11. Übungsblatt

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 29.1.15 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Es sei $f\colon X \to Y$ eine beliebige Abbildung. Beweisen Sie zwei der folgenden Aussagen aus Bemerkung 4.42.

(a) Die Pfadfaserung $Pf \to Y$ ist eine Hurewicz-Faserung mit Faser Ff.

(b) Der Unterraum $\operatorname{im}(\iota) \cong X$ ist ein Deformationsretrakt von Pf.

(c) Die Abbildung $f \circ (f^*\mathrm{ev}_1)$ ist zu $p\colon Pf \to Y$ punktiert homotop.

(d) Wenn f eine Hurewicz-Faserung ist, ist $f^{-1}(y_0)$ zur Homotopiefaser Ff homotopieäquivalent.

Aufgabe 2

Zeigen Sie die Exaktheit der Sequenz (2) aus Satz 4.44 an einer der Stellen $[Z, Ff]$ oder $[Z, \omega Y]$, indem Sie den Beweis von Satz 4.39 mit Eckmann-Hilton-Dualität übertragen.

Aufgabe 3

Es sei $\iota\colon S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion. Die Abbildung $S^1 \wedge S^1 \cong S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ induziert eine Abbildung

$$S^1 \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{C}P^\infty) .$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine schwache Äquivalenz ist. Aus den Sätzen von Milnor und Whitehead folgt, dass sie sogar eine Homotopieäquivalenz ist.

Aufgabe 4

Sei $\Bbbk = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ oder $\mathbb{H}$ und sei $k = \dim_{\mathbb{R}}(\Bbbk)$. Zeigen Sie, dass $\Bbbk\mathbb{P}^m$ homöomorph ist zum Unterraum

$$\bigl\{[x_0 : \ldots : n_m : 0 \ldots : 0] \mid (x_0, \ldots, x_m) \in \Bbbk^{m+1} \setminus \{0\}\bigr\} \subset \Bbbk\mathbb{P}^n$$

ist für alle $0 \leq m \leq n$ und dass diese Unterräume gerade die abgeschlossenen Zellen eines CW-Komplexes mit je einer Zelle der Dimension $0, k, \ldots kn$ bilden, wobei die Verklebeabbildungen gerade durch die Hopf-Faserungen gegeben sind.

Geben Sie insbesondere charakteristische Abbildungen $\Phi^{kj}\colon D^{kj} \to \Bbbk\mathbb{P}^n$ an und überprüfen Sie, dass die Topologie des so definierten CW-Komplexes mit der Topologie von $\Bbbk\mathbb{P}^n$ übereinstimmt.