13. Übungsblatt-Wiederholung

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 12.2.15,
bis 12 Uhr bei D. Hein
(Postfach oder Rm 323)

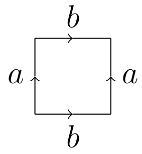
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

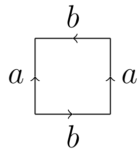
Berechnen Sie $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X;\mathbb{Z})$ und $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ für die folgenden Räume:

(a) Fassen Sie den Torus $T^2 = S^1 \times S^1$ als CW-Komplex auf, indem Sie in der linken Skizze gegenüberliegende Seiten identifizieren (vgl. auch Blatt 7, Aufg. 3 für die Verklebeabbildung der 2-Zelle).

(b) Betrachten Sie die Kleinsche Flasche X, die aus einem Quadrat durch Identifikation gegenüberliegender Seiten gemäß der rechten Skizze entsteht. Fassen Sie X für die Berechnung der Homologie als CW-Komplex mit Basispunkt, zwei 1-Zellen und einer 2-Zelle auf.



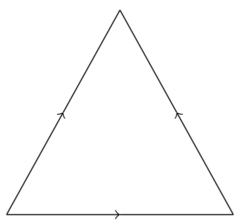
Torus



Kleinsche Flasche

Aufgabe 2

Die 'topologische Narrenkappe' X entsteht, indem man bei einem Dreieck alle drei Seiten gemäß der Skizze identifiziert. Wir wissen aus der Vorlesung, dass $\tilde{H}_\bullet^{CW}(X;\mathbb{Z}) = 0$.



(a) Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von X.

(b) Zeigen Sie, dass X schwach zusammenziehbar ist.

(c) * Geben Sie eine explizite Homotopie $X \times I \to X$ zwischen id_X und der Nullabbildung an.

(d) * Basteln Sie ein Modell.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Satz 5.28: Sei $\Bbbk$ ein Körper und $X = X^n$ ein CW-Komplex mit endlich vielen Zellen in jeder Dimension k und $\tilde{c}_k(X) = \# J^k < \infty$. Für alle $m \geq 0$ gilt:

(a) $\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \tilde{c}_k(X) \geq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \tilde{b}_k(X; \Bbbk)$

(b) $\tilde{c}_k(X) \geq \tilde{b}_k(X; \Bbbk)$

(c) Falls X kompakt ist, gilt auch $\chi(X) = 1 + \sum_k \tilde{c}_k(X)$

Aufgabe 4

Beweisen Sie Bemerkung 3.15 für ein Paar (X, A). Das heißt: zeigen Sie, dass für $k \geq 1$ und $l \geq 0$ gilt

$$\pi_k \left(\Omega^l(X), \Omega^l(A) \right) \cong \pi_{k+l}(X, A).$$

Zeigen Sie außerdem, dass die Behauptung für $l = 0$ falsch ist.