2. Übungsblatt

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 06.11.14 vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Beweisen Sie die Exaktheit der Sequenz aus Satz 3.17 an einer der fehlenden Stellen.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Lemma 3.18. Achten Sie darauf, nur C, C' und B' als Gruppen und nur c und die Abbildung $C' \to B'$ als Gruppenhomomorphismus vorauszusetzen; betrachten Sie alles andere in der Kategorie Set_+.

Aufgabe 3

Im Folgenden bedeute Faserung entweder Serre- oder Hurewicz-Faserung. Zeigen Sie:

(a) Sei $p\colon E \to B$ eine Faserung, und sei $f\colon X \to B$ stetig. Konstruieren Sie $f^*p\colon f^*E \to X$ und $\bar{f}\colon f^*E \to E$ durch

$$f^*E = \left\{ (e,x) \in E \times X \,\middle|\, p(e) = f(x) \in B \right\} , \quad (f^*p)(e,x) = x \ , \quad \bar{f}(e,x) = e \ .$$

Dann ist f^*p wieder eine Faserung.

(b) Die konstante Abbildung $F \to pt$ ist eine Faserung für alle F. Die Projektion $B \times F \to B$ ist eine Faserung für alle F und alle B.

(c) Seien $p\colon E \to B$ und $q\colon Y \to E$ Faserungen. Dann ist auch $p \circ q\colon Y \to B$ eine Faserung.

Aufgabe 4

Ein Raum X heiße *schwach Hausdorff,* wenn stetige Bilder kompakter Räume in X abgeschlossen sind. Zeigen Sie:

(a) Hausdorff-Räume sind schwach Hausdorff, und schwache Hausdorff-Räume erfüllen (T1).

(b) Sei X schwach Hausdorff, K kompakt und $f\colon K \to X$ stetig. Dann ist $\operatorname{im} f$ kompakt (insbesondere Hausdorff), und f ist *eigentlich,* das heißt, Urbilder kompakter Teilmengen sind kompakt.

(c) Unterräume und endliche Produkte schwacher Hausdorff-Räume sind wieder schwach Hausdorff.

(d) Illustrieren Sie (b) anhand des Beispiels 1.29 aus dem Skript.