3. Übungsblatt

Algebraische Topologie

im WS 2014/2015 bei Prof. Dr. S. Goette

Abgabe Donnerstag, den 13.11.14
vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Aufgabe 1

Sei $p\colon E \to B$ eine Serre-Faserung mit typischer Faser F.

(a) Benutzen Sie die Homotopieliftungseigenschaft, um eine Wirkung von $\pi_1(E)$ auf $\pi_k(F)$ zu definieren, so dass diese Wirkung einen Homomorphismus $\pi_1(E) \to Aut(\pi_k(F))$ definiert und die Komposition $\pi_1(F) \to \pi_1(E) \to Aut(\pi_k(F))$ die übliche Gruppenwirkung von $\pi_1(F)$ auf $\pi_k(F)$ ist.

Betrachten Sie dazu für $[g] \in \pi_k(F)$ und $[\gamma] \in \pi_1(E)$ die Abbildung g als Abbildung $g\colon I^k \to F_{\gamma(0)} \subset E$. Dann benutzen Sie die Homotopieliftungseigenschaft in der Form aus Bemerkung 3.21 und zeigen, dass Sie die gewünschte Gruppenwirkung erhalten.

(b) Benutzen Sie das Resultat aus (a), um die Gruppenwirkung von $\pi_1(F)$ auf $\pi_k(F)$ anzugeben, falls $\pi_1(E) = 0$ gilt.

Hinweis: Definieren Sie in (a) die Abbildung $f\colon I^{k+1} \to B$ mit Hilfe von γ und p und die Abbildung $\tilde{g}\colon \partial' I^{k+1} \to E$ mit Hilfe von γ und g.

Aufgabe 2

Es seien X, Y topologische Räume. Definiere den *Verbund* von X und Y als Quotienten

$$X * Y = (X \times Y \times I)/\sim\ ,$$

wobei „$\sim$“ erzeugt wird durch

$$(x, y, 0) \sim (x, y', 0) \qquad \text{und} \qquad (x, y, 1) \sim (x', y, 1) \qquad \text{für alle } x,\, x' \in X \text{ und alle } y,\, y' \in Y\ .$$

Geben Sie Homöomorphismen $S^k * \mathrm{pt} \cong D^{k+1}$ und $S^k * S^\ell \cong S^{k+\ell+1}$ für alle k, ℓ an.

Bitte wenden

Aufgabe 3

Es seien (X, x_0), (Y, y_0) punktierte Räume und es sei $X * Y$ wie oben definiert. Wir identifizieren X, Y mit Unterräumen von $X*Y$ durch $x \mapsto [(x, y_0, 0)]$, $y \mapsto [(x_0, y, 1)]$ für alle $x \in X$, $y \in Y$, wählen als Basispunkt $\left[\left(x_0, y_0, \frac{1}{2}\right)\right]$, und setzen $U = X * Y \setminus Y$ und $V = X * Y \setminus X$.

(a) Zeigen Sie, dass U, V, $U \cap V$ jeweils zu X, Y und $X \times Y$ homotopieäquivalent sind.

(b) Bestimmen Sie die von den Inklusionen induzierten Abbildungen

$$\pi_k(U \cap V) \to \pi_k(U) , \qquad \pi_k(V) \to \pi_k(X * Y)$$

und die Gruppen $\pi_k(U, U \cap V)$.

(c) Die Räume X und Y seien p- beziehungsweise q- zusammenhängend. Wie hoch zusammenhängend ist dann $X * Y$?

Hinweis: Betrachten Sie die natürlichen Abbildung zwischen den langen exakten Sequenz der Paare $(U, U \cap V) \to (X * Y, V)$ und benutzen Sie den Ausschneidungssatz.

Aufgabe 4

Eine Teilmenge U eines topologischen Raumes (X, O_X) heiße *k-offen* (*k-abgeschlossen*), wenn für alle kompakten Räume K und alle stetigen Abbildungen $f\colon K \to X$ das Urbild $f^{-1}(U) \subset K$ offen (abgeschlossen) ist. Ein schwacher Hausdorff-Raum heiße *kompakt erzeugt,* wenn genau die k-offenen Teilmengen offen sind.
Im Folgenden sei (X, O_X) stets schwach Hausdorff. Zeigen Sie:

(a) Die k-offenen Mengen von X bilden eine Topologie O_{kX} auf X; diese ist feiner als O_X. Schreibe $kX = (X, \mathrm{O}_{kX})$, dann ist insbesondere $\mathrm{id}_X\colon kX \to X$ stetig.

(b) Sei K kompakt, dann ist $f\colon K \to X$ genau dann stetig, wenn $f\colon K \to kX$ stetig ist.

(c) Es gilt $\mathrm{O}_{k(kX)} = \mathrm{O}_{kX}$, also ist kX kompakt erzeugt.

(d) Ein schwacher Hausdorff-Raum X ist genau dann kompakt erzeugt, wenn für jeden Raum Y und jede Abbildung $g\colon X \to Y$ von Mengen äquivalent sind:

  (a) die Abbildung g ist stetig, und

  (b) für jedes Kompaktum K und jede stetige Abbildung $f\colon K \to X$ ist $g \circ f\colon K \to Y$ stetig.