12. Übungsblatt
Algebraische Topologie
im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 5.2.15, vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Exaktheit der Mayer-Vietoris-Sequenz an einer der beiden fehlenden Stellen, also an $\tilde{h}_n(X)$ oder an $\tilde{h}_n(A \cap B)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \longleftarrow A_{n-1} \xleftarrow{h_n} C_n \xleftarrow{g_n} B_n \xleftarrow{f_n} A_n \xleftarrow{h_{n+1}} C_{n+1} \longleftarrow \dots$$

in einer abelschen Kategorie $\mathcal{C}$, dabei dürfen Sie $\mathcal{C} = \mathcal{A}b$ annehmen. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(a) Für alle n existiert $k_n \colon B_n \to A_n$ mit $k_n \circ f_n = \mathrm{id}_{A_n}$.

(b) Für alle n exisiert $\ell_n \colon C_n \to B_n$ mit $g_n \circ \ell_n = \mathrm{id}_{C_n}$.

(c) Für alle n existiert ein Isomorphismus $\varphi_n \colon B_n \to A_n \oplus C_n$, so dass $\varphi_n \circ f_n$ die natürliche Inklusion und $g_n \circ \varphi_n^{-1}$ die natürliche Projektion ist, und $h_n = 0$.

Zeigen Sie außerdem, dass es natürliche Bijektionen gibt zwischen den Mengen der möglichen Folgen $(k_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (a), $(\ell_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (b), sowie der $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in (c).

Aufgabe 3

Es sei X ein gut punktierter topologischer Raum und $\tilde{h}_\bullet$ ein verallgemeinerter reduzierter Homologiefunktor.

(a) Zeigen Sie, dass eine Kofaserung $\iota \colon S^0 \to X_+$ existiert, so dass $\operatorname{im} \iota$ Retrakt von X_+ ist und $X = X_+ / \operatorname{im} \iota$.

(b) Folgern Sie aus der langen exakten Sequenz des Paares $(X_+, \operatorname{im} \iota)$ und obiger Aufgabe, dass $\tilde{h}_k(X) = \ker\bigl(r_* \colon \tilde{h}_k(X_+) \to \tilde{h}_k(S^0)\bigr)$ für alle k.

(c) Präzisieren und beweisen Sie die folgende Aussage: „Die verallgemeinerte Homologie $\tilde{h}_k(X)$ ist unabhängig von der Wahl eines guten Basispunktes von X.“

Aufgabe 4

Es sei $\iota \colon S^2 \cong \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ die Inklusion und $F\iota$ ihre Homotopiefaser. Da $\pi_3(\mathbb{C}P^\infty) = 0$, lässt sich die durch die Hopf-Faserung induzierte Abbildung $g \colon S^3 \to S^2 \to \mathbb{C}P^\infty$ auf ganz D^4 fortsetzen. Konstruieren Sie damit eine Abbildung $S^3 \to F\iota$. Zeigen Sie mit Hilfe der langen exakten Sequenz für Faserungen, dass diese Abbildung eine schwache Äquivalenz ist.