zwei Geraden in einer affinen Ebene besitzen eine gleichmächtige Anzahl von Punkten.*

(b) *Besitzt eine Gerade der affinen Ebene  $\mathcal{A}$  genau  $n$  Punkte, dann gibt es genau  $n^2$  Punkte und  $n^2 + n$  Geraden in  $\mathcal{A}$ .*

*Beweis.* Zu a): Sei  $g \neq h$ . Wähle Punkte  $p$  auf  $g$  und  $q$  auf  $h$ , so dass  $p$  nicht auf  $h$  und  $q$  nicht auf  $g$  liegt. Dann gibt es eine eindeutige Gerade  $l$  durch  $p$  und  $q$ , insbesondere gilt  $g \neq l$  und  $h \neq l$ . Ist jetzt  $p'$  ein Punkt auf  $g$  und  $l'$  die eindeutige Parallele zu  $l$  durch  $p'$ , dann schneidet  $l'$  die Gerade  $h$  in genau einem Punkt  $q'$  (falls kein Schnittpunkt existiert gilt  $l' \parallel h$  und damit der Widerspruch  $l \parallel h$  vgl. Übung; nach (I1) folgt die Eindeutigkeit des Schnittpunktes, denn  $l \not\parallel h$  zeigt  $l' \neq h$ ). Umgekehrt gibt es zu gegebenem Punkt  $q'$  genau eine zu  $l$  Parallele  $l'$  die  $q'$  enthält, und die Gerade  $g$  in genau einem Punkt  $p'$  schneidet. Also gibt es eine Bijektion

$$\{\text{Punkte auf } g\} \rightarrow \{\text{Punkte auf } h\}.$$

Zu b): Nach Teil a) besitzt jede Gerade genau  $n$  Punkte. Sei eine Gerade  $g_1$  ein Punkt  $p_1$  auf  $g_1$  und ein Punkt  $p_2$ , der nicht auf  $g_1$  liegt, vorgegeben ( $p_2$  existiert nach (I3)). Die Gerade durch  $p_1$  und  $p_2$  enthält die Punkte  $\{p_1, \dots, p_n\}$  und schneidet  $g_1$  in  $p_1$ . Wir betrachten jetzt die Parallelen  $g_j$

zu  $g_1$  durch  $p_j$  für  $j = 1 \dots n$ . Da jede Gerade  $g_j$  genau  $n$  Punkte enthält und  $g_i$  parallel ist zu  $g_j$ , besitzt  $\mathcal{A}$  mindestens  $n^2$  Punkte. Sei jetzt  $p_{n+1}$  ein Punkt der nicht auf den  $g_i$ ,  $i = 1 \dots n$  liegt, und  $g_{n+1}$  die Gerade, welche den Punkt  $p_1$  und  $p_{n+1}$  enthält. Falls  $g_j \cap g_{n+1} = \emptyset$  für ein  $j$  gilt, dann sind  $g_j$  und  $g_{n+1}$  parallel, damit ist aber auch  $g_1$  parallel zu  $g_{n+1}$  (Übung und  $g_1 \parallel g_j$ ). Dies ist aber ein Widerspruch zu  $g_1 \neq g_{n+1}$  und  $g_1 \cap g_{n+1} = p_1$ , also gilt  $g_i \cap g_{n+1} \neq \emptyset$  für alle  $i = 1 \dots n$ . Folglich liegen mindestens  $n+1$  Punkte auf der Geraden  $g_{n+1}$  im Widerspruch zur Annahme und Teil a), dh.  $\mathcal{A}$  enthält genau  $n^2$  Punkte.

Zur Anzahl der Geraden. Zu einer gegebenen Geraden  $g_1$  gibt es genau  $(n-1)$  Geraden  $g_i$  mit  $g_i \cap g_1 = \emptyset$  für  $i \neq 1$  (Existenz folgt wie oben, und sind  $g_1, \dots, g_{n+1}$  paarweise parallel mit  $g_i \neq g_j$ , dann enthält  $\mathcal{A}$  mindestens  $n(n+1)$  Punkte im Widerspruch zum ersten Teil). Folglich schneidet jede Gerade  $h$  mit  $h \neq g_i$  für  $i = 1 \dots n$ , die Geraden  $g_1, \dots, g_n$ . Eine Gerade  $h$  in  $\mathcal{A}$  ist nach (I1) eindeutig durch zwei Punkte bestimmt, also ist  $h$  eindeutig durch den Schnittpunkt mit  $g_1$  und  $g_2$  bestimmt.  $g_1$  und  $g_2$  besitzen jeweils genau  $n$  Punkte, d.h. es gibt genau  $n^2$  Geraden, die nicht parallel zu  $g_1$  sind. Zusammen mit den  $g_1, \dots, g_n$  enthält  $\mathcal{A}$  damit genau  $n^2 + n$  Geraden.  $\square$

Ein Beispiel einer Ebenengeometrie, das keine Inzidenzgeometrie ist, liefert die sphärische Geometrie. Wir betrachten die 2-Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

mit den Punkten  $P = S^2$ . Die Geraden auf  $S^2$  seien die Großkreise, wobei ein Großkreis auf  $S^2$  der Schnitt von  $S^2$  mit einer Ebene durch den Ursprung im  $\mathbb{R}^3$  ist, d.h. ein Großkreis ist die Teilmenge

$$g_{v,w} = \{\cos t \cdot v + \sin t \cdot w \mid t \in \mathbb{R}\}$$

für Vektoren  $v, w \in \mathbb{R}^3$  mit  $\langle v, w \rangle_E = 0$ ,  $|v| = |w| = 1$ . Die Motivation für diese Geraden liefert die geometrisch anschauliche Beobachtung, dass die kürzeste Strecke zwischen zwei verschiedenen Punkten auf  $S^2$  ein Stück eines Großkreises ist. Eine Inzidenzstruktur für die sphärische Geometrie wird durch die offensichtliche Relation gegeben:  $p$  inzidiert mit einer Geraden  $g_{v,w}$  genau dann wenn  $p \in g_{v,w}$ . Axiom (I2) gilt trivialerweise. Für Axiom (I3) wählen wir einen Nordpol  $p \in S^2$  und den zu  $p$  gehörigen Äquator  $g_{v,w}$ . Seien jetzt  $x, y$  verschiedene Punkte auf dem Äquator  $g_{v,w}$ , dann sind  $p, x$  und  $y$  nicht kollinear. Die sphärische Geometrie ist aber keine Inzidenzgeometrie, da Axiom (I1) nur in folgender schwächerer Version gilt:

Durch je zwei verschiedene Punkte geht eine Gerade.

Die Eindeutigkeit der Geraden ist falsch für die Punkte  $p$  und  $-p$ , denn es gibt unendlich viele Geraden durch  $p$  und  $-p$ .

*Übung.* Seien  $p, q$  Punkte auf  $S^2$  mit  $p \neq \pm q$ , dann gibt es genau eine Gerade durch  $p$  und  $q$ .

Seien  $p \neq \pm q$  Punkte auf  $S^2$ , dann bezeichnet  $\overline{pq}$  den zusammenhängenden Teil der Geraden durch  $p$  und  $q$  auf  $S^2$ , der (Bogen)–Länge  $< \pi$  besitzt ( $p$  und  $-p$  besitzen den Abstand  $\pi$ ). Sind jetzt  $p_1, p_2$  und  $p_3$  drei nicht kollineare Punkte auf  $S^2$  mit  $p_i \neq \pm p_j$  für alle  $i \neq j$ , dann definieren die Strecken  $\overline{p_1 p_2}, \overline{p_1 p_3}$  und  $\overline{p_2 p_3}$  ein sphärisches Dreieck. Die Summe der Innenwinkel im sphärischen Dreieck ist immer größer als  $\pi$  ist:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A(p_1, p_2, p_3)$$

wobei  $A(p_1, p_2, p_3)$  den "Flächeninhalt" des Dreieckes bezeichnet.

## 1.2 Hilberts Axiome der Euklidischen Geometrie

Eine Inzidenzgeometrie reicht natürlich nicht aus, um die Euklidische Ebene zu beschreiben. Wir benötigen weiterhin Axiome zur Anordnung und zur Kongruenz von Winkel bzw. Strecken. In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass  $\mathcal{S} = (P, G, I)$  eine Inzidenzgeometrie ist, d.h. es gelten die Axiome (I1), (I2) und (I3).

**Definition 1.5.** Eine Anordnung auf einer Inzidenzgeometrie  $\mathcal{S}$  beschreiben wir durch eine Relation  $*$  wobei  $p*q*r$  genau dann gilt, wenn  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt. Die *Strecke* von  $p$  und  $r$  ist definiert als

$$\overline{pr} = \{q \in P \mid q = p, q = r, \text{ oder } p * q * r\}.$$

Wir fordern die folgenden *Anordnungsaxiome* für die "Zwischenrelation"  $*$ :

- (A1) Falls  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt, dann sind  $p, q, r$  paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden.
- (A2) Falls  $q$  zwischen  $p$  und  $r$  liegt, dann liegt  $q$  auch zwischen  $r$  und  $p$ .
- (A3) Für je zwei verschiedene Punkte  $p$  und  $q$  gibt es einen Punkt  $r$  mit  $p * q * r$ .
- (A4) Von drei Punkten liegt höchstens einer zwischen den beiden anderen.

(A5) Seien  $p, q, r$  drei nicht kollineare Punkte und  $g$  eine Gerade, die keinen dieser Punkte enthält. Falls  $g$  die Strecke  $\overline{pq}$  schneidet (d.h. es gibt einen Punkt  $s$  auf  $g$  und zwischen  $p$  und  $q$ ), dann schneidet  $g$  auch genau eine der beiden Strecken  $\overline{pr}, \overline{qr}$ . (Bild...)

Mit Hilfe dieser Axiome kann man jetzt eine Reihe von Folgerungen ableiten (Übung). Zum Beispiel liegt von drei paarweise verschiedenen Punkten auf einer Geraden genau einer der Punkte zwischen den beiden Anderen. Weiterhin enthält jede Gerade unendlich viele Punkte.

**Korollar 1.6.** Zu je zwei verschiedenen Punkten  $p$  und  $r$  gibt es einen Punkt  $q$ , der zwischen  $p$  und  $r$  liegt.

*Beweis.* Zunächst gibt es einen Punkt  $s$ , der nicht auf der Geraden  $g$  durch  $p$  und  $r$  liegt und dann einen weiteren Punkt  $t$  nach (A3), so dass  $p * s * t$ . Dann gibt es ebenfalls nach (A3) einen Punkt  $u$ , so dass  $t * r * u$  gilt.

Betrachte nun für (A5) das Dreieck mit den Ecken  $p, t, r$  und die Gerade  $h$  durch  $s$  und  $u$ . Die Punkte  $p, t, r$  sind nicht kollinear, denn  $t$  liegt nicht auf  $g$ , da sonst auch  $s$  nach (A1) auf  $g$  liegen würde. Außerdem liegt keiner der Punkte  $p, t$  und  $r$  auf  $h$ . Nach Konstruktion schneidet  $h$  die Strecke  $\overline{pt}$  in  $s$ . Wegen der Eindeutigkeit des Schnittpunktes zweier Geraden schneidet  $h$  die Strecke  $\overline{tr}$  nicht, also schneidet  $h$  nach (A5) die Strecke  $\overline{pr}$ . Der Schnittpunkt liegt dann zwischen  $p$  und  $r$ .  $\square$

**Definition 1.7.** Sei  $g$  eine Gerade und  $p, q, r$  Punkte auf  $g$ . Dann liegen  $q$  und  $r$  auf der *gleichen Seite* von  $p$  auf  $g$ , wenn  $p$  nicht zwischen  $q$  und  $r$  liegt. Auf diese Weise erhalten wir den *Strahl* zweier Punkte  $p \neq q$  ausgehend von  $p$ :

$$S(p, q) = \{r \in P \mid r = p, r = q \text{ oder } p * q * r \text{ oder } p * r * q\}.$$

Ist  $g$  eine Gerade und sind  $p, q$  Punkte, die nicht auf  $g$  liegen, dann liegen  $p$  und  $q$  auf *derselben Seite* von  $g$ , wenn  $g$  die Strecke  $\overline{pq}$  nicht schneidet.

Wir betrachten jetzt eine Äquivalenzrelation  $\cong$  für Strecken, wobei wir der Strecke  $\overline{pq}$  a-priori keinen Wert zuordnen. Wir schreiben  $\overline{pq} \cong \overline{p'q'}$  für den Fall, dass die Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{p'q'}$  kongruent sind. Sei  $\mathcal{S}$  eine angeordnete Inzidenzgeometrie, dann sind die *Kongruenzaxiome für Strecken* gegeben durch:

(K1) Seien  $p, q, r, s$  Punkte mit  $r \neq s$ , dann gibt es genau einen Punkt  $t \in S(r, s)$ , so dass  $\overline{pq} \cong \overline{rt}$ .

(K2)  $\cong$  ist eine Äquivalenzrelation (insbesondere folgt aus  $\overline{pq} \cong \overline{ab}$  und  $\overline{pq} \cong \overline{cd}$ , dass  $\overline{ab} \cong \overline{cd}$ ).



(K3) Sei  $q$  zwischen  $p$  und  $r$ , sowie  $b$  zwischen  $a$  und  $c$ . Falls  $\overline{pq} \cong \overline{ab}$  und  $\overline{qr} \cong \overline{bc}$  gilt, dann gilt auch  $\overline{pr} \cong \overline{ac}$ .

**Definition 1.8.** Ein *Winkel* ist eine Äquivalenzklasse von Tripeln von Punkten  $p, q$  und  $r$ , die nicht kollinear sind, wobei die Tripel  $(p, q, r)$  und  $(p', q', r')$  genau dann äquivalent sind, wenn  $q = q'$  und eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:

- (i)  $p' \in S(q, p)$  und  $r' \in S(q, r)$ .
- (ii)  $p' \in S(q, r)$  und  $r' \in S(q, p)$ .

Eine Äquivalenzklasse von Winkeln bezeichnen wir mit  $\sphericalangle pqr$ .  $q$  heißt *Scheitelpunkt* des Winkels  $\sphericalangle pqr$ .

Wir betrachten jetzt eine Äquivalenzrelation  $\cong$  für Winkel, wobei  $\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r'$  per Definition genau dann gilt, wenn die Winkel  $\sphericalangle pqr$  und  $\sphericalangle p'q'r'$  kongruent sind. Wir setzen eine angeordnete Inzidenzgeometrie und die Kongruenzaxiome für Strecken voraus, dann sind die *Kongruenzaxiome für Winkel* wie folgt gegeben:

- (K4) Die Kongruenz von Winkel definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Winkel.
- (K5) Sei  $\sphericalangle pqr$  ein Winkel und  $p', q', u$  drei nicht kollineare Punkte. Dann gibt es genau einen Winkel  $\sphericalangle p'q'r'$  kongruent zu  $\sphericalangle pqr$ , so dass  $r'$  und  $u$  auf der gleichen Seite der Gerade durch  $p'$  und  $q'$  liegen.
- (K6) Seien  $(p, q, r)$  und  $(p', q', r')$  Tripel von Punkten, die jeweils nicht kollinear sind. Dann gilt mit

$$\overline{pq} \cong \overline{p'q'}, \quad \overline{pr} \cong \overline{p'r'}, \quad \text{und} \quad \sphericalangle qpr \cong \sphericalangle q'p'r'$$

auch  $\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r'$  (Bild).

**Satz 1.9.** *Mit den Voraussetzungen in (K6) folgt auch*

$$\sphericalangle prq \cong \sphericalangle p'r'q' \quad \text{und} \quad \overline{qr} \cong \overline{q'r'}.$$

*Beweis.* Übung. □

**Korollar 1.10** (Kongruenz von Nebenwinkeln). Es gelte  $p*q*r$  und  $p'*q'*r'$ . Sei  $s$  nicht kollinear zu  $p, q$  und  $s'$  nicht kollinear zu  $p', q'$  mit  $\sphericalangle pqs \cong \sphericalangle p'q's'$ , dann gilt auch  $\sphericalangle rqs \cong \sphericalangle r'q's'$ . (Bild..)

*Beweis.* Übung. □

Mit Hilfe der Kongruenzaxiome kann man jetzt die Existenz einer Parallelen zeigen. Die Eindeutigkeit der Parallelen, d.h. das Parallelenaxiom (P), folgt aber nicht aus diesen Axiomen. Wir werden später eine nicht-Euklidische Geometrie kennenlernen, die bis auf das Parallelenaxiom (P) alle Axiome der Euklidischen Geometrie erfüllt.

**Satz 1.11** (Existenz einer Parallelen). *Gegeben sei eine Inzidenzgeometrie mit Zwischenrelation und Kongruenzrelationen für Strecken und Winkel, so dass (A1)–(A5) und (K1)–(K6) gilt. Ist  $g$  eine Gerade und  $p$  ein Punkt, dann gibt es eine zu  $g$  parallele Gerade  $h$ , die den Punkt  $p$  enthält.*

*Beweis.* Die Aussage ist offensichtlich, wenn  $p$  auf  $g$  liegt. Sei also  $p$  nicht auf der Geraden  $g$ . Sei  $g'$  eine Gerade durch  $p$ . Wenn  $g'$  die Gerade  $g$  nicht schneidet, dann sind  $g$  und  $g'$  parallel. Umgekehrt, wenn  $g'$  und  $g$  nicht parallel sind, gibt es einen Schnittpunkt  $q$ , einen Punkt  $r \neq q$  auf  $g$  und nach (A3) auch einen Punkt  $u$  auf  $g$ , der auf der anderen Seite von  $g'$  liegt wie  $r$ . Nach (K5) gibt es jetzt einen Punkt  $s$  auf der gleichen Seite von  $g'$  wie  $u$  und mit  $\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle qps$ . Sei  $h$  die Gerade durch  $p$  und  $s$ , dann sind  $g$  und  $h$  parallel durch folgenden Widerspruch: Angenommen es gibt einen Schnittpunkt  $t$  von  $g$  und  $h$ , und  $t$  liege ohne Einschränkung auf der gleichen Seite von  $g'$  wie  $r$  (andernfalls vertausche die Rollen der Punkte). Wir konstruieren einen Punkt  $v$  auf der Geraden  $h$ , so dass sich  $v$  auf der anderen Seite von  $g'$  wie  $t$  befindet und  $\overline{pv} \cong \overline{qt}$ . Nach Satz 1.9 sind die Dreiecke  $\triangle qpt$  und  $\triangle pqv$  kongruent. Aus der Kongruenz von Nebenwinkeln (Korollar 1.10) und Axiom (K5) folgt damit  $vIg$ . Also schneiden sich  $g$  und  $h$  in den Punkten  $t$  und  $v$ , im Widerspruch zu (I1) und  $g \neq h$  (Bild). □

Für die uns bekannte Euklidische Geometrie fehlen uns nur noch die Axiome zur Vollständigkeit:

- (V1) *Axiom von Archimedes:* Seien  $p, q, r$  drei paarweise verschiedene Punkte auf einer Geraden  $g$ , so dass  $p$  nicht zwischen  $q$  und  $r$  liegt. Dann gibt es Punkte  $q = q_1, q_2, \dots$  auf  $g$  mit  $\overline{q_i q_{i+1}} \cong \overline{pq}$  und  $p * q_i * q_{i+1}$ . Nach endlich vielen Schritten liegt  $r$  zwischen  $p$  und  $q_k$ .
- (V2) *Axiom von Dedekind:* Seien die Punkte einer Geraden  $g$  in nicht leere Teilmengen  $S$  und  $T$  derart aufgeteilt, dass kein Punkt von  $T$  zwischen zwei Punkten von  $S$  und kein Punkt von  $S$  zwischen zwei Punkten von  $T$  liegt. Dann gibt es genau einen Punkt  $p$  auf  $g$ , so dass für beliebiges  $s \in S$  und  $t \in T$  gilt:  $p = s$ ,  $p = t$  oder  $s * p * t$ .

**Definition 1.12.** Die *Euklidische Ebene* ist ein 6-Tupel

$$(P, G, I, *, \cong_S, \cong_W)$$

bestehend aus einer Inzidenzstruktur  $(P, G, I)$ , einer Relation  $*$  zur Anordnung, Relationen zur Kongruenz von Strecken  $\cong_S$  sowie zur Kongruenz von Winkeln  $\cong_W$ , welches die Axiome (I1)–(I3), (A1)–(A5), (K1)–(K6), (V1), (V2) und das Parallelenaxiom (P) erfüllt.

Ein *Isomorphismus* von Euklidischen Ebenen

$$(P, G, I, *, \cong_S, \cong_W) \rightarrow (P', G', I', *', \cong'_S, \cong'_W)$$

ist gegeben durch einen Isomorphismus  $(\sigma, \tau) : (P, G, I) \rightarrow (P', G', I')$ , welcher die Zwischenrelation und die Kongruenzrelationen erhält, d.h.  $\sigma : P \rightarrow P'$  und  $\tau : G \rightarrow G'$  sind Bijektionen mit folgenden Eigenschaften:

- (i)  $pIq \iff \sigma(p)I'\tau(q)$ .
- (ii)  $p * q * r \iff \sigma(p) *' \sigma(q) *' \sigma(r)$ .
- (iii)  $\overline{pq} \cong_S \overline{uv} \iff \overline{\sigma(p)\sigma(q)} \cong'_S \overline{\sigma(u)\sigma(v)}$ .
- (iv)  $\sphericalangle pqt \cong_W \sphericalangle uvw \iff \sphericalangle \sigma(p)\sigma(q)\sigma(t) \cong'_W \sphericalangle \sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)$ .

Die Euklidische Ebene ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt, wie wir später sehen werden. Im folgenden Abschnitt wollen wir jetzt diese bis auf Isomorphie eindeutige Ebene durch das uns vertraute Modell beschreiben.

### 1.3 Euklidische Vektorräume und das kartesische Modell der Euklidischen Geometrie

Der axiomatische Zugang zur Euklidischen Geometrie ist zwar sehr anschaulich, konkrete Rechnungen sind aber oft sehr mühsam. Deshalb benutzt man häufig einen *2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum* wie den  $\mathbb{R}^2$  zur Beschreibung der Euklidischen Ebene. Vorsicht ist aber im Sprachgebrauch dieser Begriffe geboten. In Euklids Geometrie gibt es keinen ausgezeichneten Punkt, im Gegensatz dazu ist der Nullvektor des Euklidischen Vektorraumes ausgezeichnet. Weiterhin kann man im Euklidischen Vektorraum den Betrag von Winkeln und Strecken messen, wohingegen in Euklid's Geometrie nur der Begriff der Kongruenz existiert. Ein Euklidischer Vektorraum besitzt also etwas mehr Struktur als die von Euklid definierte Geometrie.

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ein (*positiv definites*) *Skalarprodukt* auf  $V$  ist eine Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

(i) bilinear:

$$\begin{aligned}\langle \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2, w \rangle &= \mu_1 \cdot \langle v_1, w \rangle + \mu_2 \cdot \langle v_2, w \rangle \\ \langle w, \mu_1 \cdot v_1 + \mu_2 \cdot v_2 \rangle &= \mu_1 \cdot \langle w, v_1 \rangle + \mu_2 \cdot \langle w, v_2 \rangle\end{aligned}$$

für alle  $v_1, v_2, w \in V$  und  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ .

(ii) symmetrisch:  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$  für alle  $v, w \in V$ .

(iii) positiv definit:  $\langle v, v \rangle \geq 0$  für alle  $v \in V$ , und  $\langle v, v \rangle = 0$  gilt genau dann, wenn  $v = 0$ .

Offensichtlich definiert

$$\left\langle \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \right\rangle_E := \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ein Skalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$  heißt *Standardskalarprodukt*.

**Bemerkung 1.13.** Sei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ein Skalarprodukt auf  $V$ , dann existiert eine *orthonormale Basis* von  $V$ , d.h. es gibt eine Basis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  mit  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  (vgl. lineare Algebra, Gram-Schmidt Verfahren). Damit kann man jeden Vektor  $v \in V$  schreiben als  $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ , wobei  $v_i \in \mathbb{R}$  eindeutig durch  $v_i := \langle v, e_i \rangle$  gegeben ist.

**Definition 1.14.** Ein  *$n$ -dimensionaler Euklidischer Vektorraum* ist ein Paar  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  bestehend aus einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum  $V$  und einem (positiv definiten) Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Die *Norm* eines Vektors  $v \in V$  im Euklidischen Vektorraum  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist definiert durch  $|v| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ .

Wir zeigen, dass ein 2-dimensionaler Euklidischer Vektorraum eine Euklidische Ebene definiert. Der folgende Satz reduziert das Problem auf den Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standardskalarprodukt:

**Satz 1.15.** *Seien  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$  und  $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$  zwei  $n$ -dimensionale Euklidische Vektorräume, dann gibt es einen Isomorphismus  $f : V \rightarrow W$  mit*

$$\langle f(v_1), f(v_2) \rangle_V = \langle v_1, v_2 \rangle_W$$

für alle  $v_1, v_2 \in V$ .

*Beweis.* Sei  $e_1, \dots, e_n$  eine orthonormale Basis von  $V$  und  $e'_1, \dots, e'_n$  eine orthonormale Basis von  $W$ . Dann definiert die Zuordnung  $f(e_k) := e'_k$ ,  $k = 1 \dots n$ , einen Isomorphismus  $f : V \rightarrow W$  mit

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle = \delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle.$$

Aufgrund der Bilinearität des Skalarproduktes und der Linearität von  $f$  folgt die Behauptung.  $\square$

Wir betrachten also jetzt den reellen Vektorraum  $\mathbb{R}^2$  mit dem Standard-skalarprodukt

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_E := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Eine Gerade  $g$  im  $\mathbb{R}^2$  wird durch 2-Punkte  $p \neq q$  bestimmt  $g := p + \mathbb{R} \cdot (q - p) \subset \mathbb{R}^2$ . Wir betrachten die Menge der Punkte  $P = \mathbb{R}^2$  und die Menge der Geraden  $G$  im  $\mathbb{R}^2$ , sowie die Inzidenzstruktur  $p \in P$  inzidiert mit  $g \in G$  genau dann, wenn  $p \in g$  als Menge gilt. Wir definieren die Zwischenrelation über die Strecke von  $p, q \in \mathbb{R}^2$ :

$$\overline{pq} = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}.$$

Insbesondere gilt für  $p \neq q$  die Beziehung  $p * v * q$  genau dann, wenn  $v \neq p, q$  und  $v \in \overline{pq}$ , d.h.  $v = (1-t)p + tq$  für ein  $0 < t < 1$ . Zur Definition der Kongruenz betrachten wir die *Euklidische Bewegungsgruppe*. Dazu sei

$$O(2) = \{A \in \text{Mat}(2, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id}\}$$

die Gruppe der orthogonalen  $2 \times 2$  Matrizen und  $E(2) := O(2) \ltimes \mathbb{R}^2$  die Euklidische Bewegungsgruppe, d.h.  $E(2)$  ist  $O(2) \times \mathbb{R}^2$  als Menge mit der Verknüpfung

$$(A, v) \cdot (B, w) := (AB, Aw + v),$$

wobei  $A, B \in O(2)$  und  $v, w \in \mathbb{R}^2$ .  $E(2)$  wirkt auf  $P = \mathbb{R}^2$  durch

$$E(2) \times P \rightarrow P, ((A, v), p) \mapsto (A, v)p := Ap + v.$$

Dies ist eine Gruppenwirkung und geometrisch anschaulich beschreibt diese Wirkung die möglichen Drehungen, Spiegelungen und Verschiebungen im  $\mathbb{R}^2$ . Betrachtet man die Geraden als Teilmenge des  $\mathbb{R}^2$ , bildet  $E(2)$  Geraden auf Geraden derart ab, dass  $p$  genau dann auf  $g$  liegt, wenn  $(A, v)p$  auf der Geraden  $(A, v)(g)$  liegt. Die Zwischenrelation  $*$  ist auch invariant unter der Gruppenwirkung  $E(2)$ , denn

$$(1-t)((A, v)p) + t((A, v)q) = (1-t)(Ap + v) + t(Aq + v) = (A, v)((1-t)p + tq).$$

**Definition 1.16.** Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{p'q'}$  heißen *kongruent*, wenn es ein Element  $(A, v) \in E(2)$  mit  $(A, v)p = p'$  und  $(A, v)q = q'$  gibt. Analog heißen Winkel  $\sphericalangle pqr$  und  $\sphericalangle p'q'r'$  *kongruent*, wenn es ein  $f := (A, v) \in E(2)$  mit  $\sphericalangle p'q'r' \equiv \sphericalangle f(p)f(q)f(r)$  gibt.

Dies definiert wieder ein 6-Tupel:

$$\mathcal{E} = (P = \mathbb{R}^2, G, I, *, \cong_S, \cong_W)$$

und es gilt:

**Satz 1.17** ([H, B]).  $\mathcal{E}$  ist eine Euklidische Ebene, d.h. es gelten die Axiome (I1)–(I3), (A1)–(A5), (K1)–(K6), (V1), (V2) und das Parallelenaxiom (P).

Im Allgemeinen kann es aufwendig sein, die explizite Bewegung  $(A, v) \in E(2)$  zu finden, die man zur Kongruenz von Winkeln bzw. Strecken benötigt. Deshalb definieren wir jetzt mit Hilfe der Norm eines Vektors die *Länge einer Strecke*:

$$|\overline{pq}| := |p - q|, \quad p, q \in \mathbb{R}^2.$$

Weiterhin definieren wir den *Betrag eines Winkels* durch

$$|\sphericalangle pqr| = \arccos \frac{\langle p - q, r - q \rangle}{|\overline{pq}| \cdot |\overline{rq}|}$$

wobei  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$  einen Zweig des Arcuscosinus beschreibt und  $p \neq q, q \neq r$ . Mit diesen Definitionen gilt folgender Satz:

**Satz 1.18.** *Zwei Strecken sind genau dann kongruent, wenn sie gleich lang sind. Zwei Winkel sind genau dann kongruent, wenn sie den gleichen Betrag haben.*

*Beweis.* Übung. □

Seien jetzt  $p, q, r \in \mathbb{R}^2$  nicht kollineare Punkte, dann betrachten wir das Dreieck  $\triangle pqr$  mit den Seitenlängen

$$a = |\overline{rq}|, \quad b = |\overline{pq}|, \quad c = |\overline{pr}|$$

und den Winkelbeträgen:

$$\alpha = |\sphericalangle qpr|, \quad \beta = |\sphericalangle prq|, \quad \gamma = |\sphericalangle pqr|$$

und erhalten die bekannten Winkelsätze der Euklidischen Geometrie:

(i) Cosinussatz:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$ .

(ii) Sinussatz:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ .

(iii) Winkelsumme:  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

*Beweis.* (i): Ohne Einschränkung können wir durch Verschieben des Dreiecks  $q = 0$  wählen. Dann gilt nach Definition des Betrags eines Winkels:

$$\cos \gamma = \frac{\langle p, r \rangle}{a \cdot b} = \frac{1}{2ab} \cdot (-|p - r|^2 + |p|^2 + |r|^2) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

(ii)+(iii) Übung. □

In Satz 1.9 haben wir bereits gesehen, dass zwei Seiten und der dazwischen liegende Winkel ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig beschreiben. Mit den Winkelsätzen beweist man dann auch die anderen Kongruenzsätze für Dreiecke:

**Satz 1.19.** *Seien  $p, q, r$  und  $p', q', r'$  jeweils drei nicht kollineare Punkte in einer Euklidischen Ebene.*

(SSS) Mit

$$\overline{pq} \cong \overline{p'q'}, \quad \overline{pr} \cong \overline{p'r'}, \quad \text{und} \quad \overline{qr} \cong \overline{q'r'}$$

*gilt auch*

$$\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r', \quad \sphericalangle qpr \cong \sphericalangle q'p'r', \quad \text{und} \quad \sphericalangle qrp \cong \sphericalangle q'r'p'.$$

(WWS) Mit

$$\overline{pq} \cong \overline{p'q'}, \quad \sphericalangle qpr \cong \sphericalangle q'p'r' \quad \text{und} \quad \sphericalangle qrp \cong \sphericalangle q'r'p'$$

*gilt auch*

$$\sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r', \quad \overline{pr} \cong \overline{p'r'} \quad \text{und} \quad \overline{qr} \cong \overline{q'r'}.$$

(WSW) Mit

$$\overline{pq} \cong \overline{p'q'}, \quad \sphericalangle pqr \cong \sphericalangle p'q'r' \quad \text{und} \quad \sphericalangle qpr \cong \sphericalangle q'p'r',$$

*gilt auch*

$$\sphericalangle qrp \cong \sphericalangle q'r'p', \quad \overline{pr} \cong \overline{p'r'} \quad \text{und} \quad \overline{qr} \cong \overline{q'r'}.$$

Da die Winkelsumme in jedem Dreieck gleich ist, sind die letzten beiden Aussagen eigentlich der gleiche Satz. Denn mit je zwei Winkeln kennt man auch den dritten Winkel und somit spielt es keine Rolle, welche Seite man kennt.

Nur die Kongruenz der Winkel ist nicht ausreichend, da man das Dreieck dann immer noch skalieren kann, wodurch sich die Längen der Strecken, aber nicht die Winkel ändern. Um ein Dreieck bis auf Kongruenz zu beschreiben, braucht man also mindestens eine Seitenlänge.

Ebenso reicht es im Allgemeinen nicht aus, zwei Seiten und einen Winkel zu kennen, der nicht dazwischen liegt. Hier wird das Dreieck nur dann eindeutig beschrieben, wenn der gegebene Winkel der größeren der beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt.

**Theorem 1.20.** *Jede Euklidische Ebene isomorph zum zweidimensionalen Euklidischen Vektorraum.*

Dieses Theorem wird zum Beispiel in [H, Theorem 21.1, Corollary 21.3] gezeigt. Insbesondere sind damit je zwei Euklidische Ebenen isomorph.

*Beweisskizze, mit Bildern.* Umgekehrt kann man durch die Wahl von 2 Punkten aus einer Euklidischen Ebene  $\mathcal{E} = (P, G, I, ..)$  im Sinne der Hilbert Axiome einen 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum  $(P, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  konstruieren. Da der eigentliche Beweis umfangreich ist und uns nicht viel Neues liefert, wollen wir diese Konstruktion hier nur skizzieren. Wir wählen einen festen Punkt  $p_0 \in P$ , dies wird der Nullvektor in  $P$  sein. Für zwei Punkte  $v, w \in P$  mit  $v, p_0, w$  nicht kollinear sei  $v + w$  wie folgt definiert (Bild): Sei  $g$  die eindeutige Gerade durch  $w$ , die parallel ist zur Geraden durch  $v$  und  $p_0$ , sowie  $h$  die eindeutige Gerade durch  $v$ , die parallel ist zur Geraden durch  $w$  und  $p_0$ , dann schneiden sich  $g$  und  $h$  genau in dem Punkt  $v + w$ .  $-v$  konstruieren wir als den Punkt auf der Geraden durch  $p_0$  und  $v$  mit der Eigenschaft  $\overline{-vp_0} = \overline{p_0v}$ . Definiert man jetzt noch  $p_0 + v = v + p_0 = v$  ist  $(P, +)$  eine abelsche Gruppe. Aufgrund der Vollständigkeitsaxiome ist die Menge der Punkte auf einer Geraden bijektiv zu  $\mathbb{R}$ , und nach Wahl eines festen Punktes  $p_1 \neq p_0$  können wir beliebige (reelle) Strecken auf Geraden abtragen: Es gibt eine Bijektion

$$\mathbb{R} \rightarrow \{\text{Punkte auf Geraden durch } p_0, p_1\},$$

welche die Anordnung, die Kongruenz von Strecken erhält und 0 auf  $p_0$  sowie 1 auf  $p_1$  abbildet. Damit ist  $t \cdot p_1$  wohldefiniert für  $t \in \mathbb{R}$ , und durch Abtragen von Strecken ist auch  $t \cdot v$  wohldefiniert für  $v \in P$  mit  $(-1) \cdot v = -v$ . Mit ein paar Überlegungen erhalten wir einen reellen Vektorraum  $P$  mit Nullvektor  $p_0$ . Dieser reelle Vektorraum ist 2-dimensional, da  $\dim P \geq 2$  nach Axiom (I3) und  $\dim P \leq 2$  nach Axiom (A5) gilt. Mit Hilfe der Kongruenzaxiome konstruieren wir jetzt den bis auf das Vorzeichen eindeutigen Punkt  $p_2$ ,



der nicht auf der Geraden durch  $p_0$  und  $p_1$  liegt, so dass  $\overline{p_2 p_0} \cong \overline{p_1 p_0}$  und  $\angle p_1 p_0 p_2 \cong \angle (-p_1) p_0 p_2$ .  $p_1$  und  $p_2$  bilden jetzt eine orthonormale Basis von  $P$ , d.h. das Skalarprodukt auf  $P$  wird durch  $p_1$  und  $p_2$  gegeben.  $\square$

## 1.4 Isometriegruppen Euklidischer Räume

Eine *Isometrie* ist im wesentlichen eine Abbildung, die Längen und Winkel erhält. Begrifflich muss man aber die lineare Isometrie von Euklidischen Vektorräumen, und Isometrien des Euklidischen Raumes unterscheiden. Eine lineare Isometrie erlaubt keine Verschiebung von Vektoren: Da die Abbildung linear ist, wird Null auf Null abgebildet. Eine *lineare Isometrie* des Euklidischen Vektorraumes  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  mit

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle  $v, w \in V$ . Die Menge der linearen Isometrien

$$O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle) := \{f \in \text{End}(V) \mid \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V\}$$

heißt *orthogonale Gruppe* von  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Nach Satz 1.15 ist  $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  als Gruppe isomorph zu der etwas anschaulicheren Gruppe

$$O(n) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id}\}$$

wobei  $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ .

*Übung.* Zeigen Sie, dass  $O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  eine Gruppe bzgl. Komposition von Abbildungen ist und isomorph zu  $O(n)$ .

Sei  $A \in O(2)$ , dann gilt offensichtlich  $\det A = \pm 1$ , d.h.  $O(2)$  zerlegt sich disjunkt in

$$O^+(2) = \text{SO}(2) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id}, \det A = 1\}$$

$$O^-(2) = \{A \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid A^t A = \text{Id}, \det A = -1\}.$$

$O^+(2)$  ist die Gruppe der *Drehungen*, und  $O^-(2)$  ist die Menge der *Spiegelungen* an einer Achse durch 0. Man beachte, dass  $O^-(2)$  keine Gruppe bzgl. Matrixmultiplikation ist. Sei  $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O^+(2)$ , dann folgt aus  $A^t A = \text{Id}$  und  $\det A = 1$ :

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0, \quad ad - bc = 1.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} 0 &= a^2b + acd = a^2b + c(1 + bc) = b(a^2 + c^2) + c = b + c \\ 0 &= ab + cd = ab - bd = b(a - d), \end{aligned}$$

d.h. für  $b \neq 0$  erhalten wir  $a = d$  und für  $b = c = 0$  folgt aus  $a^2 = d^2 = 1$  und  $ad = 1$  auch  $a = d \in \{\pm 1\}$ . Also sind  $b$  und  $d$  durch  $a, c$  bestimmt und für  $a, c$  gilt  $a^2 + c^2 = 1$ . Dies ist die Kreislinie, welche wir durch  $a = \cos \theta$ ,  $c = \sin \theta$  mit  $\theta \in [0, 2\pi)$  beschreiben können, d.h.

$$O^+(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Die Wirkung von  $A \in O^+(2)$  auf dem  $\mathbb{R}^2$  entspricht also einer Drehung im mathematisch positiven Sinn (gegen Uhrzeigersinn) um den Ursprung  $0$  mit einem Winkel  $[0, 2\pi)$ . Analog zeigt man

$$O^-(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Folglich zerlegt sich  $B \in O^-(2)$  eindeutig in  $B = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  mit  $A \in O^+(2)$ , d.h.  $B$  entspricht einer Drehung um einen bestimmten Winkel und der Spiegelung an der  $x$ -Achse:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O^-(2)$ .

Wir wollen jetzt den allgemeinen Fall untersuchen. Ein Isomorphismus einer Euklidischen Ebene auf sich selbst

$$(\sigma, \tau) : (P, G, I, *, \cong_S, \cong_W) \rightarrow (P, G, I, *, \cong_S, \cong_W)$$

heißt *Isometrie*, wenn  $\overline{pq} \cong_S \overline{\sigma(p)\sigma(q)}$  für alle Punkte  $p, q$  gilt. Sei jetzt  $(\sigma, \tau)$  eine Isometrie. Modellieren wir die Euklidische Ebene als 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum  $(P, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , so ist  $\tau$  durch die Bijektion  $\sigma : P \rightarrow P$  bestimmt und Satz 1.18 liefert:

$$|\sigma(p) - \sigma(q)| = |\overline{\sigma(p)\sigma(q)}| = |\overline{pq}| = |p - q| \quad (1.1)$$

für alle  $p, q \in P$ . Umgekehrt liefert eine bijektive Abbildung  $\sigma : P \rightarrow P$  mit der Eigenschaft (1.1) eine Isometrie  $(\sigma, \tau)$  der Euklidischen Ebene. Dies motiviert folgende Definition.

**Definition 1.21.** Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein Euklidischer Vektorraum. Dann heißt eine Abbildung  $f : V \rightarrow V$  mit

$$|f(v) - f(w)| = |v - w|$$

*allgemeine Isometrie* oder auch *Bewegung* von  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

**Satz 1.22.** Sei  $f : V \rightarrow V$  eine Bewegung, dann gibt es genau ein  $w \in V$  und  $h \in O(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  mit  $f(v) = h(v) + w$  für alle  $v \in V$ .

*Beweis.* Zur Eindeutigkeit von  $h$  und  $w$ : Sei  $h_1(v) + w_1 = h_2(v) + w_2$  für alle  $v$ , dann folgt  $w_1 = w_2$  aus  $h_1(0) = h_2(0) = 0$ . Damit erhalten wir aber  $h_1(v) = h_2(v)$  für alle  $v$ .

Existenz von  $h$  und  $w$ : Definiere  $w := f(0)$  sowie  $h : V \rightarrow V$  durch  $h(v) := f(v) - w$ , dann gilt  $h(0) = 0$  sowie  $|h(v)| = |v|$  für alle  $v \in V$ , d.h.

$$\begin{aligned} 2 \langle h(x), h(y) \rangle &= |h(x)|^2 + |h(y)|^2 - |h(x) - h(y)|^2 \\ &= |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2 \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Noch zu zeigen:  $h$  ist linear. Seien  $s, t \in \mathbb{R}$ ,  $x, y \in V$  und  $v := s \cdot x + t \cdot y$ , dann gilt

$$\begin{aligned} |h(v) - s \cdot h(x) - t \cdot h(y)|^2 &= |h(v)|^2 + s^2|h(x)|^2 + t^2|h(y)|^2 - 2s \langle h(v), h(x) \rangle \\ &\quad - 2t \langle h(v), h(y) \rangle + 2st \langle h(x), h(y) \rangle \\ &= |v|^2 + s^2|x|^2 + t^2|y|^2 - 2s \langle v, x \rangle \\ &\quad - 2t \langle v, y \rangle + 2st \langle x, y \rangle \\ &= |v - s \cdot x - t \cdot y|^2 = 0. \end{aligned}$$

□

Die Menge aller Bewegungen  $E(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ist bzgl. der Komposition von Abbildungen eine Gruppe und heißt *Bewegungsgruppe des Euklidischen Vektorraumes*  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Die Gruppe  $E(2) := E(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_E)$  und ihre Wirkung auf dem  $\mathbb{R}^2$  kennen wir bereits aus dem letzten Abschnitt.

Eine Isometrie ist eine längentreue Abbildung, und nach letztem Satz ist diese Abbildung auch winkeltreu. Damit stellt sich die Frage: Gibt es winkeltreue Abbildungen, die nicht längentreu sind? Ein Isomorphismus

$$(\sigma, \tau) : (P, G, I, *, \cong_S, \cong_W) \rightarrow (P, G, I, *, \cong_S, \cong_W)$$

heißt *winkeltreu* oder auch *konform*, wenn  $\sphericalangle prq \cong_W \sphericalangle \sigma(p)\sigma(q)\sigma(r)$  für alle nicht kollinearen Punkte  $p, q, r$  gilt. Die Menge der winkeltreuen Isomorphismen definiert offensichtlich eine Gruppe. Betrachten wir  $P$  wieder als 2-dimensionalen Euklidischen Vektorraum gilt für einen winkeltreuen Isomorphismus  $(\sigma, \tau)$ :

$$\frac{\langle p - q, r - q \rangle}{|\overline{pq}| \cdot |\overline{rq}|} = \frac{\langle \sigma(p) - \sigma(q), \sigma(r) - \sigma(q) \rangle}{|\overline{\sigma(p)\sigma(q)}| \cdot |\overline{\sigma(r)\sigma(q)}|}.$$

Sei  $\sigma : P \rightarrow P$  zusätzlich linear vorausgesetzt, dann erhalten wir

$$\frac{\langle \sigma(v), \sigma(w) \rangle}{|\sigma(v)| \cdot |\sigma(w)|} = \frac{\langle v, w \rangle}{|v| \cdot |w|}$$

für alle  $0 \neq v, w \in P$ . Sei  $c \neq 0$  eine Konstante, dann ist die Abbildung  $\sigma : P \rightarrow P$  mit  $\sigma(v) = c \cdot v$  eine lineare winkeltreue Abbildung des Euklidischen Raumes. Für  $c \neq \pm 1$  ist dieses  $\sigma$  aber keine Isometrie, d.h. es gibt winkeltreue Abbildungen, die nicht längentreu sind.

## 1.5 Die hyperbolische Ebene

In einem Axiomensystem stellt sich natürlich immer die Frage nach der Unabhängigkeit der Axiome und der Widerspruchsfreiheit. Die Widerspruchsfreiheit der Axiome (I1)–(I3), (A1)–(A5), (K1)–(K6), (V1), (V2) und (P) haben wir durch das kartesische Modell der Euklidischen Geometrie gezeigt. Die Unabhängigkeit der einzelnen Axiome folgt im Allgemeinen aus einfachen Beispielen. Die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms (P) war aber rund 2000 Jahre ein ungelöstes Problem. Erst im Jahr 1830 veröffentlichte Lobachevsky eine nicht Euklidische Geometrie, die bis auf das Parallelenaxiom alle Axiome der Euklidischen Ebene erfüllt. Der Begriff hyperbolische Geometrie wurde später durch Felix Klein geprägt. Axiomatisch erhalten wir die hyperbolische Ebene durch

- (H) Sei  $g$  eine Gerade und  $p$  ein Punkt, der nicht auf  $g$  liegt. Dann gibt es zwei verschiedene Geraden durch  $p$ , die parallel zu  $g$  sind.

Es wird sich zeigen, dass es für eine Gerade  $g$  und einen Punkt  $p$ , der nicht auf  $g$  liegt, sogar unendlich viele zu  $g$  parallele Geraden durch  $p$  gibt.

**Definition 1.23.** Die *hyperbolische Ebene* ist ein 6-Tupel

$$(P, G, I, *, \cong_S, \cong_W)$$

bestehend aus einer Inzidenzstruktur  $(P, G, I)$ , einer Zwischenrelation  $*$ , Relationen zur Kongruenz von Strecken  $\cong_S$  sowie zur Kongruenz von Winkeln  $\cong_W$ , welches die Axiome (I1)–(I3), (A1)–(A5), (K1)–(K6), (V1), (V2) und das Axiom (H) erfüllt.

Ein Isomorphismus hyperbolische Ebenen ist ein Isomorphismus von Inzidenzstrukturen, der die Anordnung, die Kongruenz von Strecken und die Kongruenz von Winkeln erhält.

**Theorem 1.24** ([E]). *Bis auf Isomorphie gibt es genau eine hyperbolische Ebene.*

Die Eindeutigkeit im Theorem werden wir nicht beweisen, für die Existenz einer hyperbolischen Geometrie geben wir wieder ein Modell an. Für die hyperbolische Geometrie gibt es verschiedene Modelle, zum Beispiel:

- Kleinsche Kreisscheibenmodell.
- Poincarésche Kreisscheibenmodell.
- Poincarésche Halbebenenmodell.
- Hyperboloid Modell.

Wir werden das Poincarésche Kreisscheibenmodell betrachten. Zur Vereinfachung identifizieren wir oft den  $\mathbb{R}^2$  mit den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Man beachte, dass für  $z = (x, y) = x + iy$  folgendes gilt  $|(x, y)|_E^2 = |z|^2 = z \cdot \bar{z}$ . Die Menge der Punkte wird gegeben durch das Innere der Kreisscheibe

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}.$$

$g$  ist eine Gerade im Kreisscheibenmodell, wenn

- es eine Gerade  $h$  im Euklidischen  $\mathbb{R}^2$  durch 0 gibt, so dass  $g = h \cap P$ .
- es einen Kreis  $k \subset \mathbb{R}^2$  im  $\mathbb{R}^2$  gibt, so dass  $g = k \cap P$  und  $k$  den Einheitskreis  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  orthogonal schneidet (im Sinne von Tangentialvektoren der Kreise in den Schnittpunkten).

Die Inzidenzstruktur ist wieder mengentheoretisch definiert, d.h. ein Punkt  $p \in P$  liegt genau dann auf einer Geraden  $g$ , wenn  $p$  ein Element der Menge  $g \subset P$  ist.

**Lemma 1.25.** *Das Poincarésche Kreisscheibenmodell ist eine Inzidenzgeometrie.*

*Beweis.* (I2) und (I3) sind offensichtlich, d.h. wir beweisen nur (I1). Seien  $p, q \in P \subset \mathbb{R}^2$  Punkte, die auf einer Geraden durch 0 liegen, d.h.  $p$  und  $q$  sind linear abhängig. Dann gibt es offensichtlich genau eine Gerade, die  $p$  und  $q$  enthält (hier benutzen wir, dass ein Kreis im  $\mathbb{R}^2$ , der  $p, q$  enthält und den Einheitskreis orthogonal schneidet, unendlichen Radius besitzt). Seien also  $p, q$  Punkte im Poincaréschen Kreisscheibenmodell, für die es keine Euklidische Gerade durch 0 gibt, welche  $p$  und  $q$  enthält (dies ist

genau dann der Fall, wenn  $p$  und  $q$  linear unabhängig sind). Sei  $w \in \mathbb{R}^2$  der gesuchte Mittelpunkt des Kreises, der  $p$  und  $q$  enthält und den Einheitskreis orthogonal in den gesuchten Punkten  $v$  und  $v'$  schneidet. Dann gilt

$$|p - w|^2 = |q - w|^2 = |v - w|^2 = |v' - w|^2$$

und  $\langle v, w - v \rangle = \langle v', w - v' \rangle = 0$ , und damit liefert  $|v|^2 = |v'|^2 = 1$ :  $\langle v, w \rangle = \langle v', w \rangle = 1$ . Aus

$$\begin{aligned} |p|^2 - 2 \langle p, w \rangle + |w|^2 &= |p - w|^2 = |v - w|^2 = \\ &= |v|^2 + |w|^2 - 2 \langle v, w \rangle = -1 + |w|^2 \end{aligned}$$

folgt

$$1 + |p|^2 = 2 \langle p, w \rangle = 2p_1 w_1 + 2p_2 w_2$$

und analog für  $q$ :

$$1 + |q|^2 = 2 \langle q, w \rangle = 2q_1 w_1 + 2q_2 w_2.$$

Die Lösungsmengen in der Unbekannten  $w$  dieser beiden Gleichungssysteme sind Geraden im  $\mathbb{R}^2$ , und da  $p, q$  linear unabhängig sind, schneiden sich die beiden Geraden in genau einem Punkt  $w \in \mathbb{R}^2$ . Für den Radius des Orthokreises gilt

$$\begin{aligned} r^2 &= |p - w|^2 = |p|^2 - 2 \langle p, w \rangle + |w|^2 = -1 + |w|^2 \\ &= |q - w|^2 = |q|^2 - 2 \langle q, w \rangle + |w|^2 = -1 + |w|^2 \end{aligned}$$

also gibt es genau einen Kreis mit Mittelpunkt  $w$ , der die Punkte  $p, q$  enthält, Radius  $\sqrt{-1 + |w|^2}$  besitzt und den Einheitskreis orthogonal schneidet. Dies beweist Axiom (I1).  $\square$

Die Anordnung definieren wir über die Strecke von  $p, q$ . Sind  $p, q$   $\mathbb{R}$ -linear abhängig im  $\mathbb{R}^2$ , dann definieren wir

$$\overline{pq} := \{t \cdot p + (1 - t) \cdot q \mid t \in [0, 1]\} \subset P \subset \mathbb{R}^2.$$

Umgekehrt, wenn  $p, q$   $\mathbb{R}$ -linear unabhängig sind, folgt aus dem letzten Beweis, dass  $p, q$  Punkte auf dem Kreis

$$\left\{ \sqrt{|w|^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + w \mid t \in [0, 2\pi) \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

sind. Insbesondere gibt es genau ein  $t_p \in [0, 2\pi)$  und ein  $t_q \in [0, 2\pi)$  mit

$$p = \sqrt{|w|^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos t_p \\ \sin t_p \end{pmatrix} + w \quad \text{und} \quad q = \sqrt{|w|^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos t_q \\ \sin t_q \end{pmatrix} + w.$$

Damit ist die Strecke  $\overline{pq}$  definiert durch

$$\overline{pq} = \left\{ \sqrt{|w|^2 - 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + w \mid t \in [t_p, t_q] \cup [t_q, t_p] \right\} \subset P \subset \mathbb{R}^2.$$

wobei  $[s, t] = \emptyset$  für  $s > t$ . Ein Punkt  $v \in P$  liegt genau dann zwischen  $p$  und  $q$ , wenn  $v \neq p$ ,  $v \neq q$  und  $v \in \overline{pq}$  gilt. Die Anordnungsaxiome (A1), (A2), (A4) folgen direkt aus der Definition. (A3) ist ein Standard Analysis I Argument.

*Übung.* Zeigen Sie das Anordnungsaxiom (A5).

Jede hyperbolische Gerade besitzt also genau zwei Endpunkte auf dem Einheitskreis. Umgekehrt definieren Punkte  $v \neq v'$  auf dem Einheitskreis genau eine hyperbolische Gerade mit Endpunkten  $v$  und  $v'$ .

**Bemerkung 1.26** (vgl. [K]). Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4$  paarweise verschiedene komplexe Zahlen. Dann ist das Doppelverhältnis

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$$

genau dann reell, wenn  $z_1, \dots, z_4$  Punkte auf einem Euklidischen Kreis oder einer Euklidischen Geraden sind. Sind  $z_1, z_2, z_3, z_4$  paarweise verschiedene Punkte auf einem Euklidischen Kreis, dann gilt  $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$  gdw. ein Segement zwischen  $z_3$  und  $z_4$  existiert, dass die Punkte  $z_1$  und  $z_2$  nicht enthält. Sind  $z_1, z_2, z_3, z_4$  paarweise verschiedene Punkte auf einer Euklidischen Geraden, dann gilt  $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$  gdw.  $\{z_1, z_2\} \in \overline{z_3 z_4}$  oder  $\{z_1, z_2\} \cap \overline{z_3 z_4}$  (Bild).

**Definition 1.27.** Seien  $p \neq q$  Punkte und  $v, v'$  die Endpunkte der hyperbolischen Gerade durch  $p$  und  $q$ . Dann ist der Abstand von  $p$  und  $q$  über den natürlichen Logarithmus des Doppelverhältnisses der komplexen Zahlen  $p, q, v, v' \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  definiert:

$$d(p, q) := |\ln DV(p, q, v, v')| = \left| \ln \frac{(p - v) \cdot (q - v')}{(p - v') \cdot (q - v)} \right|.$$

Für  $p = q$  sei  $d(p, q) = 0$ . Strecken  $\overline{pq}$  und  $\overline{p'q'}$  sind genau dann *kongruent*, wenn  $d(p, q) = d(p', q')$  gilt.

*Übung.* Zeigen Sie:  $d(p, q) = d(q, p) \geq 0$  und  $d(p, q) = 0$  gilt gdw.  $p = q$ .

**Satz 1.28.** a) Für alle Punkte  $p, q, w$  mit  $p * q * w$  gilt

$$d(p, w) = d(p, q) + d(q, w)$$

b) Es gelten die Kongruenzaxiome für Strecken (K1)–(K3).

*Beweis.* Teil a): Betrachte die hyperbolische Gerade durch  $p, q, w$  und die Endpunkte  $v, v'$  auf dem Einheitskreis. Wir verwenden wieder abkürzend  $*$ , um eine Anordnung zu definieren, wobei  $v' * p * q * w * v$  meint, dass  $p$  zwischen  $v', q$  liegt,  $q$  zwischen  $v', p$  liegt und  $w$  zwischen  $q, v$  liegt. Benutzt man die Betragsfunktion, so folgt für Punkte  $z$  und  $z'$  auf der Geraden durch  $p$  und  $q$ :

$$\frac{(z-v)(z'-v')}{(z-v')(z'-v)} > 1 \iff v' * z * z' * v.$$

Wir wählen also die Endpunkte  $v$  und  $v'$  derart, dass  $v' * p * q * w * v$  gilt (Bild). Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} d(p, q) + d(q, w) &= \ln \frac{(p-v)(q-v')}{(p-v')(q-v)} + \ln \frac{(q-v)(w-v')}{(q-v')(w-v)} \\ &= \ln \frac{(p-v)(w-v')}{(p-v')(w-v)} = d(p, w). \end{aligned}$$

Teil b): (K2) folgt direkt aus der Definition. Teil a) liefert (K3). Für (K1) seien Punkte  $p, q$  und  $z \neq z'$  gegeben. Die Abbildung

$$d(z, \cdot) : S(z, z') \rightarrow [0, \infty)$$

ist stetig (als Verknüpfung stetiger Abbildungen) mit  $d(z, z) = 0$ . Mit Teil a) und der Eigenschaft  $d(x, y) = 0$  gdw.  $x = y$ , erhalten wir die Injektivität der Abbildung  $d(z, \cdot)$ . Sei  $v$  der Endpunkt von  $S(z, z')$  auf dem Einheitskreis, dann folgt offensichtlich aus der Definition

$$\lim_{w \rightarrow v} d(z, w) = \infty,$$

d.h. der Zwischenwertsatz zeigt die Surjektivität von  $d(z, \cdot)$ . Also ist  $d(z, \cdot) : S(z, z') \rightarrow [0, \infty)$  bijektiv, was Axiom (K1) beweist: Zu  $d(p, q) \in [0, \infty)$  gibt es genau ein  $\tilde{z} \in S(z, z')$  mit  $d(p, q) = d(z, \tilde{z})$ .  $\square$

**Bemerkung 1.29.**  $d(\cdot, \cdot)$  ist eine Metrik auf  $P$ , d.h. es gilt zusätzlich die Dreiecksungleichung:

$$d(p, w) \leq d(p, q) + d(q, w)$$

für alle Punkte  $p, q, w \in P$  mit Gleichheit gdw.  $q \in \overline{pw}$ .



Die Winkelmessung in der Poincaréschen Kreisscheibe wird über die Euklidischen Winkelbeträge definiert. Dazu betrachten wir zuerst *Tangentialvektoren* an Kreisen. Sei  $k$  ein Euklidischer Kreis mit Mittelpunkt  $w \in \mathbb{R}^2$ , sowie  $q$  und  $p$  verschiedene Punkte auf dem Kreis  $k$ , so dass  $w$  nicht auf der Euklidischen Geraden durch  $p$  und  $q$  liegt. Der *Einheitstangentialvektor von  $k$  in  $q$  mit Richtung  $p$*  ist das Paar  $(q, v)$  mit dem eindeutigen Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$ , so dass  $|v| = 1$  und

$$|q + v - p| < |q - v - p|, \quad \langle v, q - w \rangle = 0.$$

Sind  $p \neq q$  Punkte auf einer Euklidischen Geraden  $g$ , dann ist der *Einheitstangentialvektor von  $g$  in  $q$  mit Richtung  $p$*  das Paar  $\left(q, \frac{p-q}{|p-q|}\right)$ .

**Definition 1.30.** Seien  $g_1 \neq g_2$  hyperbolische Geraden der Poincaréschen Kreisscheibe, die sich im Punkt  $q$  schneiden, und seien  $p_i$  Punkte auf  $g_i$  mit  $p_i \neq q$  für  $i = 1, 2$ . Dann definieren wir den *Betrag des Winkels* durch

$$|\sphericalangle p_1 q p_2| := \arccos \langle v_1, v_2 \rangle \in [0, \pi)$$

wobei  $(q, v_i)$  der Einheitstangentialvektor von  $g_i$  in  $q$  mit Richtung  $p_i$  ist. Winkel  $\sphericalangle p_1 q p_2$  und  $\sphericalangle p'_1 q' p'_2$  heißen *kongruent*, wenn  $|\sphericalangle p_1 q p_2| = |\sphericalangle p'_1 q' p'_2|$  gilt.

Das Axiom (K4) folgt direkt aus der Definition. Den Nachweis der Axiome (K5) und (K6) wollen wir hier nicht zeigen, da es sich als verhältnismässig umfangreich herausstellt.

Das Axiom (V2) haben wir im Beweis des letzten Satzes gezeigt:  $*$  definiert eine Anordnung auf hyperbolischen Geraden und es gibt eine Bijektion

$$\{\text{Punkte auf einer hyperbolischen Geraden}\} \rightarrow \mathbb{R},$$

welche die Anordnung erhält.

Unsere Abstandsfunktion und Teil a) im letzten Satz liefern Axiom (V1): Es gelte  $p * q * r$ , dann gibt es eine Zahl  $N \in \mathbb{N}$  mit  $N \cdot d(p, q) > d(p, r)$  ( $d(p, r) < +\infty$  und  $d(p, q) > 0$ ). Also gibt es Punkte  $q_1 = q, q_2, \dots, q_N$  mit  $d(q_i, q_{i+1}) = d(p, q)$  und  $p * q_i * q_{i+1}$  sowie

$$d(p, q) + d(q, q_2) + \dots + d(q_{N-1}, q_N) = N \cdot d(p, q) > d(p, r).$$

Da  $q_N * p * r$  einen Widerspruch liefert, folgt  $p * r * q_N$ .

**Beispiel 1.31.** Wir betrachten die hyperbolische Gerade

$$g = \{(0, t) = it \mid t \in (-1, 1)\}$$

und den Punkt  $p = (1/2, 0)$ . Die hyperbolische Gerade  $h$  durch  $p$  mit Endpunkt  $(0, 1)$  wird durch den Euklidischen Kreis mit Mittelpunkt  $w$  gegeben: Der Beweis von Lemma 1.25 liefert  $\langle(0, 1), w\rangle = 1$  sowie

$$\langle(1, 0), w\rangle = 2\langle p, w\rangle = 1 + |p|^2 = \frac{5}{4},$$

d.h. es gilt  $w_2 = 1$  und  $w_1 = 5/4$ . Damit sind  $h$  und  $g$  parallel (der vermeintliche Schnittpunkt  $(0, 1)$  gehört nicht zur Poincaréschen Kreisscheibe). Aus Symmetriegründen ist die Gerade  $h'$  durch  $p$  mit Endpunkt  $(0, -1)$  parallel zu  $g$ . Damit besitzt die Gerade  $g$  mindestens zwei Parallele Geraden durch  $p$ . Sei jetzt der Endpunkt  $v = (v_1, v_2)$  auf dem Einheitskreis gegeben mit  $\frac{9}{41} \leq |v_2| \leq 1$  und  $v_1 = \sqrt{1 - v_2^2}$ , dann ist die hyperbolische Gerade durch  $p$  mit Endpunkt  $v$  parallel zu  $g$ . Folglich gibt es unendlich viele parallele Geraden zu  $g$ , die den Punkt  $p$  enthalten.

Dieses Beispiel zeigt, dass die Poincarésche Kreisscheibe kein Modell der Euklidischen Geometrie liefert. Benutzt man die Isometriegruppe des hyperbolischen Raumes oder Analysis Argumente kann man sich überlegen, dass es für jede hyperbolische Gerade  $g$  und jeden beliebigen Punkt  $p$  nicht auf  $g$  unendlich viele Parallele zu  $g$  durch  $p$  gibt. Somit gilt Axiom (H) für die Poincarésche Kreisscheibe und wir erhalten mit den obigen Betrachtungen:

**Korollar 1.32.** Die Poincarésche Kreisscheibe ist eine hyperbolische Ebene.

Analog zum Euklidischen Fall heißt eine bijektive Abbildung  $\varphi : P \rightarrow P$  *Isometrie*, wenn  $\varphi$  (hyperbolische) Geraden auf (hyperbolische) Geraden abbildet und längentreu ist:

$$d(\varphi(p), \varphi(q)) = d(p, q)$$

für alle  $p, q \in P = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ . Offensichtlich ist die Menge der Isometrien wieder eine Gruppe. Man kann zeigen, dass sich jede Isometrie  $\varphi : P \rightarrow P$  als *gebroschen lineare Transformation* schreiben läßt. Die Zusammenhangskomponente der Eins unserer Isometriegruppe wird durch die Gruppe

$$\begin{aligned} \text{SU}(1, 1) &= \left\{ A \in \text{GL}(2, \mathbb{C}) \mid A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \overline{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \det A = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \subset \text{GL}(2, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

gegeben. Wir betrachten jetzt die Wirkung von  $SU(1, 1)$  auf dem abgeschlossenen Einheitskreis  $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = z\bar{z} \leq 1\}$  durch gebrochen lineare Transformation:

$$SU(1, 1) \times D \rightarrow D, (A, z) \mapsto \varphi_A(z) := \frac{a \cdot z + b}{\bar{b} \cdot z + \bar{a}}.$$

mit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ .

*Übung.* Zeigen Sie, dass dies eine wohldefinierte Gruppenwirkung ist:

1. Für  $|z| \leq 1$  gilt  $|\varphi_A(z)| \leq 1$  mit  $|\varphi_A(z)| = 1$  gdw.  $|z| = 1$ .
2.  $\varphi_E(z) = z$  für die Einheitsmatrix  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .
3.  $\varphi_{A \cdot B} = \varphi_A \circ \varphi_B$  für alle  $A, B \in SU(1, 1)$ .

**Lemma 1.33.** *Seien  $z_1, z_2, z_3, z_4 \in D$  paarweise verschieden. Dann gilt für alle  $A \in SU(1, 1)$ :*

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(\varphi_A(z_1), \varphi_A(z_2), \varphi_A(z_3), \varphi_A(z_4)).$$

*Beweis.* Sei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1, 1)$ , dann gilt für  $z, w \in D$  mit  $|a|^2 = a\bar{a}$  und  $|a|^2 - |b|^2 = 1$ :

$$\begin{aligned} \varphi_A(z) - \varphi_A(w) &= \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} - \frac{aw + b}{\bar{b}w + \bar{a}} \\ &= \frac{(az + b)(\bar{b}w + \bar{a}) - (aw + b)(\bar{b}z + \bar{a})}{(\bar{b}z + \bar{a})(\bar{b}w + \bar{a})} \\ &= \frac{z(a\bar{a} - b\bar{b}) + w(b\bar{b} - a\bar{a})}{(\bar{b}z + \bar{a})(\bar{b}w + \bar{a})} = \frac{z - w}{(\bar{b}z + \bar{a})(\bar{b}w + \bar{a})}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Behauptung:

$$\begin{aligned} DV(\varphi_A(z_1), \varphi_A(z_2), \varphi_A(z_3), \varphi_A(z_4)) &= \frac{(\varphi_A(z_1) - \varphi_A(z_3))(\varphi_A(z_2) - \varphi_A(z_4))}{(\varphi_A(z_1) - \varphi_A(z_4))(\varphi_A(z_2) - \varphi_A(z_3))} \\ &= \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(\bar{b}z_1 + \bar{a})(\bar{b}z_2 + \bar{a})(\bar{b}z_3 + \bar{a})(\bar{b}z_4 + \bar{a})} \div \frac{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}{(\bar{b}z_1 + \bar{a})(\bar{b}z_2 + \bar{a})(\bar{b}z_3 + \bar{a})(\bar{b}z_4 + \bar{a})} \\ &= DV(z_1, z_2, z_3, z_4). \end{aligned}$$

□

**Satz 1.34.** Für  $A \in \text{SU}(1, 1)$  bildet  $\varphi_A : P \rightarrow P$  hyperbolische Geraden in hyperbolische Geraden ab. Die hyperbolische Abstandsfunktion ist invariant unter der Wirkung von  $\text{SU}(1, 1)$ :

$$d(p, q) = d(\varphi_A(p), \varphi_A(q))$$

für alle  $p, q \in P \subset D$  und  $A \in \text{SU}(1, 1)$ .

*Beweis.* Für den ersten Teil benötigen wir ein Resultat aus der Funktionentheorie, dass gebrochen lineare Abbildungen winkeltreu sind (ohne Beweis an dieser Stelle). Nach Übungsaufgabe bildet  $\varphi_A$  den Einheitskreis  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  in sich ab. Das letzte Lemma und Bemerkung 1.26 zeigen, dass  $\varphi_A$  Euklidische Geraden und Kreise in Euklidische Geraden und Kreise abbildet. Sei  $g$  eine hyperbolische Gerade mit Endpunkten  $v, v'$  auf dem Einheitskreis. Da  $\varphi_A$  eine winkeltreue Abbildung ist, schneidet  $\varphi_A(g)$  den Einheitskreis in den Punkten  $\varphi_A(v)$  und  $\varphi_A(v')$  orthogonal. Also ist  $\varphi_A(g)$  eine hyperbolische Gerade. Nach Definition der Abstandsfunktion und dem letzten Lemma ist  $\varphi_A$  eine Isometrie, denn sind  $p, q$  Punkte der hyperbolischen Geraden  $g$  mit Endpunkten  $v, v'$  auf dem Einheitskreis, dann sind  $\varphi_A(p), \varphi_A(q)$  Punkte auf der hyperbolischen Geraden  $\varphi_A(g)$  mit Endpunkten  $\varphi_A(v), \varphi_A(v')$  und

$$\begin{aligned} d(\varphi_A(p), \varphi_A(q)) &= |\ln \text{DV}(\varphi_A(p), \varphi_A(q), \varphi_A(v), \varphi_A(v'))| \\ &= |\ln \text{DV}(p, q, v, v')| = d(p, q) \end{aligned}$$

zeigt die Behauptung. □

**Satz 1.35.** (a)  $\text{SU}(1, 1)$  wirkt transitiv auf der Poincaréschen Kreisscheibe durch gebrochen lineare Transformationen:

$$\text{SU}(1, 1) \times P \rightarrow P, (A, p) \mapsto \varphi_A(p),$$

d.h. für alle  $p, q \in P$  gibt es ein  $A \in \text{SU}(1, 1)$  mit  $\varphi_A(p) = q$ . Die Stabilisatoruntergruppe des Punktes 0 ist

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}, |a|^2 = 1 \right\} \cong \text{SO}(2) \cong S^1.$$

(b) Die Abbildung

$$\Psi : \text{SU}(1, 1)/H \rightarrow P, A \cdot H \mapsto \varphi_A(0)$$

ist wohldefiniert und bijektiv.

*Beweis.* Teil (a): Sei  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| < 1$ . Suche ein  $A_w = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in \text{SU}(1, 1)$  mit  $w = \varphi_{A_w}(0)$ . Löse also  $w = \frac{b}{a}$ .

$$|w|^2 = \frac{|b|^2}{|a|^2} = \frac{|a|^2 - 1}{|a|^2}$$

liefert  $|a|^2 = \frac{1}{1-|w|^2}$ . Mit  $a = 1/\sqrt{1-|w|^2}$  und  $b = w/\sqrt{1-|w|^2}$  folgt damit  $\varphi_{A_w}(0) = w$ . Wähle zu  $p, q \in P$  die Matrix  $A_p, A_q$  mit  $\varphi_{A_p}(0) = p$  und  $\varphi_{A_q}(0) = q$ , und definiere  $B := A_q \cdot A_p^{-1} \in \text{SU}(1, 1)$ , dann gilt

$$\varphi_B(p) = \varphi_{A_q A_p^{-1}}(p) = \varphi_{A_q}(\varphi_{A_p^{-1}}(p)) = \varphi_{A_q}(\varphi_{A_p}^{-1}(p)) = \varphi_{A_q}(0) = q,$$

d.h.  $\text{SU}(1, 1)$  wirkt transitiv. Für die Stabilisatoruntergruppe von  $0 \in P$  erhalten wir

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1, \frac{a \cdot 0 + b}{\bar{b} \cdot 0 + \bar{a}} = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C}, |a|^2 = 1 \right\}.$$

Teil (b): Sei  $A \cdot H = B \cdot H$ , dann gilt  $A^{-1}B \in H$ , d.h.

$$0 = \varphi_{A^{-1}B}(0) = \varphi_{A^{-1}}(\varphi_B(0)) = (\varphi_A)^{-1}(\varphi_B(0))$$

liefert  $\varphi_A(0) = \varphi_B(0)$  und damit ist  $\Psi$  wohldefiniert.  $\Psi$  ist injektiv, denn  $\varphi_A(0) = \varphi_B(0)$  zeigt mit analoger Rechnung  $A^{-1}B \in H$ , d.h.  $A \cdot H = B \cdot H$ . Die Surjektivität von  $\Psi$  folgt aus der Transitivität: Sei  $p \in P$  beliebig, dann gibt es ein  $A \in \text{SU}(1, 1)$  mit  $\varphi_A(0) = p$ , also gilt  $\Psi(A \cdot H) = p$ .  $\square$

**Bemerkung 1.36.** Die Beschreibung von Standardgeometrien mit Hilfe von Gruppen geht zurück auf Klein's Erlanger Programm. Die Wahl des Punktes  $0$  im letzten Satz ist willkürlich, man erhält die Aussage in Teil (b) für einen beliebigen Punkt  $q \in P$  und die zu  $q$  gehörige Stabilisatoruntergruppe. Die Gruppe  $\text{SU}(1, 1)$  trägt eine weitere Struktur, welche unter der Bijektion  $\Psi$  genau die hyperbolische Geometrie auf der Menge  $P$  induziert.

**Bemerkung 1.37** (vgl. lokale Version des Gauß–Bonnet Theorems in der elementaren Differentialgeometrie). In der hyperbolischen Geometrie ist die Innenwinkelsumme eines Dreiecks kleiner als  $\pi$ : Seien  $p_1, p_2, p_3$  paarweise verschiedene Punkte der hyperbolischen Ebene, die nicht kollinear sind. Die Strecken  $\overline{p_1 p_2}$ ,  $\overline{p_1 p_3}$  und  $\overline{p_2 p_3}$  definieren ein Dreieck mit

$$|\angle p_1 p_2 p_3| + |\angle p_2 p_3 p_1| + |\angle p_3 p_1 p_2| = \pi - |\Delta p_1 p_2 p_3|$$

wobei  $|\Delta p_1 p_2 p_3| > 0$  den "Flächeninhalt" des hyperbolischen Dreiecks bezeichnet.

## 1.6 Alternativer Zugang zur hyperbolischen Geometrie

Wir konstruieren das Poincarésche Kreisscheibenmodell wie oben. Die Punktmenge  $P$  ist das Innere der Einheitskreisscheibe in  $\mathbb{C}$ , ihr Rand  $\partial P$  ist die  $S^1$ . Die Menge  $G$  der hyperbolischen Geraden besteht aus

- allen Euklidischen Geraden  $g$  durch 0, und
- allen Euklidischen Kreisen  $k$ , die den Einheitskreis  $\partial P$  orthogonal schneiden. Damit meinen wir, dass die Tangenten von 0 an  $k$  den Kreis in Punkten auf  $\partial P$  berühren (Bild).

Ein Punkt  $p \in P$  inzidiert mit einer Geraden  $h \in G$  genau dann, wenn  $p \in g$ .

Statt „Kreis oder Gerade“ sagen wir im Folgenden „verallgemeinerter Kreis“. Von Zeit zu Zeit ist es praktisch, auch Punkte außerhalb von  $P$  als „Hilfspunkte“ zuzulassen. Daher betrachten wir jede hyperbolische Gerade als Menge aller Punkte des entsprechenden verallgemeinerten Kreises. Insbesondere schneidet jede hyperbolische Gerade  $g$  den Rand  $\partial P$  in genau zwei Punkten; diese heißen die „unendlich fernen Punkte“ von  $g$ . Umgekehrt gibt es zu je zwei unendlich fernen Punkten genau eine hyperbolische Gerade — im Euklidischen ist das anders: jede Gerade „verlässt“ den Euklidischen Raum in der gleichen Richtung, in der sie ihn „betreten“ hat.

Unter einer *Inversion* oder *Spiegelung am Einheitskreis* versteht man die Abbildung, die jedem Punkt  $p \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  den Punkt  $p'$  zuordnet, der auf dem gleichen Strahl durch 0 wie  $p$  liegt, mit  $|p| \cdot |p'| = 1$ . Da  $|p|^2 = p\bar{p}$ , folgt  $p' = \frac{p}{|p|^2}$ .

*Beweis von Lemma 1.25.* Die Axiome (I2) und (I3) sind offensichtlich. Zum Beweis von (I1) seien  $p, q \in P$  gegeben. Falls  $p$  und  $q$  auf einer Euklidischen Geraden durch 0 liegen, ist das die gesuchte hyperbolische Gerade.

Wir konstruieren den Kreis  $k$  durch die Punkte  $p, q$  und die Inversion  $p'$  von  $p$ , dann liegt auch die Inversion  $q'$  von  $q$  auf diesem Kreis. Mit dem Sekanten-Tangentensatz zeigt man, dass  $k$  eine hyperbolische Gerade durch  $p$  und  $q$  darstellt, und umgekehrt, dass  $p'$  und  $q'$  auf der Fortsetzung jeder hyperbolischen Geraden durch  $p$  und  $q$  zu einem Euklidischen Kreis liegen (*Übung*).  $\square$

Für die nächsten Schritte betrachten wir Möbiustransformationen, das sind bijektive Abbildungen von  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  auf sich der Form

$$\varphi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{für alle } z \in \hat{\mathbb{C}},$$

wobei  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ . Falls  $c = 0$ , sei  $\varphi_A(\infty) = \infty$ , andernfalls

$$\varphi_A\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \quad \text{und} \quad \varphi_A(\infty) = \frac{a}{c}.$$

Außerdem definieren wir wie oben das Doppelverhältnis durch

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Zur Begründung von Bemerkung 1.26 nehmen wir zunächst an, dass  $z_1, z_2, z_3$  und  $z_4$  in dieser Reihenfolge auf einem echten Kreis liegen. Dann sehen  $z_1$  und  $z_2$  die Strecke  $z_3z_4$  unter dem gleichen Winkel  $\alpha$ . Es folgt

$$0 = \alpha - \alpha = \arg \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} - \arg \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} = \arg DV(z_1, z_2, z_3, z_4),$$

somit  $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$ .

Falls die Punkte in anderer Reihenfolge auf dem Kreis liegen, gelten ähnliche Argumente. Insbesondere unterscheiden sich beide Winkel um  $\pi$ , wenn die Punkte in der Reihenfolge  $z_1, z_3, z_4, z_2$  auf dem Kreis liegen. In diesem Fall gilt

$$\arg DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \pi \quad \text{und} \quad DV(z_1, z_2, z_3, z_4) < 0.$$

Falls alle auf einer Geraden liegen, sind alle Winkel 0 oder  $\pi$ . Falls nicht alle Punkte auf einem verallgemeinerten Kreis liegen, stimmen die entsprechenden Winkel nicht überein.

Wenn  $z \neq 0$  auf einer hyperbolischen Geraden zwischen  $p$  und  $q$  liegt, dann liegen  $p, z, q, z' = \frac{1}{\bar{z}}$  in dieser Reihenfolge auf einem verallgemeinerten Kreis, und wir erhalten

$$0 > \frac{(p - z)(q - \frac{1}{\bar{z}})}{(p - \frac{1}{\bar{z}})(q - z)} = \frac{(p - z)(q\bar{z} - 1)}{(q - z)(p\bar{z} - 1)}.$$

Die rechte Seite ist auch dann kleiner 0, wenn  $z = 0$  gilt und  $q$  ein negatives Vielfaches von  $p$  ist. Sollte  $p = z$  oder  $q = z$  gelten, erhalten wir die Werte 0 oder  $\infty$  (siehe unten).

**Definition 1.38.** Für  $p, q, z$  definieren wir

$$p * z * q \iff \frac{(p - z)(q\bar{z} - 1)}{(q - z)(p\bar{z} - 1)} \in (-\infty, 0).$$

Dann ist die hyperbolische Strecke  $\overline{pq}$  definiert als

$$\overline{pq} = \{ z \in P \mid p * z * q \}.$$

Mit dieser Definition beweisen wir die Anordnungsaxiome (A1)–(A4). Für (A5) ist ein Zusatzargument nötig (Bild).

**Lemma 1.39.** *Möbiustransformationen haben folgende Eigenschaften.*

1. Für Matrizen  $A, B \in GL(2, \mathbb{C})$  gilt  $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$ , und  $\varphi_{E_2} = \mathbb{1}_{\hat{\mathbb{C}}}$ . Insbesondere sind alle Möbiustransformationen bijektiv.
2. Das Bild eines verallgemeinerten Kreises unter einer Möbiustransformation ist wieder ein verallgemeinerter Kreis.
3. Möbiustransformationen erhalten das Doppelverhältnis.

*Beweis.* Man beweist (1) durch Nachrechnen. Nach Bemerkung 1.26 folgt (2) aus (3), also beweisen wir (3). Dazu überprüfen wir zunächst, dass

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b - \frac{ad}{c} & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Wegen (1) können wir (3) für die einzelnen Faktoren separat überprüfen.

Die äußeren zwei Matrizen auf der rechten Seite beschreiben Translationen, denn

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)(z) = \frac{1z + w}{0z + 1} = z + w,$$

und es gilt

$$\frac{((z_1 + w) - (z_3 + w))((z_2 + w) - (z_4 + w))}{((z_1 + w) - (z_4 + w))((z_2 + w) - (z_3 + w))} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Die zweite Matrix ist eine Drehstreckung, denn

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}\right)(z) = \frac{uz + 0}{0z + v} = \frac{u}{v}z,$$

und wie oben rechnet man nach, dass Multiplikation mit  $\frac{u}{v}$  das Doppelverhältnis nicht ändert.

Die dritte Matrix ist eine Inversion gefolgt von einer Spiegelung an der reellen Achse, denn

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)(z) = \frac{0z + 1}{1z + 0} = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}.$$

Erweitern liefert

$$\frac{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_4}\right)}{\left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_4}\right)\left(\frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_3}\right)} = \frac{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}{(z_4 - z_1)(z_3 - z_2)} = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}. \quad \square$$



**Lemma 1.40.** *Jede Möbiustransformation, die  $P$  bijektiv auf sich selbst abbildet, ist von der Form  $\varphi_A$  mit*

$$A \in SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C} \text{ mit } |a|^2 = |b|^2 + 1 \right\}.$$

*Jede solche Möbiustransformation bildet außerdem hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden ab.*

*Beweis.* Wenn  $\varphi_A$  den Raum  $P$  bijektiv auf sich selbst abbildet, dann bildet  $\varphi_A$  auch  $\partial P$  auf  $\partial P$  ab. Sei also  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z|^2 = z\bar{z} = 1$ . Dann gilt

$$\left| \frac{az + b}{cz + d} \right|^2 = \frac{(az + b)(\bar{a}\bar{z} + \bar{b})}{(cz + d)(\bar{c}\bar{z} + \bar{d})} = \frac{|a|^2 + |b|^2 + 2 \operatorname{Re}(a\bar{b}z)}{|c|^2 + |d|^2 + 2 \operatorname{Re}(c\bar{d}z)}.$$

Dieser Ausdruck ist genau dann 1, wenn

$$|a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2 = 2 \operatorname{Re}((c\bar{d} - a\bar{b})z)$$

Damit das für alle  $z \in \partial P$  gilt, müssen beide Seiten verschwinden, also gilt

$$|a|^2 - |c|^2 = |d|^2 - |b|^2 \quad \text{und} \quad a\bar{b} = c\bar{d}.$$

Wenn wir alle Einträge einer Matrix  $A$  mit einer festen Zahl  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  multiplizieren, ändert sich nichts an der zugehörigen Möbiustransformation. Daher dürfen wir annehmen, dass  $\det A = ad - bc = 1$ . Zusammen mit dem obigen folgt

$$\begin{aligned} 1 &= (ad - bc)(a\bar{d} - \bar{b}c) = |a|^2 \cdot |d|^2 + |b|^2 \cdot |c|^2 - a\bar{b}c\bar{d} - \bar{a}bc\bar{d} \\ &= (|a|^2 - |c|^2)(|d|^2 - |b|^2) = (|a|^2 - |c|^2)^2. \end{aligned}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Falls  $|a|^2 - |c|^2 = 1$ , gilt

$$0 = (a\bar{b} - c\bar{d})d = \bar{b}(1 + bc) - c|d|^2 = \bar{b} + c(|b|^2 - |d|^2) = \bar{b} - c.$$

Also gilt entweder  $b = c = 0$ , und daher  $|a| = |d| = 1$  und  $\det A = ad = 1$ , so dass  $d = \bar{a}$ , und  $\varphi_A$  beschreibt eine Drehung um 0. Oder es gilt  $c = \bar{b} \neq 0$ , und daher  $\bar{d} = a$ , mit  $|a|^2 - |b|^2 = -1$ . In beiden Fällen folgt  $A \in SU(1,1)$ .

2. Falls  $|a|^2 - |c|^2 = -1 = |d|^2 - |b|^2$ , so folgt

$$|\varphi_A(0)|^2 = \left| \frac{b}{d} \right|^2 > 1,$$

das heißt, dass  $\varphi_A$  zwar  $\partial P$  auf sich abbildet, aber  $P$  nicht auf  $P$ , sondern auf  $\hat{\mathbb{C}} \setminus \bar{P}$ .

Nach dieser Charakterisierung folgt, dass  $SU(1, 1) \subset GL(2, \mathbb{C})$  eine Untergruppe ist, denn mit  $\varphi_A$  und  $\varphi_B$  bilden auch  $\varphi_{AB}$  und  $\varphi_A^{-1} = \varphi_{A^{-1}}$  die Kreisscheibe  $P$  bijektiv auf sich selbst ab.

Als nächstes prüfen wir, dass alle  $\varphi_A$  mit  $A \in SU(1, 1)$  hyperbolische Geraden auf hyperbolische Geraden abbilden. Zunächst einmal bildet  $\varphi_A$  die Inversion  $p' = \frac{1}{\bar{p}}$  von  $p \in P$  auf die Inversion  $\varphi_A(p)'$  von  $\varphi_A(p)$  ab, denn es gilt

$$\varphi_A(p') = \frac{a\frac{1}{\bar{p}} + b}{\bar{b}\frac{1}{\bar{p}} + \bar{a}} = \frac{1}{\frac{b+a\bar{p}}{a+b\bar{p}}} = \overline{\left( \frac{1}{\frac{ap+b}{b\bar{p}+\bar{a}}} \right)} = \varphi_A(p)'.$$

Als Möbiustransformation bildet  $\varphi_A$  eine hyperbolische Gerade  $g$  auf einen verallgemeinerten Kreis  $k$  ab. Nach unserem Beweis von Lemma 1.25 ist dieser Kreis genau dann eine hyperbolische Gerade, wenn er mit jedem Punkt  $\varphi_A(p)$  mit  $p \in g$  auch dessen Inversion  $\varphi_A(p)'$  enthält. Und das folgt aus der obigen Rechnung.  $\square$

**Definition 1.41.** Zwei hyperbolische Strecken heißen *kongruent*, wenn es  $A \in SU(1, 1)$  gibt, so dass  $\varphi_A$  die eine auf die andere abbildet. Zwei hyperbolische Winkel heißen *kongruent*, wenn es  $A \in SU(1, 1)$  gibt, so dass  $\varphi_A$  den einen auf den anderen abbildet.

Hieraus folgen die Kongruenzaxiome (K1)–(K6), wenn wir nur zeigen, dass es genügend Möbiustransformationen von diesem Typ gibt.

**Lemma 1.42.** Die Gruppe  $SU(1, 1)$  operiert durch Möbiustransformationen transitiv auf  $P$ , und auf der Menge der hyperbolischen Strahlen. Außerdem erhält sie das Doppelverhältnis

$$\delta(p, q) = -DV(p, q', q, p') = \frac{|p - q|^2}{(1 - |p|^2)(1 - |q|^2)}.$$

Die Größe  $\delta(p, q)$  kann zur Definition eines hyperbolischen Abstands  $d(p, q)$  (entspricht  $|\overline{pq}|$  im Euklidischen) benutzt werden:

$$d(p, q) = \operatorname{ar} \cosh(1 + 2\delta(p, q)).$$

Insbesondere bildet  $\varphi_A$  für  $A \in SU(1, 1)$  nicht eine Strecke auf eine unterschiedlich lange ab. Aus dem Lemma folgen die Axiome (K1) und (K5). Alle anderen folgen direkt aus der obigen Definition.

*Beweis.* Zur Transitivität auf  $P$ : Für  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1, 1)$  gilt

$$\varphi_A(0) = \frac{b}{a}.$$

Um einen Punkt  $z \in P$  zu erreichen, setzen wir

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}} \quad \text{und} \quad b = \frac{z}{\sqrt{1 - |z|^2}}.$$

Um  $z$  auf  $w$  abzubilden, verknüpfen wir die obige Matrix zu  $w$  mit dem Inversen der entsprechenden Matrix zu  $z$ .

Nun zu den Strahlen. Mit

$$a = e^{\frac{i\varphi}{2}} \quad \text{und} \quad b = 0$$

erhalten wir eine Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(1, 1)$ , die den Nullpunkt festhält und Strahlen durch 0 um  $\varphi$  dreht. Zusammen mit den obigen Matrizen können wir jetzt jeden Strahl bijektiv auf jeden anderen abbilden.

Die Invarianz des Doppelverhältnisses hatten wir bereits bewiesen.  $\square$

Zum Schluss beweist man die Vollständigkeitsaxiome analog zum Euklidischen Fall.

## 1.7 Projektive Geometrie

Parallele Geraden "schneiden sich im Unendlichen". Um den Begriff des Unendlichen in die Geometrie mit einzubinden, führt man die projektive Geometrie ein.

**Definition 1.43.** Eine Inzidenzstruktur  $\mathcal{P} = (P, G, I)$  heißt *projektive Ebene*, wenn  $\mathcal{P}$  den folgenden Axiomen genügt:

- (Pr1) Durch je zwei verschiedene Punkte von  $\mathcal{P}$  geht genau eine Gerade.
- (Pr2) Sind  $g$  und  $h$  zwei Geraden von  $\mathcal{P}$ , dann gibt es einen Punkt  $p$  von  $\mathcal{P}$ , der sowohl auf  $g$  als auch auf  $h$  liegt.
- (Pr3) Es gibt vier verschiedene Punkte von  $\mathcal{P}$  mit der Eigenschaft, dass je drei dieser Punkte nicht kollinear sind.

Offensichtlich definiert jede projektive Ebene eine Inzidenzgeometrie, denn (I1)=(Pr1), (Pr3) liefert (I3), und (I2) folgt aus (Pr2) und (Pr3) [Bild]. In der obigen Definition von projektiven Ebenen kann man Axiom (Pr2) auch durch folgendes Axiom ersetzen:

(Pr2') Je zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.

Man beachte, dass (Pr2') das Axiom (Pr2) impliziert. Andererseits zeigen (Pr1) und (Pr2) die Eigenschaft (Pr2').

**Beispiel 1.44** (Fano Ebene mit Bild). Sei  $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,

$$G = \{\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{4, 5, 7\}, \{5, 6, 1\}, \{6, 7, 2\}, \{7, 1, 3\}\}$$

und  $I \subseteq P \times G$  gegeben durch  $(p, g) \in I$  genau dann wenn  $p \in g$ . Dann ist  $\mathcal{P} = (P, G, I)$  eine projektive Ebene. (Bild)

In den Übungen sehen wir, dass wir zu  $\mathcal{P} = (P, G, I)$  eine neue projektive Ebene  $\mathcal{P}' = (G, P, I')$  erhalten, bei der Punkte und Geraden die Rollen tauschen, mit  $gI'p$  genau dann, wenn  $pIg$ .

**Satz 1.45.** Sei  $V$  ein 3-dimensionaler Vektorraum über dem Körper  $\mathbb{K}$ . Sei  $P$  die Menge aller 1-dimensionalen Unterräume von  $V$  und  $G$  die Menge aller 2-dimensionalen Unterräume von  $V$ . Für  $p \in P$  und  $g \in G$  gelte  $(p, g) \in I \subseteq P \times G$  genau dann wenn  $p$  ein Unterraum von  $g$  ist (d.h.  $pIg$  gdw.  $p \subseteq g$ ). Dann ist

$$\mathcal{P}(V, \mathbb{K}) = (P, G, I)$$

eine projektive Ebene. Ist  $W$  ein weiterer 3-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, dann sind  $\mathcal{P}(V, \mathbb{K})$  und  $\mathcal{P}(W, \mathbb{K})$  isomorphe Inzidenzstrukturen.

*Beweis.* Seien  $p, q \in P$  Punkte in  $\mathcal{P}(V, \mathbb{K})$  mit  $p \neq q$ , dann sind  $p, q$  1-dimensionale Unterräume von  $V$  mit  $p \cap q = \{0\} \subset V$ . Weiterhin ist  $p+q \subseteq V$  ein Unterraum, und es gilt die Dimensionsformel (vgl. lineare Algebra):

$$2 = \dim p + \dim q = \dim(p+q) + \dim(p \cap q) = \dim(p+q).$$

Also ist  $p+q$  eine Gerade in  $\mathcal{P}(V, \mathbb{K})$  mit  $(p, p+q) \in I$  und  $(q, p+q) \in I$ . Umgekehrt, wenn  $g$  eine Gerade in  $\mathcal{P}(V, \mathbb{K})$  ist mit  $(p, g), (q, g) \in I$ , dann gilt  $p+q \subseteq g$  und aus  $\dim(p+q) = 2 = \dim g$  folgt  $p+q = g$ . Dies liefert (Pr1).

Seien  $g$  und  $h$  Geraden in  $\mathcal{P}(V, \mathbb{K})$ , dann ist  $g+h$  linearer Unterraum von  $V$  und

$$4 = \dim g + \dim h = \dim(g+h) + \dim(g \cap h) \leq 3 + \dim(g \cap h)$$

zeigt  $\dim(g \cap h) \geq 1$ , d.h. es gibt einen 1-dimensionalen Unterraum  $p \subseteq g \cap h$  von  $V$  mit  $(p, g) \in I$  und  $(p, h) \in I$ . Folglich gilt auch (Pr2).

Wähle eine Basis  $v_1, v_2, v_3$  von  $V$  und definiere  $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$ . Wir betrachten die Punkte  $p_i := \mathbb{K} \cdot v_i \subset V$ . Dann bilden je drei der Vektoren  $v_1, v_2, v_3, v_4$  eine Basis von  $V$ , also sind je drei der Punkte  $p_1, p_2, p_3, p_4$  nicht kollinear. Dies beweist (Pr3).

Es gibt einen  $\mathbb{K}$ -linearen Isomorphismus  $\Phi : V \rightarrow W$ . Da  $\Phi$  und  $\Phi^{-1}$   $k$ -dimensionale Unterräume auf  $k$ -dimensionale Unterräume abbilden, gilt:

$$\mathcal{P}(W, \mathbb{K}) = (\Phi(P), \Phi(G), \Phi \times \Phi(I)),$$

d.h.  $\Phi$  induziert einen Isomorphismus  $\mathcal{P}(V, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{P}(W, \mathbb{K})$ . □

**Definition 1.46.** Nach obigem Satz ist die projektive Ebene  $\mathcal{P}(V, \mathbb{K})$  über einem Körper  $\mathbb{K}$  bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Diesen bis auf Isomorphie eindeutigen Raum bezeichnet man häufig mit  $\mathbb{K}P^2$ ,  $P^2(\mathbb{K})$  oder  $P_{\mathbb{K}}^2$ .

**Bemerkung 1.47.** Projektive Ebenen existieren auch über nicht kommutativen Körpern. Betrachtet man zum Beispiel den Schiefkörper der Quaternionen  $\mathbb{H}$  und 3-dimensionale Rechtsvektorräume über  $\mathbb{H}$ , erhält man analog zur obigen Konstruktion die quaternionisch projektive Ebene  $\mathbb{H}P^2$ . Ein weiteres Beispiel existiert für die Cayley Zahlen (Oktonionen):  $\mathbb{C}aP^2$ . Man beachte aber, dass  $\mathbb{C}aP^2$  eine nicht Desarguesche Ebene ist.

**Lemma 1.48.** (a) *Jede Gerade einer projektiven Ebene trägt wenigstens drei Punkte.*

(b) *Sei  $\mathcal{P}$  eine projektive Ebene und  $g, h$  Geraden auf  $\mathcal{P}$ , dann gibt es einen Punkt  $p$  in  $\mathcal{P}$  der weder auf  $g$  noch auf  $h$  liegt.*

*Beweis.* Teil a): Seien  $p_1, p_2, p_3, p_4$  Punkte nach Axiom (Pr3), d.h. je drei dieser Punkte sind nicht kollinear. Für  $i = 1, \dots, 4$  seien  $h_i$  die Geraden durch  $p_i$  und  $p_{i+1}$  mit  $p_5 := p_1$ . Für eine beliebig gegebene Gerade  $g$  definiere den eindeutigen Schnittpunkt  $a_i = g \cap h_i$ ,  $i = 1 \dots 4$ , von  $g$  und  $h_i$ . Wir zeigen durch Widerspruch: Es gilt  $a_i = a_j$  für höchstens ein Paar  $i < j$ . Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $a_1 = a_2 = a_3$  gilt. Damit liegt  $a_1$  auf  $h_1, h_2$  und  $h_3$ . Wegen  $p_2 = h_1 \cap h_2$  und  $h_1 \neq h_2$  und Axiom (Pr1) folgt  $a_1 = p_2$ . Mit dem gleichen Argument liefert  $p_3 = h_2 \cap h_3$  die Aussage  $a_1 = p_3$ . Also gilt  $a_1 = p_2 = p_3$ , ein Widerspruch zur Wahl unser Punkte  $p_1, \dots, p_4$ .

Teil b): Übung. □

**Satz 1.49.** Sei  $\mathcal{P} = (P, G, I)$  eine projektive Ebene und  $g$  eine fest gewählte Gerade von  $\mathcal{P}$ . Wir definieren die Inzidenzstruktur  $\mathcal{P}_g := (P', G', I')$  durch

$$P' = \{p \in P \mid (p, g) \notin I\}, \quad G' = G \setminus \{g\} \quad \text{und} \quad I' = I|_{P' \times G'}.$$

D.h.  $P'$  ist der Menge aller Punkte in  $\mathcal{P}$ , die nicht auf  $g$  liegen und  $G'$  ist die Menge aller Geraden ungleich  $g$ . Dann ist  $\mathcal{P}_g$  eine affine Ebene.

*Beweis.* (Pr1) liefert (I1) für  $\mathcal{P}_g$ . Sei  $h \neq g$  eine Gerade, und  $p_1, p_2$  Punkte in  $\mathcal{P}$ , die nicht auf der Geraden  $g$  liegen (existieren nach Lemma 1.48(a)). Nach Lemma 1.48(b) gibt es einen Punkt  $p_3$ , der weder auf  $g$  noch auf  $h$  liegt. Insbesondere sind  $p_1, p_2, p_3$  nicht kollinear Punkte auf  $\mathcal{P}_g$ , was (I3) für  $\mathcal{P}_g$  beweist. Zur Existenz der Parallelen: Sei  $h$  eine Gerade in  $\mathcal{P}_g$  und  $p \in P'$  ein Punkt, der nicht auf  $h$  liegt. Dann schneiden sich  $h \in G' \subset G$  und die Gerade  $g$  im Punkt  $q = g \cap h \in P$ . Sei  $l$  die eindeutige Gerade auf  $\mathcal{P}$  durch  $p$  und  $q$ , dann schneiden sich  $h$  und  $l$  genau im Punkt  $q$ .  $l$  ist aber auch eine Gerade in  $\mathcal{P}_g$ , enthält den Punkt  $p$  und ist in  $\mathcal{P}_g$  parallel zu  $h$ . Noch zu zeigen ist die Eindeutigkeit der Parallelen. Sei  $h \in G'$  und  $p \in P'$  Punkt, der nicht auf  $h$  liegt. Seien  $k, l$  Geraden in  $\mathcal{P}_g$ , die in  $\mathcal{P}_g$  parallel zu  $h$  sind und durch  $p$  verlaufen. Nach Voraussetzung liegen dann die Schnittpunkte  $s = k \cap h$  und  $r = l \cap h$  in  $\mathcal{P}$  auf der Geraden  $g$ ,  $h$  schneidet  $g$  aber in genau einem Punkt  $q$ , d.h. es gilt  $q = s = r$  und damit  $l = k$ .  $\square$

Eine projektive Ebene  $\mathcal{P}$  definiert also eine affine Ebene  $\mathcal{A} = \mathcal{P}_g$ . Die Inklusion

$$\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{P}$$

ist eine Einbettung, d.h. Punkte in  $\mathcal{A}$  sind Punkte in  $\mathcal{P}$  und Geraden in  $\mathcal{A}$  sind Geraden in  $\mathcal{P}$ . Im Folgenden zeigen wir die Umkehrung des letzten Satzes, d.h. wir konstruieren eine projektive Ebene aus einer affinen Ebene durch Hinzunahme einer Geraden im Unendlichen.

Sei also eine affine Ebene  $\mathcal{A} = (P, G, I)$  gegeben. Nach Übungsaufgabe ist Parallelität eine Äquivalenzrelation in affinen Ebenen. Wir bezeichnen mit  $[h]_{\parallel}$  die Äquivalenzklassen der zu  $h$  parallelen Geraden, d.h.  $g \in [h]_{\parallel}$  gilt genau dann, wenn  $g \parallel h$ . Parallele Geraden  $g \neq h$  sollen sich im Unendlichen in einem Punkt schneiden, folglich definiert jede Klasse  $[h]_{\parallel}$  einen Schnittpunkt im Unendlichen. Wir definieren also die Menge  $g_{\infty} := \{[h]_{\parallel}\}$ , das sind die Punkte im Unendlichen. Definiere jetzt die Menge  $\tilde{P} := P \cup g_{\infty}$  und die Menge  $\tilde{G} := G \cup \{g_{\infty}\}$ . Man beachte hier folgenden Unterschied in der Notation: die Elemente in der Menge  $g_{\infty}$  kommen als Punkte zu den Punkten in  $P$  hinzu, aber  $g_{\infty}$  wird als einzelne Gerade betrachtet.  $g_{\infty}$  bezeichnet man

auch als *unendlich ferne Gerade*. Die Inzidenzstruktur  $\tilde{I} \subseteq \tilde{P} \times \tilde{G} \ni (p, h)$  definieren wir durch:

- (1)  $p \in P$  inzidiert mit  $h \in G$  genau dann, wenn  $(p, h) \in I$ .
- (2)  $p \in P$  inzidiert nicht mit  $h = g_\infty$ .
- (3)  $p \in g_\infty$  und  $h \in G$  inzidieren genau dann, wenn  $h \in p = [h']_{\parallel}$  (d.h.  $h$  ist parallel zur Geraden  $h'$ , welche die Äquivalenzklasse  $p = [h']_{\parallel}$  erzeugt).
- (4)  $p \in g_\infty$  und  $h = g_\infty$  inzidieren.

Dann ist  $\mathcal{P} = (\tilde{P}, \tilde{G}, \tilde{I})$  eine projektive Ebene mit  $\mathcal{P}_{g_\infty} = \mathcal{A}$  (Beispiel am Bild mit Fano Ebene und affine Ebene mit 4 Punkten erklären).

**Satz+Definition 1.50.** *Sei  $\mathcal{P}$  eine projektive Ebene mit endlich vielen Punkten. Dann gibt es eine Zahl  $n \geq 2$ , so dass*

- a) *Jede Gerade trägt genau  $n + 1$  Punkte.*
- b) *Die Anzahl der Punkte in  $\mathcal{P}$  ist  $n^2 + n + 1$ .*

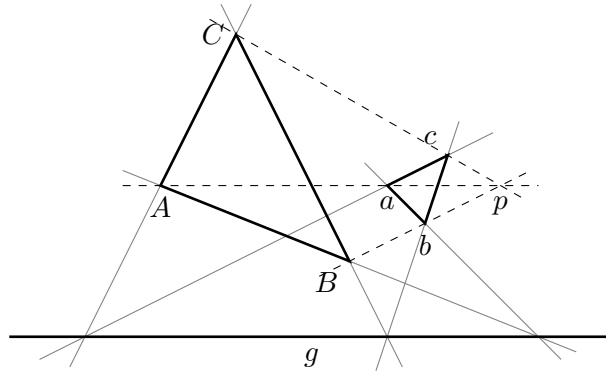
*Die Zahl  $n$  heißt Ordnung von  $\mathcal{P}$ .*

*Beweis.* Seien  $g \neq h$  Geraden in  $\mathcal{P}$ , dann ist  $h$  eine Gerade in der affinen Ebene  $\mathcal{P}_g$ . Besitzt  $h$  genau  $n$  Punkte in  $\mathcal{P}_g$ , dann trägt  $h$   $n + 1$  Punkte in  $\mathcal{P}$ , denn  $g$  und  $h$  schneiden sich in genau einem Punkt. Nach Satz 1.4 besitzt dann jede Gerade  $h \neq g$  genau  $n + 1$  Punkte in  $\mathcal{P}$ . Da für affine Ebenen Axiom (I2) gilt, folgt  $n \geq 2$ . Durch Wahl einer Geraden  $g' \neq g$  liefert die affine Ebene  $\mathcal{P}_{g'}$  die Behauptung für  $g$  [ $\mathcal{P}$  trägt wenigstens 4–Geraden nach Axiom (Pr2)]. Besitzt jetzt  $h \neq g$  in  $\mathcal{P}_g$  genau  $n$  Punkte, dann gibt es genau  $n^2$  Punkte in  $\mathcal{P}_g$  nach Satz 1.4, also hat  $\mathcal{P}$  genau  $n^2 + n + 1$  Punkte (Punkte in  $\mathcal{P}_g$  plus Punkte auf  $g$ ).  $\square$

Die geometrischen Aussagen in den nächsten beiden Resultaten sind typische Sätze der projektiven Geometrie. Die Sätze selbst sagen, wann eine projektive Ebene vom Typ aus Satz 1.45 ist. Um einen Isomorphismus zu  $\mathbb{K}P^2$  zu konstruieren, geht man allerdings mit Satz 1.49 erst zu einer affinen Geometrie über. In dieser affinen Ebene gelten Analoga der folgenden Sätze. Allerdings handelt man sich einige zusätzliche Spezialfälle dadurch ein, dass eine der betrachteten Geraden oder ein oder mehrere der betrachteten Punkte im Unendlichen liegen können.

**Satz 1.51** (Desargues). *Die folgende Aussage gilt in einer projektiven Ebene  $\mathcal{P}$  genau dann, wenn es einen Körper oder Schiefkörper  $\mathbb{K}$  gibt, so dass  $\mathcal{P}$  zu  $\mathbb{K}P^2$  isomorph ist:*

*Es seien  $(a, b, c)$  und  $(A, B, C)$  zwei Tripel nicht kollinearer Punkte. Dann gibt es eine Gerade  $g$  durch die Schnittpunkte entsprechender Seiten der Dreiecke  $\Delta abc$  und  $\Delta ABC$  genau dann, wenn alle Geraden durch entsprechende Ecken sich in einem Punkt  $p$  schneiden.*



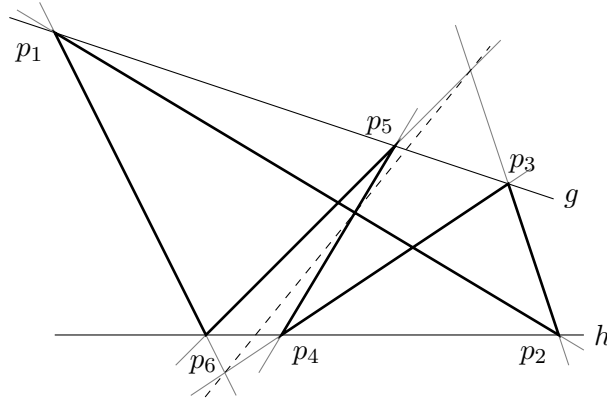
Man beachte, dass es keine Anordnungen von Punkten auf einer Geraden gibt. Daher kann es vorkommen, dass in einer Skizze wie oben der Schnittpunkt zweier Dreiecksseiten außerhalb beider Dreiecks liegt, denn vom Standpunkt der projektiven Geometrie gibt es den Begriff „außerhalb“ nicht.

**Satz 1.52** (Pappus). *Die folgende Aussage gilt in einer projektiven Ebene  $\mathcal{P}$  genau dann, wenn es einen Körper  $\mathbb{K}$  gibt, so dass  $\mathcal{P}$  zu  $\mathbb{K}P^2$  isomorph ist:*

*Wenn die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf einer der zwei Geraden  $g$  und  $h$  liegen, dann liegen die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten*



ebenfalls auf einer Geraden.



**Bemerkung 1.53.** Die projektive Ebene über  $\mathbb{K}$  kann man auch sehr gut mit Hilfe homogener Koordinaten beschreiben. Sei  $\sim$  die Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$  mit der Eigenschaft, dass  $(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2)$  genau dann gilt, wenn  $(x_0, x_1, x_2) = t \cdot (y_0, y_1, y_2)$  für ein  $t \in \mathbb{K}$  gilt. Die Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit

$$(x_0 : x_1 : x_2) := [(x_0, x_1, x_2)]_{\sim}.$$

$(x_0 : x_1 : x_2)$  beschreibt einen 1-dimensionalen Unterraum im  $\mathbb{K}^3$ , d.h. die Punkte des  $\mathbb{K}P^2$  aus Satz 1.45 werden durch die Menge

$$\mathbb{K}P^2 = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}\}$$

gegeben. Eine Einbettung der affinen Ebene  $\mathbb{K}^2$  in die projektive Ebene über  $\mathbb{K}$  wird durch die Abbildung

$$\Psi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}P^2, (x_1, x_2) \mapsto (1 : x_1 : x_2)$$

gegeben. Ein 2-dimensionalen Unterraum im  $\mathbb{K}^3$  ist durch die Menge

$$g = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}$$

und einen Vektor  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$  bestimmt. Betrachten wir diese Menge unter der Projektionsabbildung  $\mathbb{K}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}P^2, (x_0, x_1, x_2) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$ , so erhalten wir eine geometrische Realisierung der Geraden im  $\mathbb{K}P^2$ :

$$\{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{K}P^2 \mid a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\}.$$

Sei  $g$  eine Gerade in  $\mathbb{K}P^2$ , d.h.  $g$  ist eindeutig durch den Vektor  $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{0\}$  bestimmt. Nach den obigen Betrachtungen gilt  $g = \Psi(h)$  für eine Gerade  $h$  im  $\mathbb{K}^2$ , oder  $g$  ist die unendlich ferne Gerade bzgl. der Einbettung  $\Psi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}P^2$ . Die unendlich ferne Gerade bzgl. der Einbettung  $\Psi : \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}P^2$  wird durch

$$g_\infty := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{K}P^2 \mid x_0 = 0\}$$

gegeben, d.h. für den zugehörigen Vektor gilt  $a_0 \neq 0, a_1 = a_2 = 0$ . Für  $g \neq g_\infty$  erhalten wir die entsprechende Gerade im  $\mathbb{K}^2$  durch

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}(g) &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid (1 : x_1 : x_2) \in g\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \mid a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0\} \neq \emptyset, \end{aligned}$$

wobei  $(a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}$ . Die Punkte im  $\mathbb{K}P^2$  auf der Geraden  $g_\infty$  definieren einen 1-dimensionalen projektiven Raum über  $\mathbb{K}$ :

$$\{(0 : x_1 : x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\} \cong \{(x_1 : x_2) \mid (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{0\}\} = \mathbb{K}P^1,$$

d.h. für die Punkte gilt (mit den entsprechenden Einbettungen):

$$\mathbb{K}P^2 = \mathbb{K}^2 \cup \mathbb{K}P^1.$$

**Bemerkung 1.54.** Die Menge der 1-dimensionalen Unterräume im  $\mathbb{K}^{n+1}$  definiert den projektiven Raum  $\mathbb{K}P^n$ : Sei  $\sim$  die Äquivalenzrelation auf  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$  mit  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n)$  gdw.  $(x_0, \dots, x_n)$  und  $(y_0, \dots, y_n)$  sind  $\mathbb{K}$ -linear abhängig im  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Die entsprechende Äquivalenzklasse bezeichnen wir wieder mit  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ . Dann gilt

$$\mathbb{K}P^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n) \mid (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\}.$$

Wir erhalten wieder eine Einbettung

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}P^n, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (1 : x_1 : \dots : x_n),$$

so dass  $\mathbb{K}P^n = \mathbb{K}^n \cup \mathbb{K}P^{n-1}$ . Man beachte  $\mathbb{K}P^0 = \{\text{Punkt}\}$ . Es gilt weiterhin  $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$  und  $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ .

## 1.8 Zentral- und Parallelprojektion

Für eine Inzidenzgeometrie bezeichne  $g_{x,y}$  die eindeutige Gerade durch die Punkte  $x \neq y$ .

**Definition 1.55.** Sei  $\mathcal{A} = (P, g, I)$  eine affine Ebene und  $A, B \subset P$  Mengen von Punkten. Eine *Parallelprojektion* von  $A$  auf  $B$  ist eine Abbildung  $\pi : A \rightarrow B$  mit

1.  $\pi(v) = v$  für alle  $v \in A \cap B$ .
2. Seien  $v, w \in A$  mit  $\pi(v) \neq v$  und  $\pi(w) \neq w$ , dann gilt  $g_{v, \pi(v)} \parallel g_{w, \pi(w)}$ .

**Beispiel 1.56.** Eine Parallelprojektion haben wir bereits im Beweis von Satz 1.4 verwendet. Sei  $A$  die Menge der Punkte einer Geraden  $g$ , und  $B$  die Menge der Punkte einer Geraden  $h \neq g$ . Dann wird eine Parallelprojektion  $A \rightarrow B$  eindeutig durch zwei Punkte  $p$  und  $q$  bestimmt, wobei  $p$  auf  $g$  liegt und nicht auf  $h$ , und  $q$  ein Punkt auf  $h$  ist. Falls  $q$  nicht auf  $g$  liegt, ist  $\pi$  bijektiv (andernfalls bildet  $\pi$  alle Punkte von  $g$  auf  $q$  ab).

**Definition 1.57.** Sei  $\mathcal{S} = (P, G, I)$  eine Inzidenzgeometrie,  $A, B \subset P$  Mengen von Punkten sowie  $q \in P$  ein Punkt mit  $q \notin A \cup B$ . Eine *Zentralprojektion* von  $A$  auf  $B$  mit Zentrum  $q$  ist eine Abbildung  $\pi : A \rightarrow B$ , so dass

1.  $\pi(v) = v$  für alle  $v \in A \cap B$ .
2. Für alle  $v \in A$  sind  $v, \pi(v)$  und  $q$  kollinear, d.h.  $g_{v, q} = g_{\pi(v), q}$ .

Für eine affine Ebene  $\mathcal{A}$  bezeichne  $\mathcal{P}'$  die im letzten Abschnitt konstruierte projektive Ebene zu  $\mathcal{A}$ .

**Satz 1.58.** 1. Ist  $\pi : A \rightarrow B$  eine Zentralprojektion in  $\mathcal{A}$  mit Zentrum  $q$ , dann ist  $\pi : A \rightarrow B$  auch eine Zentralprojektion in  $\mathcal{P}'$  mit Zentrum  $q$ .

2. Sei  $\pi : A \rightarrow B$  eine Parallelprojektion in  $\mathcal{A}$ , dann gibt es einen Punkt  $q$  in  $\mathcal{P}'$ , so dass  $\pi : A \rightarrow B$  eine Zentralprojektion in  $\mathcal{P}'$  mit Zentrum  $q$  definiert.

3. Sei  $\pi : A \rightarrow B$  eine Zentralprojektion mit Zentrum  $q$  in einer projektiven Ebene  $\mathcal{P}$ , so dass eine Gerade  $h$  durch  $q$  existiert, die  $A$  und  $B$  nicht trifft. Dann ist  $\pi : A \rightarrow B$  eine Parallelprojektion in der affinen Ebene  $\mathcal{P}_h$ .

*Beweis.* 1.) ist nach Definition klar. Zu 2.): Offensichtlich bleibt die Bedingung (1) erhalten. Sei  $\pi(v) = v$  für alle  $v \in A$ , dann gilt  $A \subseteq B$  bzw.  $A = A \cap B$  und für jeden Punkt  $q \notin A \cup B$  ist  $\pi : A \rightarrow B$  eine Zentralprojektion mit Zentrum  $q$  (wähle zum Beispiel  $q$  auf der unendlich fernen Geraden). Sei jetzt  $v$  derart, dass  $\pi(v) \neq v$ . Die Gerade  $g_{v, \pi(v)}$  liefert

einen Punkt  $q = [g_{v,\pi(v)}]$  auf der unendlich fernen Geraden  $g_\infty$  von  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{P}'$ , insbesondere inzidiert  $q$  mit  $g_{v,\pi(v)}$  in  $\mathcal{P}'$ . Sei  $w \in A$  ein weiterer Punkt mit  $w \neq \pi(w)$ , dann gilt  $[g_{w,\pi(w)}] = [g_{v,\pi(v)}]$  nach Voraussetzung, d.h.  $q$  inzidiert auch mit  $g_{w,\pi(w)}$  in  $\mathcal{P}'$ . Also ist  $\pi : A \rightarrow B$  eine Zentralprojektion in  $\mathcal{P}'$  mit Zentrum  $q$ . Zu 3.): Nach Voraussetzung ist  $A$  bzw.  $B$  eine Menge von Punkten in der affinen Ebene  $\mathcal{P}_h$ . Seien  $v \neq \pi(v)$  und  $w \neq \pi(w)$ , dann schneiden sich die Geraden  $g_{v,\pi(v)}$  und  $g_{w,\pi(w)}$  im Punkt  $q \in h$ . Da  $q$  kein Punkt in  $\mathcal{P}_h$  ist, folgt  $g_{v,\pi(v)} \parallel g_{w,\pi(w)}$  in  $\mathcal{P}_h$ . Also ist  $\pi : A \rightarrow B$  eine Parallelprojektion in  $\mathcal{P}_h$ .  $\square$

Den Begriff der Zentralprojektion haben wir für beliebige Inzidenzgeometrien definiert. Betrachten wir zum Beispiel den Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  für  $n \geq 2$ , dann sind Geraden im  $\mathbb{K}^n$  durch 1-dimensionale affine Unterräume gegeben, d.h. eine Menge  $g \subset \mathbb{K}^n$  ist eine Gerade im  $\mathbb{K}^n$ , wenn es einen Vektor  $v \in \mathbb{K}^n$  gibt, so dass  $-v + g = \{-v + x \mid x \in g\}$  ein 1-dimensionaler Unterraum ist. Definieren wir die Inzidenzstruktur wie üblich mengentheoretisch, dann liefert dies eine Inzidenzgeometrie, und wir wissen, was eine Zentralprojektion im  $\mathbb{K}^n$  ist.

Um auch den Begriff der Parallelprojektion im  $\mathbb{K}^n$  zu definieren, müssen wir den Begriff der Parallelität auf den  $\mathbb{K}^n$  fortsetzen. Eine Teilmenge  $V \subset \mathbb{K}^n$  ist eine *affine Ebene*, wenn es einen Vektor  $w \in \mathbb{K}^n$  gibt, so dass

$$-w + V = \{-w + v \in \mathbb{K}^n \mid v \in V\}$$

ein 2-dimensionaler Unterraum im  $\mathbb{K}^n$  ist. Die Geraden in  $V$  sind genau die Geraden  $g$  im  $\mathbb{K}^n$  mit  $g \subset V$ . Geraden  $g$  und  $h$  in  $\mathbb{K}^n$  ( $n \geq 2$ ) heißen *parallel*, wenn es eine affine Ebene  $V \subset \mathbb{K}^n$  gibt, so dass  $V$  die Geraden  $g$  und  $h$  enthält mit  $g \parallel h$ .

**Definition 1.59.** Seien  $A, B \subset \mathbb{K}^n$ ,  $n \geq 2$ , Teilmengen. Eine *Parallelprojektion* von  $A$  auf  $B$  ist eine Abbildung  $\pi : A \rightarrow B$  mit

1.  $\pi(v) = v$  für alle  $v \in A \cap B$ .
2. Seien  $v, w \in A$  mit  $\pi(v) \neq v$  und  $\pi(w) \neq w$ , dann sind  $g_{v,\pi(v)}$  und  $g_{w,\pi(w)}$  parallel im  $\mathbb{K}^n$ .

**Bemerkung 1.60.** Die 2-dimensionalen Unterräume im  $\mathbb{K}^{n+1}$  definieren unter der Projektion  $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}P^n$  Geraden im  $\mathbb{K}P^n$ . Dies definiert insbesondere eine Inzidenzgeometrie des  $\mathbb{K}P^n$  (mengentheoretisch im  $\mathbb{K}P^n$  oder durch Unterraumeigenschaft im  $\mathbb{K}^{n+1}$ ). Analog zu letztem Satz erhält man die Dualität, dass Parallelprojektionen im  $\mathbb{K}^n$  Zentralprojektionen im  $\mathbb{K}P^n$  mit unendlich fernem Zentrum entsprechen.

## 1.9 Trigonometrie

In diesem Kapitel vergleichen wir Dreieckssätze der Euklidischen, sphärischen und hyperbolischen Geometrie. Wir betrachten dabei stets ein Dreieck  $\triangle ABC$  mit den Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  an den Ecken  $A, B, C$  und den Längen  $a, b, c$  der gegenüberliegenden Seiten.

Die Euklidischen Winkelsätze (Cosinussatz, Sinussatz und Satz von der Winkelsumme) hatten wir in Abschnitt 1.3 wiederholt. Die sphärische Geometrie haben wir am Ende von Abschnitt 1.1 bereits eingeführt. Ihre Punktmenge ist die Einheitssphäre  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Geraden sind Großkreise, also Schnitte zweidimensionaler linearer Unterräume  $E \subset \mathbb{R}^3$ . Wie in Satz 1.45 wollen wir die Geradenmenge  $G$  mit daher mit der Menge der Ebenen identifizieren. Die sphärische Geometrie erfüllt nicht einmal das Axiom (I1), da durch gegenüberliegende Punkte viele Großkreise gehen. Wir können aber Längen und Winkel wie in Abschnitt 1.3 messen. Für das Euklidische Skalarprodukt schreiben wir wieder  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definition 1.61.** Es seien  $p, q \in S^2$  zwei Punkte, dann definieren wir ihren *sphärischen Abstand*  $d(p, q)$  als den Winkel  $\angle p0q$ , unter dem  $p$  und  $q$  vom Ursprung aus zu sehen sind.

Es seien  $p, q, r \in S^2$  drei Punkte, und es seien  $E, F \subset \mathbb{R}^3$  die von  $p$  und  $q$  sowie von  $q$  und  $r$  aufgespannten Ebenen. Dann ist  $|\angle pqr|$  der Winkel zwischen den Ebenen  $E$  und  $F$  entlang der Geraden durch  $q$ , gemessen auf den Seiten von  $p$  und  $r$ .

**Satz 1.62** (Winkelsätze im sphärischen Dreieck). *Für ein sphärisches Dreieck gelten die folgenden Winkelsätze.*

1. Seitencosinussatz

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma .$$

2. Sinussatz

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma} .$$

3. Winkelcosinussatz

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos c .$$

Außerdem kennen wir eine Flächenformel für sphärische Dreiecke aus den Übungen:

$$|\Delta pqr| = \alpha + \beta + \gamma - \pi .$$

Aus dem Seitencosinussatz folgt die Dreiecksungleichung. Da  $\sin a, \sin b \geq 0$  und  $\cos \gamma \geq -1$ , gilt zunächst

$$\cos c \geq \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b).$$

Da der Cosinus auf  $[0, \pi]$  monoton fällt, folgt  $c \leq a + b$ . Da der Cosinus streng monoton fällt, kann Gleichheit nur gelten, wenn  $\gamma = \pi$  oder wenn  $a = 0$  oder  $b = 0$ . In jedem dieser Fälle ist das Dreieck entartet.

*Beweis.* Wir betrachten zunächst das Dreieck

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad A = \begin{pmatrix} \cos c \\ \sin c \cdot \cos \beta \\ \sin c \cdot \sin \beta \end{pmatrix}$$

mit den korrekten Seitenlängen  $a$  und  $c$  und dem korrekten Winkel  $\beta$ . Wenn wir dieses Dreieck um die  $z$ -Achse um den Winkel  $-a$  drehen, beschreiben wir das neue Dreieck

$$B' = \begin{pmatrix} \cos a \\ -\sin a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad A' = \begin{pmatrix} \cos b \\ -\sin b \cdot \cos \gamma \\ \sin b \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Seiten  $a, b$  und des Winkels  $\gamma$ . Zurückdrehen mit Hilfe der Drehmatrix ergibt für  $p$  die neue Formel

$$A = \begin{pmatrix} \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \\ \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma \\ \sin b \cdot \sin \gamma \end{pmatrix}.$$

Koeffizientenvergleich liefert in der ersten Komponente den Seitencosinussatz, in der zweiten den sogenannten *Sinuscossinussatz*, und in der dritten den Sinussatz.

Für den Beweis des Winkelcosinussatzes betrachten wir anstelle des Dreiecks  $\Delta ABC$  das sogenannte *polare Dreieck*. Es besteht aus den Punkten  $A', B', C'$ , so dass  $A'$  auf  $B, C$  senkrecht steht und  $\langle A', A \rangle > 0$  gilt, und entsprechende für die anderen Punkte. Das polare Dreieck ist wohldefiniert, solange  $\Delta ABC$  nicht entartet ist, siehe unten. Dann ist  $\Delta A'B'C'$  ebenfalls nicht entartet, und sein polares Dreieck ist das ursprüngliche Dreieck  $\Delta ABC$ . Für die Seitenlängen und Winkel des polaren Dreiecks gilt

$$\begin{aligned} \alpha' &= \pi - a, & \beta' &= \pi - b, & \gamma' &= \pi - c, \\ a' &= \pi - \alpha, & b' &= \pi - \beta & \text{und} & c' = \pi - \gamma. \end{aligned}$$

Wir erhalten den Winkelcosinussatz für  $\Delta ABC$ , indem wir die obigen Beziehungen in den Seitencosinussatz für  $\Delta A'B'C'$  einsetzen.  $\square$

**Bemerkung 1.63.** Die Konstruktion des polaren Dreiecks ist analog zum Vertauschen von Punkten und Geraden in  $\mathbb{R}P^2$ , wie wir es in den Übungen kennengelernt haben. Man beachte, dass der Sinussatz dabei in sich übergeht.

Damit das polare Dreieck wohldefiniert ist, darf keine Ecke mit einer anderen Ecke oder ihrem Antipodenpunkt übereinstimmen, denn wäre etwa  $B = \pm C$  der Nordpol, so gäbe es für  $A'$  den ganzen Äquator zur Auswahl. Falls  $B \neq \pm C$ , darf  $A$  nicht auf dem von  $B, C$  aufgespannten Großkreis liegen, denn sonst wäre  $\langle A', A \rangle = 0$  für alle Punkte  $A'$  mit  $\langle A', B \rangle = \langle A', C \rangle = 0$ . Wir können beide Fälle gemeinsam ausschließen, indem wir verlangen, dass  $\Delta ABC$  nicht entartet ist, das heißt, dass  $A, B, C$  nicht kollinear sind, also nicht auf einem Großkreis liegen.

Für die hyperbolische Geometrie geben wir die entsprechenden Sätze ohne Beweis an. Dabei verwenden wir den Abstandsbegriff aus (1.6), und der Winkel zwischen zwei hyperbolischen Halbgeraden ist gerade der Winkel zwischen den entsprechenden (Halb-) Tangenten.

**Satz 1.64** (Winkelsätze im hyperbolischen Dreieck). *Für ein hyperbolisches Dreieck gelten die folgenden Winkelsätze.*

1. Seitencosinussatz

$$\cosh c = \cosh a \cdot \cosh b - \sinh a \cdot \sinh b \cdot \cos \gamma .$$

2. Sinussatz

$$\frac{\sinh a}{\sin \alpha} = \frac{\sinh b}{\sin \beta} = \frac{\sinh c}{\sin \gamma} .$$

3. Winkelcosinussatz

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cosh c .$$

4. Flächenformel

$$|\Delta ABC| = \pi - \alpha - \beta - \gamma .$$

Aus dem Seitencosinussatz folgt auch hier die Dreiecksungleichung.

**Bemerkung 1.65.** Wir betrachten ein sphärisches Dreieck mit den Seitenlängen  $ra, rb, rc$ ; die zugehörigen Winkel seien  $\alpha(r), \beta(r), \gamma(r)$ . Die Winkel in einem hyperbolischen Dreieck mit den gleichen Seitenlängen bezeichnen wir mit  $\alpha'(r), \beta'(r), \gamma'(r)$ . Im Grenzwert  $r \rightarrow 0$  „konvergieren“ die Winkelsätze der sphärischen und hyperbolischen Geometrie gegen die

Winkelsätze der Euklidischen Geometrie; dabei entspricht dem Winkelcosinussatz der Satz über die Winkelsumme. Das erklärt, warum wir auf der Erdoberfläche „im Kleinen“ die Euklidische Geometrie benutzen dürfen.

Für kleine  $r > 0$  schreiben wir

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), & \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + O(x^4), \\ \sin x &= x + O(x^3) & \text{und} & \sinh x = x + O(x^3). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass  $a, b, c > 0$ . Aus dem sphärischen und dem hyperbolischen Seitencosinussatz wird jeweils

$$\begin{aligned} 1 - \frac{r^2}{2}c^2 + O(r^4) &= 1 - \frac{r^2}{2}a^2 - \frac{r^2}{2}b^2 + r^2 ab \cos \gamma(r) + O(r^4) \\ \text{und} \quad 1 + \frac{r^2}{2}c^2 + O(r^4) &= 1 + \frac{r^2}{2}a^2 + \frac{r^2}{2}b^2 + r^2 ab \cos \gamma'(r) + O(r^4). \end{aligned}$$

Auflösen nach dem Cosinus liefert für  $r \rightarrow 0$  den Grenzwert

$$\lim_{r \rightarrow 0} \cos \gamma(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \gamma'(r) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

Insbesondere existiert der Grenzwert und stimmt mit  $\cos \gamma$  überein, wobei  $\gamma$  der entsprechende Winkel eines Euklidischen Dreiecks mit den Seitenlängen  $a, b$  und  $c$  sei. Da der Cosinus auf dem Intervall  $[0, \pi]$  stetig umkehrbar ist, folgt auch

$$\lim_{r \rightarrow 0} \gamma(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \gamma'(r) = \gamma.$$

Für die anderen Winkel gilt das entsprechende.

Wir nehmen jetzt an, dass das Euklidische Dreieck nicht entartet ist, das heißt, dass  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$ . Mit dem gleichen Trick wie oben wird aus dem sphärischen Sinussatz für kleine  $r$  die Formel

$$\frac{ar}{\sin \alpha(r)} + O(r^3) = \frac{br}{\sin \beta(r)} + O(r^3) = \frac{cr}{\sin \gamma(r)} + O(r^3).$$

Im Grenzübergang  $r \rightarrow 0$  kürzen wir einen Faktor  $r$  und erhalten den Euklidischen Sinussatz. Mit dem hyperbolischen Sinussatz geht es genauso.

Beim Grenzübergang  $r \rightarrow 0$  liefern sphärischer und hyperbolischer Winkelcosinussatz die gleiche Formel

$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$



Aus den Additionstheoremen folgt

$$\cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \alpha - \beta) .$$

Da der Cosinus stetig umkehrbar ist, erhalten wir wie erwartet

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi .$$

## Kapitel 2

# Kegelschnitte

Ein *Kegelschnitt* im  $\mathbb{R}^3$  ist die Schnittmenge eines Kreiskegels mit einer Ebene. In diesem Kapitel berechnen wir mögliche Kegelschnitte und werden feststellen, dass für einen Kegelschnitt folgende Lösungsmengen in Frage kommen: Ellipse, Hyperbel, Parabel, zwei einander schneidene Geraden, eine Gerade, Punkt.

### 2.1 Geometrische Figuren

Wir betrachten das kartesische Modell des Euklidischen Raumes, d.h. wir betrachten den Vektorraum  $\mathbb{R}^n$  mit dem Standardskalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ . Geraden im  $\mathbb{R}^n$  sind die affinen (verschobenen) 1-dimensionalen Unterräume, insbesondere wird eine Gerade  $g$  durch genau 2 Punkte  $p \neq q \in \mathbb{R}^n$  bestimmt:

$$g = \{p + t \cdot (q - p) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

(Affine) Ebenen im  $\mathbb{R}^n$  sind affine (verschobene) 2-dimensionalen Unterräume, d.h.  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  ist eine Ebene im  $\mathbb{R}^n$ , wenn es einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^n$  gibt, so dass

$$-v + E = \{-v + w \mid w \in E\}$$

ein 2-dimensionaler Unterraum im  $\mathbb{R}^n$  ist. Eine Ebene  $E \subseteq \mathbb{R}^n$  wird damit durch 3 nicht kollineare Punkte eindeutig bestimmt: Für  $-v + E$  gibt es eine Basis  $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ , d.h.  $E$  ist eindeutig gegeben durch

$$E = \{v + x \cdot b_1 + y \cdot b_2 \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

und  $v, v + b_1, v + b_2$  sind nicht kollineare Punkte in  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ , die  $E$  bestimmen. Das Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^n$  induziert natürlich auch eine Euklidische

Struktur auf Ebenen, d.h.  $E \subset \mathbb{R}^n$  erbt zum Beispiel den Abstands begriff, und es gibt eine Isometrie  $\mathbb{R}^2 \rightarrow E$ .

Seien  $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$  abgeschlossene Mengen von Punkten, dann ist der *Abstand* von  $A$  und  $B$  definiert durch

$$\text{dist}(A, B) := \min_{a \in A, b \in B} |\overline{ab}|.$$

Zum Beispiel sind Punkte, Geraden und Ebenen abgeschlossen im  $\mathbb{R}^3$ , d.h. auf diese Weise erhalten wir einen Abstands begriff von Geraden zu Ebenen oder Punkten.

**Definition 2.1.** Seien  $p_1$  und  $p_2$  Punkte einer Ebene.

- Eine *Ellipse* ist die Menge aller Punkte der Ebene, für welche die Summe der Abstände zu  $p_1$  und  $p_2$  konstant ist:

$$\{q \mid |\overline{p_1q}| + |\overline{p_2q}| = \text{const} > |\overline{p_1p_2}|\}.$$

Im Fall  $p_1 = p_2$  definiert dies einen Kreis mit Mittelpunkt  $p_1$ .

- Sei  $p_1 \neq p_2$ , dann ist eine *Hyperbel* die Menge der Punkte, für welche die Differenz der Abstände zu  $p_1$  und  $p_2$  konstant ist (Bild):

$$\{q \mid \left| |\overline{p_1q}| - |\overline{p_2q}| \right| = \text{const} < |\overline{p_1p_2}|\}.$$

$p_1 \neq p_2$  heißen *Brennpunkte* der Ellipse bzw. Hyperbel. Die Gerade durch  $p_1$  und  $p_2$  heißt *Hauptachse*.

- Gegeben sei eine *Leitgerade*  $g$  und ein *Brennpunkt*  $p$ , der nicht auf  $g$  liegt. Eine *Parabel* ist die Menge aller Punkte, die den gleichen Abstand zu  $p$  und  $g$  haben:

$$\{q \mid \text{dist}(q, g) = \text{dist}(p, q) = |\overline{pq}|\}.$$

Durch eine geeignete Wahl von Koordinaten unserer Ebene (d.h. benutze die Isometrie  $\mathbb{R}^2 \rightarrow E$  und die Euklidische Bewegungsgruppe) erhalten wir explizite Beschreibungen von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln: Dazu sei  $k \subset \mathbb{R}^2$  eine Ellipse mit Brennpunkten  $p_1 \neq p_2$ , dann gibt es eine Bewegung  $(A, v) \in E(2)$ , die den Punkt  $p_1$  auf  $(-f, 0) \in \mathbb{R}^2$  und den Punkt  $p_2$  auf  $(f, 0)$  abbildet mit  $2f = |\overline{p_1p_2}| > 0$ . Da  $(A, v)$  eine Isometrie der Euklidischen Ebene ist, ist das Bild  $(A, v)(k) \subset \mathbb{R}^2$  eine Ellipse mit Brennpunkten  $(-f, 0)$ ,

$(f, 0)$  und der  $x$ -Achse als Hauptachse. Sei  $q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt auf der Ellipse  $(A, v)(k)$ , dann gilt  $u = |q - (-f, 0)|$  und  $v = |q - (f, 0)|$  (Bild)

$$\begin{aligned} u^2 &= (x + f)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2fx + f^2 \\ v^2 &= (x - f)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2fx + f^2 \\ u^2 - v^2 &= 4fx. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Ellipsengleichung  $u + v = 2a$  mit  $a > f$ , dann folgt

$$\begin{aligned} u = 2a - v &\Rightarrow u^2 = (2a - v)^2 \Rightarrow 4av = 4a^2 - u^2 + v^2 \\ \Rightarrow 16a^2v^2 &= 16a^4 + (u^2 - v^2)^2 - 8a^2(u^2 - v^2) \Rightarrow \\ v^2 &= a^2 + \frac{(u^2 - v^2)^2}{16a^2} - \frac{1}{2}(u^2 - v^2) = a^2 + \frac{f^2}{a^2}x^2 - 2fx \end{aligned}$$

Benutzt man noch obige Formel für  $v^2$  erhalten wir

$$x^2 - \frac{f^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - f^2$$

was äquivalent ist zu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - f^2} = 1$$

mit  $2a = |\overline{p_1q}| + |\overline{p_2q}| > 2f$ . Sei wiederum die  $x$ -Achse die Hauptachse mit Brennpunkten  $-p_1 = p_2 = (f, 0)$ , dann erhält man für Hyperbeln analog die Hyperbelgleichung (man beachte  $a < f$  in diesem Fall):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{f^2 - a^2} = 1.$$

$f$  bezeichnet die *Exzentrizität* der Ellipse bzw. Hyperbel.

Für die Parabelgleichung sei die  $x$ -Achse parallel zur Leitgeraden  $g$ , welche durch den Punkt  $(0, -f)$  geht, wobei  $(0, f)$  mit  $f > 0$  der Brennpunkt ist. Sei  $q = (x, y)$  ein Punkt der Parabel, so folgt (Übungsaufgabe)

$$y = \frac{1}{4f}x^2.$$

## 2.2 Die Kegelschnittgleichung bzw. die allgemeine Gleichung zweiten Grades in $x$ und $y$

Wir betrachten Kreiskegel (Doppelkegel) im  $\mathbb{R}^3$ , die durch Rotation einer Geraden durch den Ursprung um die  $z$ -Achse entsteht, wobei der Winkel

$\gamma$  zwischen der Rotationsgeraden und der  $z$ -Achse im Bereich  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$  liegt. Sei  $(x, y, z)$  ein Punkt dieses Kreiskegels, dann folgt durch Betrachtung rechtwinkliger Dreiecke (Bild)

$$\frac{\text{Gegenkathete}^2}{\text{Ankathete}^2} = \frac{x^2 + y^2}{z^2} = (\tan \gamma)^2.$$

Dies liefert die Kegelgleichung:

$$x^2 + y^2 = \alpha^2 z^2$$

mit  $\alpha := \tan \gamma \in (0, \infty)$ . Sei  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - \alpha^2 z^2$ , dann wird der Kreiskegel durch  $F^{-1}(0)$  bestimmt. Seien  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$  Vektoren, die eine Ebene  $E$  definieren:

$$E = \{u + x \cdot v + y \cdot w \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Damit ist der Kegelschnitt durch die Menge

$$E \cap F^{-1}(0) = \{v' \in E \mid F(v') = 0\}.$$

bestimmt, d.h. zu lösen ist die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= F(u + x \cdot v + y \cdot w) \\ &= (u_1 + xv_1 + yw_1)^2 + (u_2 + xv_2 + yw_2)^2 - \alpha^2(u_3 + xv_3 + yw_3)^2 \\ &= x^2(v_1^2 + v_2^2 - \alpha^2 v_3^2) + y^2(w_1^2 + w_2^2 - \alpha^2 w_3^2) + 2xy(v_1 w_1 + v_2 w_2 - \alpha^2 v_3 w_3) + \\ &\quad + x(\dots) + y(\dots) + (u_1^2 + u_2^2 - \alpha^2 u_3^2) \\ &= \text{Gleichung 2. Grades in } x, y \end{aligned}$$

Das dies keine Gleichung 1. Grades in  $x, y$  ist, kann man zum Beispiel mit Hilfe des Minkowski Skalarproduktes zeigen, d.h. wenigstens einer der Faktoren von  $x^2$ ,  $y^2$  bzw.  $xy$  ist ungleich Null.

**Definition 2.2.** Seien  $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$  gegebene reelle Zahlen, dann heißt

$$q(x, y) := a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

Gleichung zweiten Grades in  $x$  und  $y$ , wenn  $a_{ij} \neq 0$  für wenigstens ein Paar  $i, j$  gilt.

Sei  $A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  und  $b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , dann erhalten wir folgende Matrixschreibweise für die Gleichung zweiten Grades  $q(x, y)$ :

$$q(x, y) = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c = \langle p, Ap \rangle + \langle b, p \rangle = 0$$

mit  $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Wir wollen jetzt mit Hilfe von Rotation und Translation die möglichen Lösungsmengen  $C := \{p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid q(x, y) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$  bestimmen. Dabei benutzen wir, dass eine Bewegung  $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Euklidischen Raumes den geometrischen Typ von  $C$  invariant lässt. Sei also  $\Phi = (S, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $S \in O(2)$  und  $v \in \mathbb{R}^2$  eine Bewegung des  $\mathbb{R}^2$ . Wir betrachten eine "Koordinatentransformation"

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \Phi \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = S\tilde{p} + v$$

und berechnen die neue Quadrik

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \langle S\tilde{p} + v, A(S\tilde{p} + v) \rangle + \langle b, S\tilde{p} + v \rangle + c \\ &= \langle S\tilde{p}, AS\tilde{p} \rangle + \langle v, AS\tilde{p} \rangle + \langle Av, S\tilde{p} \rangle + \langle b, S\tilde{p} \rangle + \langle v, Av \rangle + \langle b, v \rangle + c \\ &= \langle \tilde{p}, (S^t AS)\tilde{p} \rangle + \langle S^t(2Av + b), \tilde{p} \rangle + (\langle v, b + Av \rangle + c) \\ &=: \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) . \end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass  $S$  orthogonal ist, also  $S^{-1} = S^t$ , und dass  $A$  symmetrisch ist, also  $A^t = A$ . Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation können wir  $S$  so bestimmen, dass  $D = S^t AS$  eine Diagonalmatrix  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  mit den Eigenwerten auf der Diagonalen wird. Dann bilden die Spalten von  $S$  gerade eine zugehörige Orthonormalbasis aus Eigenwerten von  $A$ . Diese Vektoren sind die „Achsenrichtungen“ der Quadrik.

Als nächstes versuchen wir — wenn möglich — den linearen Term zu beseitigen. Dazu suchen wir Lösungen der Gleichung  $2Av + b = 0$ . Sollte das möglich sein, gilt für den konstanten Term

$$\tilde{c} := \langle v, b + Av \rangle + c = c - \langle v, Av \rangle .$$

In diesem Fall erhalten wir folgende Lösungsmengen

$$C = \Phi(\tilde{C}) = \{ \Phi(\tilde{p}) \mid \tilde{q}(\tilde{p}) = \tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0 \} :$$

- Sei  $\det A = \lambda_1 \lambda_2 > 0$ , dann gilt

$$C = \begin{cases} \emptyset & \lambda_1 \tilde{c} > 0 . \\ \{\Phi(0, 0)\} = \{v\} & \tilde{c} = 0 . \\ \text{Ellipse} & \lambda_1 \tilde{c} < 0 . \end{cases}$$

- $\det A = \lambda_1 \lambda_2 = 0$  und ohne Einschränkung sei  $\lambda_1 \neq 0$ , dann gilt

$$C = \begin{cases} \emptyset & \lambda_1 \tilde{c} > 0 \\ \text{Gerade} & \tilde{c} = 0 \\ 2 \text{ parallele Geraden} & \lambda_1 \tilde{c} < 0 \end{cases}$$

- $\det A < 0$  und  $\tilde{c} \neq 0$ , dann ist  $C$  eine Hyperbel.
- $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$ ,  $\tilde{c} = 0$  und ohne Einschränkung  $\lambda_1 = \mu_1^2$ ,  $\lambda_2 = -\mu_2^2 < 0$ , dann gilt

$$0 = \mu_1^2 \tilde{x}_1^2 - \mu_2^2 \tilde{y}_2^2 = (\mu_1 \tilde{x}_1 - \mu_2 \tilde{x}_2)(\mu_1 \tilde{x}_2 + \mu_2 \tilde{x}_2).$$

Damit besteht  $C$  aus zwei verschiedenen Geraden, die sich im Punkt  $v$  schneiden.

Man beachte, dass in diesem Fall der Punkt  $v$  immer den „Mittelpunkt“ der Quadrik angibt.

Jetzt zum zweiten Fall: Die Gleichung  $Av + b = 0$  sei nicht lösbar. Dann gilt  $\det A = 0$ ,  $A \neq 0$  und  $b \neq 0$ . Wir setzen nun zunächst  $v = 0$  und wählen ohne Einschränkung unser  $D$  und  $S$  derart, dass  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  mit  $\lambda_1 \neq 0$  gilt. Dann erhalten wir nach obiger Rechnung

$$\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \tilde{b}_1 \tilde{x} + \tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{c}.$$

Wir ersetzen zunächst  $\tilde{x}$  durch  $\tilde{x} - \frac{\tilde{b}_1}{2\lambda_1}$ , indem wir  $v$  entsprechend abändern, und erhalten

$$\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lambda_1 \tilde{x}^2 + \tilde{b}_2 \tilde{y} + \tilde{c}$$

mit einer neuen Konstante  $\tilde{c}$ . Da  $Av + b = 0$  nicht lösbar ist, ist  $\tilde{b}_2 \neq 0$ , und wir ersetzen  $\tilde{y}$  durch  $\tilde{y} - \frac{\tilde{c}}{\tilde{b}_2}$ , indem wir  $v$  noch einmal modifizieren. Die Lösungsmenge der Gleichung

$$\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\lambda_1}{\tilde{b}_2} \tilde{x}^2 + \tilde{y}$$

ist offensichtlich eine Parabel mit Scheitelpunkt  $(0, 0)$ .

**Satz+Definition 2.3.** Für eine quadratische Gleichung  $q(p) = q(x, y) = 0$  gibt es eine Bewegung  $\Phi \in \mathbb{E}(2)$ , und eine Gleichung  $\tilde{q}(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ , so dass  $\tilde{q}(\tilde{p}) = 0$  genau dann, wenn  $q(\Phi(\tilde{p})) = 0$  gilt, von der Form

$$\alpha \cdot \tilde{x}^2 + \beta \cdot \tilde{y}^2 + \gamma \cdot \tilde{y} + \delta = 0 \tag{2.1}$$

mit  $\alpha \neq 0$  und entweder  $\gamma = 0$  oder  $\beta = \delta = 0$ . (2.1) heißt Normalform von  $q(x, y) = 0$ .

Der Typ der obigen Lösungsmengen  $C$  ist invariant unter Bewegungen des  $\mathbb{R}^2$ , d.h. eine Bewegung bildet Ellipsen auf Ellipsen ab und nicht auf Hyperbeln oder Geraden (vgl. dazu die Definitionen). Mit diesen Ausführungen erhalten wir:

**Korollar 2.4.** Sei  $q(x, y) = 0$  eine Gleichung 2. Grades in  $x, y$  wie in Definition 2.2, dann gibt es folgende Lösungsmengen:

1.  $b \in \text{Im}(A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)$ :  $\emptyset$ , einzelner Punkt, Gerade, zwei parallele Geraden, zwei sich schneidende Geraden, Ellipse, Hyperbel
2.  $b \notin \text{Im}(A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)$ : Parabel.

**Bemerkung 2.5.** Eine quadratische Gleichung  $q(x, y) = 0$  ist genau dann ein echter Kegelschnitt (d.h. Schnitt eines Doppelkegels und einer Ebene), wenn für die Lösungsmenge  $C = \{(x, y) \mid q(x, y) = 0\}$  gilt:

$$C \neq \emptyset \quad \text{und} \quad C \neq \text{zwei parallele Geraden.}$$

## 2.3 Beispiel

Gegeben sei die Gleichung

$$0 = q(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4xy + x + y + 3.$$

Zu bestimmen ist der Typ der Lösungsmenge  $C = \{(x, y) \mid q(x, y) = 0\}$  und eventuelle Brennpunkte/Schnittpunkte. In Matrixnotation gilt

$$0 = q(x, y) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle + 3.$$

Die Eigenwerte der Matrix sind  $\lambda_1 = 5$  und  $\lambda_2 = 0$ . Ein Eigenvektor für  $\lambda_2 = 0$  ist  $w'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  und ein Eigenvektor für  $\lambda_1 = 5$  ist  $w'_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Also sind  $w'_1, w'_2$  orthogonal und  $w_1 = w'_1/|w'_1|, w_2 = w'_2/|w'_2|$  liefern eine orthonormale Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Definiere die Matrix  $S := \begin{pmatrix} w_1^t \\ w_2^t \end{pmatrix}$ , dann gilt

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & S^t S &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ D &= SAS^t = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Wir betrachten jetzt die Koordinatentransformation  $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} := S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + v$  für einen Vektor  $v \in \mathbb{R}^2$  bzw. wir substituieren  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S^t \left[ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - v \right]$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - v, S \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} S^t \left[ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - v \right] \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, S^t \left[ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - v \right] \right\rangle + 3 \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2Dv, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\rangle - \left\langle S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v \right\rangle + \langle v, Dv \rangle + 3 \\ &= 5\tilde{x}^2 + \left\langle \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} - 10v_1 \\ \frac{3}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \right\rangle - \frac{1}{\sqrt{5}}(-v_1 + 3v_2) + 5v_1^2 + 3 \end{aligned}$$

Der lineare Term kann offensichtlich nicht eliminiert werden, d.h. die Lösungsmenge  $0 = q(x, y)$  ist eine Parabel. Für  $v_1 = -\frac{1}{10\sqrt{5}}$  folgt

$$q(x, y) = 5\tilde{x}^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}\tilde{y} - \frac{1}{50} - \frac{3}{\sqrt{5}}v_2 + \frac{1}{100} + 3.$$

Sei jetzt

$$v_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} \left( -\frac{1}{100} + \frac{300}{100} \right) = \frac{299}{300}\sqrt{5},$$

dann gilt

$$q(x, y) = 5\tilde{x}^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}\tilde{y}.$$

Der Brennpunkt der Parabel

$$\tilde{y} = -\frac{5\sqrt{5}}{3}\tilde{x}^2$$

in den Koordinaten  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  ist der Punkt  $(0, -\frac{3}{20\sqrt{5}})$ , damit erhalten wir den Brennpunkt in den Koordinaten  $x, y$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S^t \left[ \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} - v \right] = \begin{pmatrix} -3/100 \\ -3/50 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/25 + 299/300 \\ -1/50 + 598/300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16/15 \\ -61/60 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Projektive Quadriken

Wir wollen einige affine und projektive Eigenschaften von Quadriken herausarbeiten. Dazu stellen wir  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$  wie in Satz 1.45 und Bemerkung 1.53

dar:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}P^2 &= \{ (x : y : z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \} \\ \mathbb{R}^2 &= \{ (x : y : 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \} \subset \mathbb{R}P^2.\end{aligned}$$

Dann hat die „unendlich ferne Gerade“ in  $\mathbb{R}P^2$  gerade die Gestalt

$$g_\infty = \{ (x : y : 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \}.$$

In dieser Notation steht  $(x : y : z)$  für den von  $(x, y, z)$  aufgespannten Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ .

**Bemerkung 2.6.** Damit die Nullstellenmenge einer quadratischen Gleichung eine Vereinigung von Punkten des  $\mathbb{R}P^2$ , also von eindimensionalen Unterräumen des  $\mathbb{R}^3$  ist, dürfen wir nur homogene Polynome betrachten, das heißt, alle Terme haben den gleichen Grad. Anstelle der Gleichung  $q$  aus Definition 2.2 betrachten wir

$$\bar{q}(x, y, z) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1xz + b_2yz + cz^2 = 0.$$

Dann gilt  $\bar{q}(x, y, 1) = 0$  genau dann, wenn  $q(x, y) = 0$ .

Um eine etwas symmetrische Schreibweise zu bekommen, sei  $b_1 = 2a_{13}$ ,  $b_2 = 2a_{23}$ ,  $c = a_{33}$  und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Als einzige Bedingung verlangen wir, dass  $A \neq 0$ . Dann betrachten wir als Lösungsmenge Äquivalenzklassen  $[w]$  von Vektoren  $w = (x, y, z)^t$ , so dass

$$\bar{q}(w) = w^t \cdot A \cdot w = 0.$$

Schließlich beachten wir noch, dass sich an der Lösungsmenge nichts ändert, wenn wir  $A$  mit einer Konstanten  $\lambda \neq 0$  multiplizieren.

Die Gruppe  $GL(3, \mathbb{R})$  wirkt auf  $\mathbb{R}P^2$  durch

$$S([w]) = [S \cdot w],$$

dabei ändert sich wieder nichts, wenn man  $S$  durch  $\lambda S$  mit  $\lambda \neq 0$  ersetzt. Dann gilt

$$\bar{q}(S \cdot w) = w^t S^t A S w.$$

**Satz 2.7.** Zu jeder Quadrik  $\bar{q}(w) = w^t A w = 0$  existiert eine Matrix  $S \in GL(3, \mathbb{R})$  und eine symmetrische Matrix  $B$  von einem der folgenden Typen, so dass  $\bar{q}(Sw) = 0$  genau dann, wenn  $w^t B w = 0$  gilt:

1.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , und die Lösungsmenge ist leer,
2.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , und die Lösungsmenge enthält nur den Punkt  $(0 : 0 : 1)$ ,
3.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , und die Lösungsmenge ist der Einheitskreis in  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$ ,
4.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , und die Lösungsmenge ist eine Gerade  $x = 0$ ,
5.  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , und die Lösungsmenge besteht aus zwei Geraden  $x = z$  und  $x = -z$ .

Im Fall (5) sind dies in  $\mathbb{R}^2$  die parallelen Geraden  $x = \pm 1$ , die sich aber in  $(0 : 1 : 0) \in g_\infty$  schneiden. Zum Fall (5) gehören auch zwei sich schneidende affine Geraden. Zum Fall (3) gehören auch Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln. Dabei sind Ellipsen „gestreckte“ Kreise, Parabeln sind Kreise, die die unendlichferne Gerade  $g_\infty$  in einem Punkt berühren, und Hyperbeln sind Kreise, die  $g_\infty$  in zwei Punkten schneiden, nämlich den Richtungen der Asymptoten.

Die Fälle (1) und (3) sind stabil, das heißt, der Typ ändert sich nicht, wenn man  $A$  ein bisschen variiert.

*Beweis.* Wir benutzen den Trägheitssatz von Sylvester, um  $A$  auf die gesuchte Form zu bringen. Sollte die so erhaltene Diagonalmatrix  $D$  mehr negative als positive Diagonaleinträge haben, ersetzen wir  $D$  durch  $-D$ .  $\square$

**Satz 2.8.** Durch fünf paarweise verschiedene Punkte im  $\mathbb{R}P^2$  geht genau eine projektive Quadrik.

*Beweis.* Falls drei der fünf Punkte kollinear sind, also auf einer Geraden  $g$  liegen, sei  $h$  die Gerade durch die anderen zwei Punkte. Falls  $g = h$ , sind wir in Fall (4), sonst in Fall (5).

Andernfalls bestimmen wir zunächst  $S$  so, dass die ersten drei Punkte auf  $(1 : 0 : 0)$ ,  $(0 : 1 : 0)$ ,  $(0 : 0 : 1)$  abgebildet werden. Der vierte Punkt wird auf  $(a : b : c)$  abgebildet mit  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ , da keine drei Punkte

kollinear sind. Wir multiplizieren die Zeilen von  $S$  mit  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  beziehungsweise  $\frac{1}{c}$ , dann wird der vierte Punkt jetzt auf  $(1 : 1 : 1)$  abgebildet, und an den ersten dreien ändert sich nichts.

Wir bestimmen  $A$  wie oben so, dass  $q(w) = w^t A w$  für alle obigen Punkte verschwindet, das heißt, es gilt  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$  und  $a_{12} + a_{23} + a_{13} = 0$ . Sei  $(x : y : z)$  das Bild des fünften Punktes, dann sind die Zahlen  $0$ ,  $x$ ,  $y$  und  $z$  paarweise verschieden aufgrund der Kollinearitätsannahme. Daher bestimmen sie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & z(y-x) & y(x-z) \\ z(y-x) & 0 & x(z-y) \\ y(x-z) & x(z-y) & 0 \end{pmatrix}$$

vollständig bis auf Multiplikation mit einem Skalar  $\lambda \neq 0$ . In diesem Fall sind wir automatisch im Fall (3).  $\square$

**Korollar 2.9.** Durch je fünf Punkte im  $\mathbb{R}^2$  geht genau eine Quadrik.

Ein Beispiel sehen Sie in den Übungen.

**Theorem 2.10** (Pascal). *Wenn die Ecken eines Sechsecks in  $\mathbb{R}P^2$  alle auf einer Quadrik liegen, dann sind die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten kollinear.*

Diesen Satz beweisen wir nicht. Im Fall (5) erhalten wir als Spezialfall den Satz von Pappus. Wir können ihn auf affine oder Euklidische Quadriken einschränken, riskieren aber, dass einer oder alle Schnittpunkte auf  $g_\infty$  liegen.

## 2.5 Die Gleichung zweiten Grades in $n$ Variablen

Gegeben seien  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a_{ij} = a_{ji}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$  und eine Gleichung

$$0 = q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c$$

in den Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$ . Dies ist eine Gleichung zweiten Grades, wenn  $a_{ij} \neq 0$  für wenigstens ein Paar  $i, j$  gilt. In Matrixnotation kann man diese Gleichung folgendermaßen schreiben

$$0 = q(x) = x^t A x + b^t x + c$$

mit

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösungsmenge von  $q(x) = 0$  bezeichnet man auch als *Quadrik*. Wie oben können wir diese Gleichung durch eine Bewegung des  $\mathbb{R}^n$  in eine Normalform bringen. Der Beweis von Abschnitt 2.2 verallgemeinert sich entsprechend für  $n$ -Unbekannte.

**Satz 2.11.** *Sei  $0 = q(x_1, \dots, x_n)$  eine Gleichung zweiten Grades in den Unbekannten  $x_1, \dots, x_n$ , dann gibt es eine Bewegung  $(S, v) \in E(n)$ , so dass  $0 = q(x_1, \dots, x_n)$  in den Koordinaten*

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + v$$

die Gestalt

$$0 = \tilde{a}_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \tilde{a}_r \tilde{x}_r^2 + \tilde{b}_{r+1} \tilde{x}_{r+1} + \dots + \tilde{b}_n \tilde{x}_n + \tilde{c}$$

bekommt mit  $\tilde{a}_1 \neq 0$  und entweder  $\tilde{c} = 0$  oder  $\tilde{b}_i = 0$  für alle  $r + 1 \leq i \leq n$ .

Die folgenden geometrischen Figuren sind die möglichen nicht leeren Lösungsmengen im Fall  $n = 3$  ( $a_i \neq 0$  für alle  $i$ , vgl. auch [K]):

- Ellipsoid

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

- Einschaliges Hyperboloid

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

- Zweischaliges Hyperboloid

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} - \frac{x_3^2}{a_3^2} = 1$$

- Kegel

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3^2$$

- Elliptisches Paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3$$

- Hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} = x_3$$

- Einsiedlerpunkt

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} = 0$$

- Zylinder über einer Lösung einer quadratischen Gleichung in zwei Unbekannten, d.h. Zylinder über einem realen Kegelschnitt oder zwei parallele Ebenen:

$$x_3 \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad q'(x_1, x_2) = 0$$

( $q'(x_1, x_2) = 0$  ist Gleichung zweiten Grades in 2 Unbekannten).

# Kapitel 3

## Polyeder

### 3.1 Polygone und Polyeder

Es sei  $k \geq 3$ . In einer Ebene wird ein *Polygon* (*Vieleck*) mit  $k$ -Ecken (auch  $k$ -*Eck* genannt) durch paarweise verschiedene angeordnete *Eckpunkte*  $p_1, \dots, p_k$  gegeben, so dass je drei aufeinanderfolgende Punkte nicht kollinear sind. Setze  $p_{k+1} := p_1$  und  $p_0 := p_k$  zur Vereinfachung der Notation. Die Strecken  $\overline{p_i p_{i+1}}$  für  $i \in \{1, \dots, k\}$  bezeichnet man als *Kanten* bzw. *Seiten* des Polygons. Punkte auf Kanten sind *Kantenpunkte*. Die Strecken  $\overline{p_i p_j}$  mit  $j \notin \{i-1, i, i+1\}$  sind *Diagonalen*. Ein Polygon heißt *einfach*, wenn das Innere  $\overline{p_i p_{i+1}} \setminus \{p_i, p_{i+1}\}$  keine weiteren Eckpunkte enthält und keine weitere Kante schneidet.

Ein Punkt  $q$  liegt im *Inneren* des Polygons, wenn  $q$  kein Kantenpunkt ist und es einen Strahl ausgehend von  $q$  gibt, der keinen der Eckpunkte  $p_1, \dots, p_k$  enthält und die Kanten des Polygons in einer ungeraden Anzahl schneidet. Dieser Begriff lässt sich für alle Polygone definieren, ist aber nur dann wirklich sinnvoll, wenn das Polygon einfach ist. Um zu zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl des Strahls abhängt, variiert man diesen und betrachtet alle Fälle, in denen der Strahl einen der Eckpunkte des Polygons trifft. Damit beschränkt ein Polygon eine Fläche  $\Delta(p_1, \dots, p_k)$ , wobei  $x \in \Delta(p_1, \dots, p_k)$  genau dann gilt, wenn  $x$  ein innerer Punkt oder ein Kantenpunkt des Polygons ist. Im Euklidischen  $\mathbb{R}^2$  ist der *Innenwinkel*  $\alpha_i$  eines einfachen Polygons im Punkt  $p_i$  folgendermaßen definiert:

- Es sei  $\alpha_i := |\sphericalangle p_{i-1} p_i p_{i+1}| \in (0, \pi)$ , falls es  $q \in \overline{p_{i-1} p_i}$  und  $r \in \overline{p_i p_{i+1}}$  mit  $q \neq p_i \neq r$  gibt, so dass  $\overline{qr} \subset \Delta(p_1, \dots, p_k)$ .
- Es sei  $\alpha_i := 2\pi - |\sphericalangle p_{i-1} p_i p_{i+1}| \in (\pi, 2\pi)$ , falls es  $q \in \overline{p_{i-1} p_i}$  und  $r \in$

$\overline{p_i p_{i+1}}$  mit  $q \neq p_i \neq r$  gibt, so dass  $\{q, r\} = \overline{qr} \cap \Delta(p_1, \dots, p_k)$ .

Ein Polygon ist *konvex*, wenn für je zwei Punkte  $p, q \in \Delta(p_1, \dots, p_k)$  auch die Strecke von  $p$  nach  $q$  im Polygon liegt:  $\overline{pq} \subseteq \Delta(p_1, \dots, p_k)$ . Insbesondere gilt für die Innenwinkel im konvexen Polygon:

$$\alpha_i = |\sphericalangle p_{i-1} p_i p_{i+1}| \in (0, \pi).$$

**Satz 3.1.** *Für ein  $k$ -Eck  $P$  mit angeordneten Eckpunkten  $p_1, \dots, p_k$  sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $P$  ist konvex.
2.  $P$  ist einfach mit Innenwinkeln  $\alpha_i < \pi$ .
3. Sei  $g_i$  die Gerade durch  $p_i, p_{i+1}$ , dann liegen die Punkte  $\{p_j | j \neq i, i+1\}$  alle auf der gleichen Seite von  $g_i$  für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  (insbesondere  $\{p_j | j \neq i, i+1\} \cap g_i = \emptyset$ ).

*Beweis.* Wir skizzieren den Beweis an dieser Stelle nur:

(3)  $\Rightarrow$  (1):  $\mathbb{R}^2 \setminus g_i$  besitzt genau zwei Komponenten. Sei  $U_i \subseteq \mathbb{R}^2$  die Komponente mit  $p_j \in U_i$  für alle  $j \neq i, i+1$ .  $U_i$  und  $V_i = U_i \cup g_i$  sind konvex, damit ist auch

$$\Delta(p_1, \dots, p_k) = \bigcap_i V_i \subseteq \mathbb{R}^2$$

konvex (Schnitt zweier konvexer Mengen ist konvex). (1)  $\Rightarrow$  (2): Die Innenwinkel  $\alpha_i < \pi$  sind klar. Angenommen  $P$  ist nicht einfach, d.h. zwei Kanten schneiden sich nicht in den vorgesehenen Eckpunkten, dann gibt es Kantenpunkte  $a, b$  mit  $\overline{ab} \not\subseteq \Delta(p_1, \dots, p_k)$  (innere und äußere Punkte grenzen aneinander, Bild.), also ist  $P$  nicht konvex im Widerspruch zur Annahme. (2)  $\Rightarrow$  (3) folgt durch geometrische Argumentation. Man überlegt sich zuerst, dass  $p_{i-1}$  und  $p_{i+2}$  auf der gleichen Seite von  $g_i$  sind. Der Rest des Beweises erfordert globale Argumente.  $\square$

**Satz 3.2.** *Für ein einfaches Polygon mit  $k$ -Eckpunkten gilt*

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j = (k-2) \cdot \pi = (k-2)\pi.$$

*Beweis.* Wir zeigen nur den konvexen Fall. Für den allgemeinen Fall zerlegt man das einfache Polygon in eine geeignete Anzahl von Dreiecken.



Die Strecken  $\overline{p_1p_3}, \overline{p_1p_4}, \dots, \overline{p_1p_{k-1}}$  liegen alle innerhalb des Polygons, d.h. unser Polygon zerlegt sich in genau  $(k - 2)$  Dreiecke

$$\triangle(p_1p_2p_3), \triangle(p_1p_3p_4), \dots, \triangle(p_1p_{k-1}p_k) \subseteq \triangle(p_1, \dots, p_k).$$

Die Innenwinkelsumme von Dreiecken ist  $\pi$ , also folgt durch Summation die Innenwinkelsumme des konvexen Polygons:  $(k - 2) \cdot \pi$ .  $\square$

**Definition 3.3.** Ein *regelmäßiges* (bzw. *reguläres*) *Polygon* im Euklidischen  $\mathbb{R}^2$  ist ein konvexes Polygon, welches die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Die Innenwinkel sind gleich groß.
2. Die Kantenlängen sind gleich groß.

**Satz 3.4.** Seien  $p_1, \dots, p_k$  und  $q_1, \dots, q_k$  die angeordneten Eckpunkte von zwei regelmäßigen konvexen Polygonen, dann sind äquivalent:

(i)  $|\overline{p_1p_2}| = |\overline{q_1q_2}|$ .

(ii) Es gibt eine Bewegung  $\Phi \in E(2)$  mit  $\Phi(p_i) = q_i$  für alle  $i = 1, \dots, k$ .

Damit ist ein regelmäßiges Polygon bis auf eine Bewegung eindeutig durch seine Kantenlänge und die Anzahl der Ecken bestimmt.

*Beweis.* (ii)  $\Rightarrow$  (i) ist klar nach Definition von  $E(2)$ . Umgekehrt gelte  $|\overline{p_1p_2}| = |\overline{q_1q_2}|$ , dann gibt es genau eine Bewegung  $\Phi$  mit  $\Phi(p_1) = q_1$  und  $\Phi(p_2) = q_2$ . Nach letztem Satz und der Voraussetzung sind die Innenwinkel des  $k$ -Ecks durch  $\alpha = \frac{k-2}{k}\pi$  gegeben. Wegen

$$|\overline{q_2q_3}| = |\overline{q_1q_2}| = |\overline{p_1p_2}| = |\overline{p_2p_3}| = |\overline{\Phi(p_2)\Phi(p_3)}|$$

und  $|\sphericalangle q_1q_2q_3| = |\sphericalangle p_1p_2p_3| = |\sphericalangle \Phi(p_1)\Phi(p_2)\Phi(p_3)|$  folgt dann durch Abtragen auch  $q_3 = \Phi(p_3)$ . Induktiv erhält man die Behauptung (ii).  $\square$

**Bemerkung 3.5.** Die Existenz von regelmäßigen  $k$ -Ecken ist einfach zu zeigen. Man betrachte die Punkte  $p_j := \begin{pmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \end{pmatrix} \in S^1 \subset \mathbb{R}^2$  für  $\varphi_j = 2\pi j/k$ ,  $j = 1 \dots k$ , und verbinde benachbarte Punkte. Mit Hilfe der orthogonalen Gruppe  $O(2) \subset E(2)$  folgt die Regelmäßigkeit dieses  $k$ -Ecks.

Ein 3-dimensionales Polyeder  $P$  ist eine nichtleere Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$ , die von Polygonen  $F^1, \dots, F^m$  begrenzt wird, wobei  $F^j$  eine Polygon(fläche) in einer Ebene  $E^j \subset \mathbb{R}^3$  bezeichnet. Die  $F^j$  definieren dann die Seiten (Seitenflächen), Kanten und die Ecken eines Polyeder. Wir betrachten nur einfache

Polyeder, d.h. es gibt keine Selbstüberschneidungen der Seitenflächen und wir werden uns hauptsächlich auf den Fall konvexer beschränkter Polyeder konzentrieren. Dabei heißt eine Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  *konvex*, wenn für alle  $x, y \in M$  gilt  $\overline{xy} = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0, 1]\} \subseteq M$ . Weiterhin heißt  $M$  *beschränkt*, wenn es eine Konstante  $C > 0$  mit  $|x|_E < C$  für alle  $x \in M$  gibt.

Im  $\mathbb{R}^3$  können wir eine Ebene durch ihre *Normalform* beschreiben. Ist  $W \subset \mathbb{R}^3$  ein 2-dimensionalen Unterraum, dann gibt es einen Vektor  $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , der orthogonal zu Vektoren  $w \in W \subset \mathbb{R}^3$  ist:  $\langle w, n \rangle_E = 0$ . Ist  $b_1, b_2$  eine Basis von  $W$ , dann erhält man zum Beispiel durch das Kreuzprodukt von  $b_1$  und  $b_2$  einen solchen Normalenvektor: für  $n = b_1 \times b_2$  gilt  $\langle n, b_1 \rangle_E = \langle n, b_2 \rangle_E = 0$ . Umgekehrt, sei  $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  gegeben, dann definiert die Lösungsmenge des Gleichungssystems in  $w$

$$0 = \langle w, n \rangle_E = w_1 n_1 + w_2 n_2 + w_3 n_3$$

einen 2-dimensionalen Unterraum  $W \subset \mathbb{R}^3$  (vgl. lineare Algebra). Folglich gilt für jeden 2-dimensionalen Unterraum  $W \subset \mathbb{R}^3$ :

$$W = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, n \rangle_E = 0\}$$

mit einem Vektor  $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  ( $n$  ist bis auf Skalierung eindeutig). Eine Ebene  $E = v + W \subset \mathbb{R}^3$  besitzt damit die Normalform

$$E = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w - v, n \rangle_E = 0\} = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, n \rangle_E = \langle v, n \rangle_E\}$$

mit  $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Jede Ebene  $E = v + W$  zerlegt den  $\mathbb{R}^3$  in zwei (abgeschlossene) Halbräume

$$\begin{aligned} X_+ &= \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w - v, n \rangle_E \geq 0\} \\ X_- &= \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w - v, n \rangle_E \leq 0\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich sind  $X_\pm \subseteq \mathbb{R}^3$  konvex mit  $E = X_+ \cap X_-$ . Seien jetzt  $F^1, \dots, F^m$  die Polygonflächen, die das Polyeder  $P$  definieren, dann liefert  $F^i$  eine Ebene  $F^i \subset E^i \subset \mathbb{R}^3$  für alle  $i$ . Wir definieren  $P$  als *konvex*, wenn es Normalenvektoren  $n^i$  zu  $E^i = X_+^i \cap X_-^i$  derart gibt, dass

$$P = \bigcap_{i=1}^m X_-^i$$

gilt. Man beachte, dass durch den Übergang vom Normalenvektor  $n$  zu  $-n$  die Rollen  $X_+$  und  $X_-$  vertauscht werden, d.h. durch die entsprechende

Wahl des Vorzeichens von  $n$  liegt ein konvexes Polyeder  $P$  in  $X_-^i$  für alle  $i$ . Man kann zeigen, dass diese geometrische Definition der Konvexität mit der obigen analytischen Definition übereinstimmt.

Sei jetzt  $E^i = v^i + W^i$ ,  $w \in X_-^i$  und  $n^i$  entsprechend, dann gilt also  $\langle w, n^i \rangle_E \leq \langle v^i, n^i \rangle_E$ , d.h. es gilt genau dann  $w \in P \subset \mathbb{R}^3$ , wenn

$$\langle n^i, w \rangle_E \leq b_i := \langle v^i, n^i \rangle_E \in \mathbb{R}$$

für alle  $i = 1, \dots, m$  gilt. Sei

$$A := \begin{pmatrix} (n^1)^t \\ \vdots \\ (n^m)^t \end{pmatrix} \in \text{Mat}(m \times 3; \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

dann schreibt sich die obige Bedingung als

$$Aw \leq b,$$

wobei  $z \leq b$  für  $z \in \mathbb{R}^m$  genau dann gilt, wenn  $z_i \leq b_i$  für alle  $i = 1, \dots, m$  gilt. Damit erhalten wir folgende Beschreibung von konvexen Polyedern, wobei wir natürlich voraussetzen, dass die Ungleichung  $Aw \leq b$  eine Lösung  $w \in \mathbb{R}^3$  besitzt.

**Definition+Satz 3.6.** Ein *konvexes Polyeder*  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  wird durch eine Matrix  $A \in \text{Mat}(m \times 3; \mathbb{R})$  und einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^m$  gegeben:

$$P = \{w \in \mathbb{R}^3 \mid Aw \leq b\}.$$

Ist  $P$  *beschränkt* (d.h. es gibt eine Konstante  $C > 0$ , so dass  $|w|_E < C$  für alle  $w \in P$ ), dann besitzt die Matrix  $A$  vollen Rang:  $\text{rk}(A) = 3$ . Die  $i$ -te Seite ( $i$ -te Seitenfläche) des Polyeders wird durch die Menge

$$F^i = P \cap \{w \in \mathbb{R}^3 \mid (Aw)_i = b_i\}$$

definiert.

*Übung.* Zeigen Sie: Ist  $P$  ein beschränktes konvexes Polyeder, dann besitzt die zugehörige Matrix  $A$  vollen Rang.

## 3.2 Eulersche Polyederformel

**Theorem 3.7** (Eulersche Polyedersatz). *Für ein konvexes beschränktes Polyeder mit  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Seitenflächen gilt*

$$e - k + f = 2.$$

*Beweis.* Sei  $E \subset \mathbb{R}^3$  eine Ebene, die das gegebene Polygon  $P$  nicht schneidet und  $q \notin P$  ein Punkt hinreichend nahe am Zentrum einer Seitenfläche  $F^1$  von  $P$ . Wir betrachten die Zentralprojektion  $\pi : P \rightarrow E$  mit Zentrum  $q$ . Da  $P$  konvex und beschränkt ist, gibt es bei Entfernen von  $F^1$  keine Überschneidungen von Seitenflächen im Bild und die Zentralprojektion "sieht" alle Seitenflächen, d.h.  $\pi : F^2 \cup \dots \cup F^f \rightarrow E$  ist injektiv, wobei  $F^1, \dots, F^f$  die Seitenflächen sind, welche  $P$  begrenzen. Insbesondere gilt  $\pi(p_i) \neq \pi(p_j)$  für zwei Eckpunkte  $p_i \neq p_j$  von  $P$ , Kanten von  $P$  liefern Strecken in  $E$ , und Seitenflächen  $F^j \subset P$ ,  $j \neq 1$  sind Polygone in  $E$ .  $\pi(F^2 \cup \dots \cup F^f)$  ist ein planarer Graph und besteht also aus genau  $f - 1$  Polygonen,  $k$  Strecken (Kanten) und  $e$  Eckpunkten (Bild). Durch Entfernen genau einer der Strecken verkleinert sich entweder die Anzahl der Flächen um Eins oder die Anzahl der Ecken (Endpunkt) um Eins, d.h. der Wert von

$$e' - k' + f'$$

im planaren Graph bleibt unverändert bei Entfernen einer der Strecken, wobei  $e'$  die Anzahl der Eckpunkte,  $k'$  die Anzahl der Strecken und  $f'$  die Anzahl der eingeschlossenen Flächen im Graph bezeichnet. Wir starten also mit  $e' = e$ ,  $k' = k$  und  $f' = f - 1$  und entfernen alle Strecken bis auf Eine. Eine Strecke besitzt aber genau 2 Eckpunkte und umschließt keine Fläche, d.h. es gilt

$$e' - k' + f' = 2 - 1 + 0 = 1.$$

Aufgrund der Invarianz von  $e' - k' + f'$  bei Entfernen (bzw. geeignetes Hinzufügen) von Strecken folgt damit die Behauptung  $e - k + f = 2$  (benutze  $f' = f - 1$ ).  $\square$

**Bemerkung 3.8.** Der Eulersche Polyedersatz gilt allgemein für beschränkte Polyeder die einfach zusammenhängend sind:

$$e - k + f = 2.$$

Einfach zusammenhängend ist ein topologischer Begriff. Für Polyeder  $P$  ist dies aber gleichbedeutend damit, dass  $P$  keine "Löcher" besitzt.

**Definition 3.9.** Sei  $P$  ein beschränktes Polyeder mit  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Seitenflächen, dann heißt

$$\chi(P) = e - k + f$$

die *Euler-Charakteristik* von  $P$ .

**Bemerkung 3.10.** Für ein konvexes beschränktes Polyeder gilt nach dem Eulerschen Polyedersatz also  $\chi(P) = 2$ . Allgemein gilt für beschränkte Polyeder  $\chi(P) = 2(1 - g)$ , wobei  $g$  die Anzahl der Löcher von  $P$  bezeichnet (Beispiel für  $\chi(P) = 0$  und  $\chi(P) = -2$  mit Bild). Als topologische Räume sind zwei beschränkte Polyeder  $P$  und  $P'$  genau dann isomorph (=homöomorph), wenn  $\chi(P) = \chi(P')$  gilt, d.h. die Euler-Charakteristik ist die klassifizierende topologische Invariante von beschränkten Polyedern.

Sei  $P$  ein konvexes beschränktes Polyeder und  $q$  ein Eckpunkt von  $P$ . In  $q$  schneiden sich  $m$ -Polygone  $F^1, \dots, F^m$  mit  $m \geq 3$ . Sei  $\beta_j(q)$  der Innenwinkel des Polygons  $F^j$  in  $q$ . Da  $P$  konvex ist, gibt es eine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  durch  $q$ , so dass  $P$  in genau einem von  $E$  definierten Halbraum liegt. Damit folgt

$$\sum_j \beta_j(q) < 2\pi$$

( $= 2\pi$  definiert eine Parkettierung von  $E$  und  $> 2\pi$  ist ein Widerspruch zur Konvexität von  $P$ ). Wir bezeichnen mit  $\delta(q)$  den Defekt zum Winkel  $2\pi$ , d.h.

$$\delta(q) := 2\pi - \sum_j \beta_j(q) \in (0, 2\pi).$$

**Satz 3.11** (Descartes). *Seien  $q_1, \dots, q_e$  die Eckpunkte eines beschränkten konvexen Polyeders, dann gilt*

$$\sum_{i=1}^e \delta(q_i) = 4\pi.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\sum_{i=1}^e \delta(q_i) = \sum_{i=1}^e \left( 2\pi - \sum_j \beta_j(q_i) \right) = 2\pi \cdot e - \sum \text{Innenwinkel aller Seiten.}$$

Für ein Polygon mit  $j$ -Ecken ist die Innenwinkelsumme  $(j - 2)\pi$ . Sei  $n_j$  die Anzahl der Seitenflächen des Polyeders mit genau  $j$ -Ecken. Dann besitzt das Polyeder genau  $f = \sum_j n_j$  Seitenflächen und die Anzahl der Kanten ist  $k = \frac{1}{2} \sum_j j \cdot n_j$  (zwei Polygone teilen sich eine Kante). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^e \delta(q_i) &= 2\pi \cdot e - \sum_j n_j(j - 2)\pi \\ &= \pi(2e - \sum_j j \cdot n_j + 2 \sum_j n_j) = 2\pi(e - k + f) = 4\pi \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem Eulerschen Polyedersatz.  $\square$

### 3.3 Platonische Körper

Ein Platonischer Körper ist ein Polyeder mit einer möglichst großen Symmetriegruppe. Das beinhaltet, dass alle Flächen kongruente regelmäßige Polygone sind. Außerdem soll das Polyeder an jeder Ecke regelmäßig sein. Dazu stellen wir uns unter der „Eckfigur“ einer Ecke  $q$  die Menge aller Ecken  $\{p_1, \dots, p_k\}$  vor, die mit  $q$  durch eine Kante verbunden sind ( $q$  selbst gehört nicht dazu). Davon gibt es so viele, wie Flächen in  $q$  zusammenstoßen.

**Definition 3.12.** Es seien  $E, E' \subset \mathbb{R}^3$  affine Ebenen im Euklidischen Raum. Polygone  $F \subset E$  und  $F' \subset E'$  heißen *kongruent*, wenn es einen Isomorphismus  $\Phi: E \rightarrow E'$  Euklidischer Ebenen mit  $\Phi(F) = F'$  gibt.

Die Eckfigur  $\{p_1, \dots, p_k\}$  einer Ecke  $q$  des Polygons heiße *regelmäßig*, wenn  $\{p_1, \dots, p_k\}$  in einer affinen Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  liegen und dort ein regelmäßiges Polygon bilden.

Ein *Platonischer Körper* ist ein konvexes beschränktes Polyeder, das von kongruenten regelmäßigen Polygonen begrenzt wird, und dessen Eckfiguren regelmäßig und paarweise kongruent sind. Er hat das *Schläfli-Symbol*  $\{j, m\}$ , wenn er aus  $j$ -Ecken besteht, und seine Eckfiguren  $m$ -Ecke sind.

Auf die Bedingung an die Eckfiguren dürfen wir nicht verzichten, denn auch der Körper, der aus zwei Tetraedern durch Verkleben entlang einer gemeinsamen Seite entsteht, besteht nur aus

**Theorem 3.13.** *Sei  $P$  ein Platonischer Körper, dann ist  $P$  genau eine der folgenden geometrischen Figuren (mit Schläfli-Symbol):*

- (i) Tetraeder  $\{3, 3\}$ ,  $P$  wird durch vier Dreiecke begrenzt.
- (ii) Hexaeder  $\{4, 3\}$  (Würfel),  $P$  wird durch sechs Quadrate begrenzt.
- (iii) Oktaeder  $\{3, 4\}$ ,  $P$  wird durch acht Dreiecke begrenzt.
- (iv) Dodekaeder  $\{5, 3\}$ ,  $P$  wird durch zwölf Fünfecke begrenzt.
- (v) Ikosaeder  $\{3, 5\}$ ,  $P$  wird durch zwanzig Dreiecke begrenzt.

*Beweis.*  $P$  sei begrenzt durch kongruente regelmäßige  $j$ -Ecke, dann besitzt jedes dieser  $j$ -Ecke die Innenwinkel  $\alpha = \frac{j-2}{j}\pi$  (vgl. Satz 3.2 und Definitionen). Sei  $q$  ein Eckpunkt von  $P$  und  $F^1, \dots, F^m$  die Polygone mit Eckpunkt  $q$ , welche  $P$  begrenzen. Da  $P$  konvex ist, ist die Summe der Innenwinkel der

$m$ -Polygone in  $q$  kleiner als  $2\pi$  (es gibt eine Ebene  $E \subset \mathbb{R}^3$  durch  $q$ , so dass  $P$  in einem von  $E$  definierten Halbraum liegt), d.h. es gilt

$$\delta(q) = 2\pi - m \cdot \alpha = 2\pi - \frac{m(j-2)}{j}\pi > 0.$$

Dies liefert  $2j > m(j-2)$ . In einem Eckpunkt müssen sich aber mindestens drei Polygone treffen, d.h.  $m \geq 3$ . Dies liefert folgende Möglichkeiten

- $j = 3$ , dann folgt  $m \in \{3, 4, 5\}$ .
- $j = 4$ , dann folgt  $m = 3$ .
- $j = 5$ , dann folgt  $m = 3$ .

Für  $j > 5$  und  $m \geq 3$  gibt es keine Lösung der Ungleichung  $2j > m(j-2)$ . Ist  $q'$  ein weiterer Eckpunkt von  $P$ , dann folgt aus der Regelmäßigkeit  $\delta(q') = \delta(q)$  für den Defektwinkel. Sei jetzt  $e$  die Anzahl der Eckpunkte von  $P$ , dann erhalten wir aus dem Satz von Descartes

$$e \cdot \delta(q) = 4\pi.$$

Dies liefert folgende Möglichkeiten für die Anzahl der Ecken von  $P$ :

- (i)  $j = 3, m = 3$ , dann gilt  $\alpha = \pi/3, \delta(q) = 2\pi - m \cdot \alpha = \pi$  also  $e = 4$ .
- (ii)  $j = 4, m = 3$ , dann gilt  $\alpha = \pi/2, \delta(q) = 2\pi - 3\alpha = \pi/2$  also  $e = 8$ .
- (iii)  $j = 3, m = 4$ , dann gilt  $\alpha = \pi/3, \delta(q) = 2\pi - 4\alpha = 2\pi/3$  also  $e = 6$ .
- (iv)  $j = 5, m = 3$ , dann gilt  $\alpha = 3\pi/5, \delta(q) = 2\pi - 9\pi/5 = \pi/5$  also  $e = 20$ .
- (v)  $j = 3, m = 5$ , dann gilt  $\alpha = \pi/3, \delta(q) = 2\pi - 5\pi/3 = \pi/3$ , also  $e = 12$ .

Die Anzahl der Kanten  $k$  von  $P$  ist durch  $k = f \cdot j/2$  gegeben (zwei Seiten teilen sich eine Kante), wobei  $f$  die Anzahl der Seitenflächen von  $P$  bezeichnet. Die Eulersche Polyederformel:

$$2 = e - k + f = e + f(1 - j/2)$$

liefert damit folgende Möglichkeiten für Platonische Körper:

- (i)  $j = m = 3$ , dann  $e = 4, f = 4, k = 6$ .
- (ii)  $j = 4, m = 3$ , dann  $e = 8, f = 6, k = 12$ .

(iii)  $j = 3, m = 4$ , dann  $e = 6, f = 8, k = 12$ .

(iv)  $j = 5, m = 3$ , dann  $e = 20, f = 12, k = 30$ .

(v)  $j = 3, m = 5$ , dann  $e = 12, f = 20, k = 30$ .

Die Existenz des Tetraeder [Fall (i)] und des Hexaeder [Fall (ii)] sind anschaulich sofort klar. Ein Oktaeder [Fall (iii)] wird zum Beispiel durch folgende Eckpunkte gegeben:

$$\begin{aligned} p_1 &= (1, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0), p_3 = (-1, 0, 0), \\ p_4 &= (0, -1, 0), p_5 = (0, 0, 1), p_6 = (0, 0, -1). \end{aligned}$$

Die gleichseitigen Dreiecke

$$\begin{aligned} F^1 &= \triangle(p_1, p_2, p_5), F^2 = \triangle(p_1, p_2, p_6), F^3 = \triangle(p_2, p_3, p_5), F^4 = \triangle(p_2, p_3, p_6), \\ F^5 &= \triangle(p_3, p_4, p_5), F^6 = \triangle(p_3, p_4, p_6), F^7 = \triangle(p_4, p_1, p_5), F^8 = \triangle(p_4, p_1, p_6). \end{aligned}$$

begrenzen das Oktaeder. Das Ikosaeder [Fall (v)] erhält man folgendermaßen: Wähle ein regelmäßiges Fünfeck und konstruiere dazu die Pyramide mit einer 5-eckigen Grundfläche, so dass alle Kanten dieses Polyeders gleich groß sind. Betrachte jetzt dazu eine kongruente Pyramide, deren Grundfläche der ersten Pyramide parallel gegenüberliegt, aber so verdreht ist, dass benachbarte Punkte der Grundflächen gleich weit entfernt sind. Durch die entsprechende Verbindung benachbarter Punkte der Grundflächen erhält man das Ikosaeder (Bild). Das Dodekaeder ergibt sich als das Dual des Ikosaeder (siehe unten).  $\square$

Verbindet man die Mittelpunkte (Schwerpunkte) der Seitenflächen eines konvexen Polyeders  $P$  miteinander, so erhält man den *dualen Polyeder*  $P^D$  von  $P$ .  $P^D$  ist auch ein konvexes beschränktes Polyeder. Besitzt  $P$  genau  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Seitenflächen, dann besitzt  $P^D$  offensichtlich genau  $f$  Ecken. Ist  $F \subset P^D$  eine Seitenfläche und  $E \subset \mathbb{R}^3$  die von  $F$  erzeugte Ebene, dann "schneidet"  $E$  genau eine Ecke von  $P$  ab, d.h.  $P^D$  besitzt genau  $e$  Flächen. Aus dem Eulerschen Polyedersatz

$$2 = e - k + f$$

folgt damit, dass  $P$  und  $P^D$  die gleiche Anzahl an Kanten haben. Aus Symmetriegründen erhalten wir, dass das Dual eines Platonischen Körpers wieder ein Platonischer Körper ist:

(i)  $P = \text{Tetraeder}$ , dann  $P^D = \text{Tetraeder}$ .



- (ii)  $P = \text{Hexaeder}$ , dann  $P^D = \text{Oktaeder}$ .
- (iii)  $P = \text{Oktaeder}$ , dann  $P^D = \text{Hexaeder}$ .
- (iv)  $P = \text{Dodekaeder}$ , dann  $P^D = \text{Ikosaeder}$ .
- (v)  $P = \text{Ikosaeder}$ , dann  $P^D = \text{Dodekaeder}$ .

Nimmt man wieder das Dual  $(P^D)^D$ , so erhält man ein zu  $P$  ähnliches, kleineres Polyeder.

# Literaturverzeichnis

- [B] C. Bär. Elementare Differentialgeometrie. Walter de Gruyter & Co., Berlin, expanded edition, 2010.
- [E] N. Efimow. Über die Grundlagen der Geometrie. Höhere Geometrie. Bd. I. Lehrbuch für Studenten der Mathematik, Physik und aller technischen Fachrichtungen ab 1. Semester. Übersetzung aus dem Russischen nach der 3. Auflage von Max Heidler und Gerhard Tesch. (unitext.) Braunschweig: Friedr. Vieweg, 1970.
- [H] R. Hartshorne. Geometry: Euclid and beyond. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [K] H. Knörrer. Geometrie. Vieweg Studium. 71. Wiesbaden: Vieweg, ix, 370 p., 1996.
- [L] H. Lüneburg. Die euklidische Ebene und ihre Verwandten. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.